Matematická analýza podporována programem wxMaxima

Laboratorní cvičení

Rudolf Blaško
Žilinská univerzita v Žilině

Project: Innovative Open Source Courses for Computer Science

31. 5. 2021

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Obsah

Innovative Open Source Courses for Computer Science

This teaching material was written as one of the outputs of the project
"Innovative Open Source Courses for Computer Science",
funded by the Erasmus+ grant no. 2019-1-PL01-KA203-065564.
The project is coordinated by West Pomeranian University of Technology in Szczecin (Poland)
and is implemented in partnership with Mendel University in Brno (Czech Republic)
and University of Žilina (Slovak Republic).
The project implementation timeline is September 2019 to December 2022.

Innovative Open Source Courses for Computer Science

Project was implemented under the Erasmus+.
Project name: "Innovative Open Source courses for Computer Science curriculum"
Project no.: 2019-1-PL01-KA203-065564
Key Action: KA2 – Cooperation for innovation and the exchange of good practices
Action Type: KA203 – Strategic Partnerships for higher education

Consortium: Zachodniopomorski uniwersytet technologiczny w Szczecinie
Mendelova univerzita v Brně
Žilinská univerzita v Žiline

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

01. Úvod do wxMaxima

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

01. Základní pojmy

- Příkazy zadáváme na samostatné řádky (vstupní řádky).

  Jejich realizace je zajištěna současným stisknutím kláves Shift a Enter nebo kliknutím v menu na ikonu ➡ (Send the current cell to maxima).

- Vstupní řádky jsou uvedeny jako (%i1).

- Výstupní řádky jsou uvedeny jako (%o1).

- Čísla pro vstupní řádek a příslušný výstupní řádek jsou stejná a na základě nich se můžeme odvolávat na obsahy těchto řádků.

```
(%i1) First input line.
(%o1) First output line.
(%i2) Second input line.
(%o2) Second output line.
```

01. Základní pojmy

- Příkazy se provádějí na nových samostatných řádcích (výstupních řádcích).
- Příkazy na vstupních řádcích mohou být ukončeny symbolem ; nebo symbolem $, který potlačuje zobrazení příslušného výstupu.

(%i1) `solve(0=x+2,x);`

(%o1) $[x = -2]$

(%i2) `%i1;`

(%o2) $\mathtt{solve}(0 = x + 2, x)$

(%i3) `%o1;`

(%o3) $[x = -2]$

01. Základní pojmy

- Na vstupní řádek můžeme zadat více příkazů, ale musíme je oddělit symboly ; nebo $.
- Příkaz můžeme také strukturovat na více vstupních řádků.

(%i1) `a:2;b:3;solve(a*x+b*x^2=0,x)`

(a) 2

(b) 3

(%o1) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

(%i2) `a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);`

(%o2) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

(%i3)
```
a:2$
b:3$
solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

01. Základní pojmy

Výstup můžeme uložit v různých tvarech a následně použít v jiných programech.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup (%o3) z předchozího okna můžeme:

- Kopírovat pomocí `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovat jako text (lze použít např. pro editor rovnic MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovat jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovat jako MathML, obrázek, RTF, SVG...

Prostředí wxMaxima má dobře propracovaný help pro uživatele, který najdete v menu `Help`. Help otevřeme i stisknutím klávesy `F1`.

Návod najdeme i na stránce
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

01. Základní pojmy

Výstup můžeme uložit v různých tvarech a následně použít v jiných programech.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Výstup (%o3) z předchozího okna můžeme:

- Kopírovat pomocí `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovat jako text (lze použít např. pro editor rovnic MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovat jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovat jako MathML, obrázek, RTF, SVG...

Prostředí wxMaxima má dobře propracovaný help pro uživatele, který najdete v menu `Help`. Help otevřeme i stisknutím klávesy `F1`.

Návod najdeme i na stránce `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

01. Základní pojmy

Výstup můžeme uložit v různých tvarech a následně použít v jiných programech.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Výstup (%o3) z předchozího okna můžeme:

- Kopírovat pomocí `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovat jako text (lze použít např. pro editor rovnic MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovat jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovat jako MathML, obrázek, RTF, SVG...

Prostředí wxMaxima má dobře propracovaný help pro uživatele, který najdete v menu `Help`. Help otevřeme i stisknutím klávesy `F1`.

Návod najdeme i na stránce
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

02. Základní příkazy

- Pomocí `apropos` zjistíme přesný název příkazu pomocí části jeho názvu.

```
(%i1)  apropos("plot")
(%o1)  [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

- Příkaz `describe` vypíše popis zadaného příkazu.

```
(%i1)  describe(plot2d)$
       -- Function: plot2d
       plot2d (<expr><,<range_x><,<options><)
       plot2d (<expr_<>=<expr_<>,<range_x><,<range_y><,<options><)
       plot2d ([parametric,<expr_x><,<expr><_y,<range><],<options><)
       plot2d ([discrete,<points><],<options><)
       plot2d ([contour,<expr><],<range_x><,<range_y><,<options><)
       plot2d ([<type_<>,...,<type_n><],<options><)
       There are 5 types of plots that can be plotted by 'plot2d':
             1. Explicit functions. 'plot2d' ...
       ...
```

02. Základní příkazy

- Výrazy se zadávají pomocí běžných znaků operací, relací a funkcí.
- Argumenty funkcí a příkazů jsou v závorkách.
- Symbol násobení `*` musí být zadán!
- Umocnění se zadává znakem `^` nebo dvojicí `**`.
- Symbol `:` se používá k přiřazení hodnoty napravo do výrazu nalevo.
- Následující příkazy řeší rovnici $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou proměnnou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocí příkazu `kill` můžeme z paměti odstranit proměnné se všemi jejich přiřazeními a vlastnostmi.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Základní příkazy

- Výrazy se zadávají pomocí běžných znaků operací, relací a funkcí.
- Argumenty funkcí a příkazů jsou v závorkách.
- Symbol násobení `*` musí být zadán!
- Umocnění se zadává znakem `^` nebo dvojicí `**`.
- Symbol `:` se používá k přiřazení hodnoty napravo do výrazu nalevo.
- Následující příkazy řeší rovnici $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou proměnnou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocí příkazu `kill` můžeme z paměti odstranit proměnné se všemi jejich přiřazeními a vlastnostmi.

```
(%i1) kill(a,b)
       /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Základní příkazy

- Výrazy se zadávají pomocí běžných znaků operací, relací a funkcí.
- Argumenty funkcí a příkazů jsou v závorkách.
- Symbol násobení `*` musí být zadán!
- Umocnění se zadává znakem `^` nebo dvojicí `**`.
- Symbol `:` se používá k přiřazení hodnoty napravo do výrazu nalevo.
- Následující příkazy řeší rovnici $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou proměnnou x.

```
(%i1)  a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocí příkazu `kill` můžeme z paměti odstranit proměnné se všemi jejich přiřazeními a vlastnostmi.

```
(%i1)  kill(a,b)
         /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2)  kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Základní příkazy

- V menu $\boxed{\texttt{View}}$ a podmenu $\boxed{\texttt{Display equations}}$ můžeme změnit zobrazení výstupních řádků na tvary $\boxed{\texttt{in 2D}}$ (implicitní tvar), $\boxed{\texttt{as 1D ASCII}}$ +nebo $\boxed{\texttt{as ASCII Art}}$.
- Nastavení výstupu můžete změnit také příkazem `set_display`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$
(%o1) x/sqrt(x^2+1)          /* in 2D */
```

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
(%o1) x/sqrt(x^2+1)          /* as 1D ASCII */
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
             x
(%o2) ----------             /* as ASCII Art */
                2
      sqrt(x  + 1)
```

03. Práce s čísly a základní konstanty

- Maxima dokáže pracovat s reálnými čísly v numerickém nebo symbolickém tvaru.
- Způsob zápisu reálných čísel lze nastavit v menu `Numeric` pomocí přepínače `Numeric Output` mezi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavení proměnné `numer` určuje způsob zobrazení.
- Standardně se zobrazuje 16 číslic (včetně desetinné čárky).
- Přesnost zobrazení je definována proměnnou `fpproc` a ovlivňuje zobrazení pomocí `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy stejně.
- Standardně se komplexní čísla zadávají v algebraickém tvaru (`rectform`). Pomocí příkazu `polarform` je můžeme převést do trigonometrického (exponenciálního) tvaru.

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

03. Práce s čísly a základní konstanty

- Maxima dokáže pracovat s reálnými čísly v numerickém nebo symbolickém tvaru.
- Způsob zápisu reálných čísel lze nastavit v menu `Numeric` pomocí přepínače `Numeric Output` mezi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavení proměnné `numer` určuje způsob zobrazení.
- Standardně se zobrazuje 16 číslic (včetně desetinné čárky).
- Přesnost zobrazení je definována proměnnou `fpproc` a ovlivňuje zobrazení pomocí `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy stejně.
- Standardně se komplexní čísla zadávají v algebraickém tvaru (`rectform`). Pomocí příkazu `polarform` je můžeme převést do trigonometrického (exponenciálního) tvaru.

```
(%i1) z:1+%i;
```

(z) $i+1$

```
(%i2) polarform(z)+rectform(z);
```

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

03. Práce s čísly a základní konstanty

- Přesnost můžeme zvyšovat nebo snižovat prakticky donekonečna.
- Můžeme ji měnit globálně i lokálně jen pro jednu proměnnou nebo příkaz.

```
(%i1) log(2);
(%o1) log(2)
(%i2) log(2),numer;
(%o2) 0.693147180559945З
(%i3) float(log(2));
(%o3) 0.6931471805599453
(%i4) bfloat(log(2));
(%o4) 6.931471805599453b − 1
(%i5) log(2),bfloat;
(%o5) 6.931471805599453b − 1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=34;
(%o6) 6.931471805599453094172321214581766b − 1
(%i7) bfloat(log(2)),fpprec=134;
(%o7) 6.93147180559945[106digits]8552023575813b − 1
```

03. Práce s čísly a základní konstanty

- Číselné konstanty e, π, i (imaginární jednotka) mají prefix `%`, tj. `%e`, `%pi`, `%i`.
  To platí i když jsou součástí nebo výsledkem výpočtů.
- Maxima má předdefinované konstanty `inf`, `minf` pro reálná nekonečna ∞, $-\infty$.
- Maxima má předdefinovanou konstantu `infinity` pro komplexní nekonečno.
- Logické konstanty `true` a `false` představují pravdu a nepravdu.

(%i1) `%pi+%i+%e;`

(%o1) $\pi + \%\mathrm{i} + \%\mathrm{e}$

(%i2) `[minf,inf];`

(%o2) $[-\infty, \infty]$

(%i3) `infinity;`

(%o3) *infinity*

04. Přiřazení a funkce

- Maxima obsahuje mnohem více funkcí než standardní programovací jazyky. Jsou to nejen samotné funkce, ale také různé funkce na jejich podporu.
- Operátor `:` používáme k přiřazování hodnot nebo výrazů proměnným.
- Funkce definujeme pomocí přiřazení `:=`.

```
(%i1) f(x):=x^2+2*x+3;
```

(%o1) $f(x) := x^2 + 2x + 3$

```
(%i6) f(x);f(y);f(x+1);
          f(-2);f(1);
```

(%o2) $x^2 + 2x + 3$

(%o3) $y^2 + 2y + 3$

(%o4) $(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

04. Přiřazení a funkce

Maxima obsahuje mnoho elementárních funkcí. Jsou to například:

- `exp(x)=%e^x`, `log(x)`,
- goniometrické funkce ak nim inverzní funkce
  `sin(x)` and `asin(x)`, `cos(x)` and `acos(x)`, `tan(x)` and `atan(x)`, `cot(x)` and `acot(x)`,
- hyperbolické funkce ak nim inverzní funkce
  `sinh(x)` and `asinh(x)`, `cosh(x)` and `acosh(x)`, `tanh(x)` and `atanh(x)`, `coth(x)` and `acoth(x)` atp.

Pro formátování výpisu můžeme použít příkaz `print`.

```
(%i3)  a:2$ b:log(2),numer$
       print("Logarithm of a number",a,
             " is ",log(a),"=",b)$
       Logarithm of a number 2 is log(2) = 0.693147180559453
```

04. Přiřazení a funkce

Maxima obsahuje mnoho elementárních funkcí. Jsou to například:

- `exp(x)=%e^x`, `log(x)`,
- goniometrické funkce ak nim inverzní funkce

  `sin(x)` and `asin(x)`, `cos(x)` and `acos(x)`, `tan(x)` and `atan(x)`, `cot(x)` and `acot(x)`,
- hyperbolické funkce ak nim inverzní funkce

  `sinh(x)` and `asinh(x)`, `cosh(x)` and `acosh(x)`, `tanh(x)` and `atanh(x)`, `coth(x)` and `acoth(x)` atp.

Pro formátování výpisu můžeme použít příkaz `print`.

```
(%i3)  a:2$ b:log(2),numer$
       print("Logarithm of a number",a,
             " is ",log(a),"=",b)$
```

Logarithm of a number 2 is $\log(2) = 0.6931471805599453$

04. Přiřazení a funkce

Mezi základní funkce patří také:

```
(%i4) f(x):=sign(x)$ g(x):=abs(x)$
      print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
      print(g(-3.6),g(-3.2),g(-3),g(0),g(3),g(3.2),g(3.6))$
      neg neg neg zero pos pos pos
      3.6 3.2 3 0 3 3.2 3.6
(%i6) f(x):=floor(x)$      /* bottom whole of x */
      print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
      −4 −4 −3 0 3 3 3
(%i8) f(x):=round(x)$
          /* rounded x to the nearest integer number */
      print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
      −4 −3 −3 0 3 3 4
(%i10) f(x):=truncate(x)$
          /* removes all digits after the decimal point */
      print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
      −3 −3 −3 0 3 3 3
(%i12) f(x):=ceiling(x)$    /* upper integer x */
      print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
      −3 −3 −3 0 3 4 4
```

04. Přiřazení a funkce

- Maxima také obsahuje mnoho funkcí pro jejich podporu.
- Některé z nich nejsou implementovány přímo v prostředí wxMaxima, ale v externích knihovnách, které nazýváme balíčky.
- Tyto balíčky se načtou do systému pomocí příkazu `load`.
- Na ukázku uvedeme balíček `spangl` pro podporu práce s goniometrickými funkcemi.

```
(%i2) print(tan(%pi/8), ratsimp(tan(%pi/8)),
          trigsimp(tan(%pi/8)))$
```

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

```
(%i3) load(spangl);
```

(%o3) *../share/trigonometry/spangl.mac*

```
(%i4) tan(%pi/8);
```

(%o4) $\sqrt{2}-1$

05. Práce s výrazy

Mnohokrát potřebujeme změnit podmínky pouze lokálně pro konkrétní výpočet bez změny globálního nastavení. Za tímto účelem má Maxima velmi efektivní příkaz `ev`.

- Příkaz `ev` umožňuje definovat specifické prostředí v rámci jednoho příkazu.
- Po zadání příkazu `ev(a,b1,b2,..., bn)` se vyhodnotí výraz `a` při splnění podmínek `b1`, `b2`, ..., `bn`.
- Těmito podmínkami mohou být rovnice, přiřazení, funkce, přepínače (logická nastavení).

Příklad ukazuje příklad řešení kvadratické rovnice pomocí příkazu `solve`.

- Proměnné `a`, `b`, `c` po provedení příkazu `ev` nemají přiřazené hodnoty.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x = \frac{3}{2}, x = -1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $[x = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}]$

05. Práce s výrazy

Maxima nabízí několik příkazů pro zjednodušení a úpravu různých výrazů.

- Základní funkce naleznete v menu `Simplify`.
- Maxima nabízí pomocí příkazu `example` příklady k jednotlivým příkazům.
- Podívejme se na některé z příkladů, které nabízí `example(ratsimp)`.

(%i2) `f(x):=b*(a/b-x)+b*x+a$`

`print(f(x),"?",ratsimp(f(x)))$`

$bx + b(\frac{a}{b} - x) + a \ ? \ 2a$

(%i3) `ratsimp(a+1/a);`

(%o3) $\frac{a^2+1}{a}$

(%i4) `ev(x^(a+1/a),ratsimp);`

(%o4) $x^{a+\frac{1}{a}}$

(%i5) `ev(x^(a+1/a),ratsimpexpons);`

(%o5) $x^{\frac{a^2+1}{a}}$

05. Práce s výrazy

- Funkce `expand` roznásobí příslušné členy ve výrazu.
  Funkce `faktor` naopak výraz rozloží.
  Funkce `gfactor` to dělá nad polem komplexních čísel.

```
(%i1) f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$
(%i3) ratsimp(f(x));expand(f(x));
```

(%o2) $x^5 + x^4 - 16x - 16$

(%o3) $x^5 + x^4 - 16x - 16$

```
(%i6) factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);
```

(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$

(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%i)(x+2\%i)$

(%o6) $2^2 5^2$

- Racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky pomocí `partfrac`.

```
(%i1) partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);
```

(%o1) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

05. Práce s výrazy

- Funkce `expand` roznásobí příslušné členy ve výrazu.
  Funkce `faktor` naopak výraz rozloží.
  Funkce `gfactor` to dělá nad polem komplexních čísel.

```
(%i1) f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$
(%i3) ratsimp(f(x));expand(f(x));
```
(%o2) $x^5 + x^4 - 16x - 16$

(%o3) $x^5 + x^4 - 16x - 16$

```
(%i6) factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);
```
(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$

(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%i)(x+2\%i)$

(%o6) $2^2 5^2$

- Racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky pomocí `partfrac`.

```
(%i1) partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);
```
(%o1) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

05. Práce s výrazy

Substituovat výrazy můžeme pomocí příkazů `subst(a,b,c)` a `ratsubst(a,b,c)`.

- Výraz `a` bude nahrazen výrazem `b` a následně dosazen do výrazu `c`.
- Při použití příkazu `subst` musí být `b` nejjednodušší částí (atomem) resp. kompletním podvýrazem výrazu `c`.
- V příkladu není podvýraz `x+y` úplný (chybí `z`).
- Příkaz `ratsubst` výsledný výraz také upraví.

```
(%i2) subst(x+y,a,a^2+b^2); ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);
```

(%o1) $(y+x)^2+b^2$

(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$

```
(%i4) subst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(a,x+y,x+y+z);
```

(%o3) $z+y+x$

(%o4) $z+a$

06. Limity a derivace

V menu `Calculus` najdeme funkce pro řešení základních problémů matematické analýzy (limity, derivace, integrály, součty řad, . . .).

Limity vypočteme pomocí příkazu `limit`.

- Poslední parametr určuje směr jednostranných limit, má hodnoty `plus` nebo `minus` a je volitelný.

  Pokud není zadán, Maxima počítá limitu jako komplexní.
- Příkazem `limit(f(x),x,a)` vypočítáme limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- Příkazem `limit(f(x),x,a,plus)` vypočítáme limit $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

```
(%i4) limit(1/x,x,0);      limit(1/x,x,0,plus);
            limit(1/x,x,0,minus);  limit(1/x,t,0);
(%o1) infinity
(%o2) ∞
(%o3) −∞
(%o4) 1/x
```

06. Limity a derivace

Pokud před příkazem použijeme apostrof ', tento příkaz se neprovede, pouze se zobrazí.

```
(%i2) limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
      'limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
```

(%o1) 0

(%o2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{3n+1}\right)^{4n+1}$

```
(%i2) 2+3; '2+3;
```

(%o1) 5

(%o2) 5

```
(%i4) solve(x+1=0,x);'solve(x+1=0,x);
```

(%o3) $[x=-1]$

(%o4) $solve(x+1=0,x)$

06. Limity a derivace

Derivace se počítají pomocí příkazu `diff`.

Parametr, který určuje řád derivace, je volitelný.

```
(%i4) f(x):=2*x^4-3*x+sin(x);
      print("f'=",diff(f(x),x),
            "=",diff(f(x),x,1))$
      print("f''=",diff(diff(f(x),x),x),
            "=",diff(f(x),x,2),
            "=",diff(f(x),x,1,x,1))$
      print("f^(10)=",diff(f(x),x,10),
            "=",diff(f(x),x,1,x,9))$
```

(%o1) $f(x) := 2x^4 - 3x + \sin(x)$

$f' = \cos(x) + 8x^3 - 3 = \cos(x) + 8x^3 - 3$

$f'' = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x)$

$f\hat{}(10) = -\sin(x) = -\sin(x)$

06. Limity a derivace

Parciální derivace počítáme pomocí stejného příkazu `diff`.

```
(%i3) g(x,y):=x^3*y^2-1;
      print("g'_x=",diff(g(x,y),x),
            ", respectively
              g'_y=",diff(g(x,y),y,1))$
      print( "g''_(xx)=",diff(g(x,y),x,2),
            ", g''_(yx)=",diff(g(x,y),y,1,x,1),
            ", g''_(xy)=",diff(g(x,y),x,1,y,1),
            ", g''_(yy)=",diff(g(x,y),y,1,y,1))$
```

(%o1) $g(x,y) := x^3y^2 - 1$

$g'\_x = 3x^2y^2$, respectively $g'\_y = 2x^3y$

$g''\_(xx) = 6xy^2$, $g''\_(yx) = 6x^2y$, $g''\_(xy) = 6x^2y$, $g''\_(yx) = 2x^3$

06. Limity a derivace

Taylorův polynom n-tého stupně vypočítáme pomocí příkazu `taylor`.

- Tento příkaz najdeme v menu `Calculus` a podmenu `Get Series...`.
- Taylorovou řadu funkce f stupně n ve středu c vypočteme příkazem `taylor(f(x),x,c,n)`.
- Její koeficienty vypočítáme pomocí příkazu `coeff`.
- Použití tohoto příkazu závisí na příkazu `taylor`.

(%i1) `t1:taylor(sin(x),x,0,5); t2:taylor(sin(x),x,-1,4);`

(t1) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots$

(t2) $-\sin(1)+\cos(1)(x+1)+\frac{\sin(1)(x+1)^2}{2}-\frac{\cos(1)(x+1)^3}{6}-\frac{\sin(1)(x+1)^4}{24}+\cdots$

(%i3) `print(coeff(sin(x),x,5)," and ",coeff(t1,x,5), " and ",coeff(t2,x,5))$`

0 and $\frac{1}{120}$ and $\frac{\cos(1)}{120}$

06. Limity a derivace

V příkladu je vypočítán Taylorův polynom daného polynomu jiným způsobem.

Příkaz `taylor` dává na konec tři tečky i když je vývoj ukončen.

```
(%i1) f(x):=2*x^5-x^4-3*x^3-x+1;
```

(%o1) $f(x) := 2x^5 - x^4 + (-3)x^3 - x + 1$

```
(%i2) tp1:taylor(f(x),x,-1,5);
```

(tp1) $2 + 4(x+1) - 17(x+1)^2 + 21(x+1)^3 - 11(x+1)^4 + 2(x+1)^5 + \cdots$

```
(%i4) ratsimp(tp1);expand(tp1);
```

(%o3) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%o4) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

```
(%i6) tpx:ratsubst(t,x+1,f(x));subst(x+1,t,tpx);
```

(tpx) $2t^5 - 11t^4 + 21t^3 - 17t^2 + 4t + 2$

(tp2) $2(x+1)^5 - 11(x+1)^4 + 21(x+1)^3 - 17(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$

```
(%i7) tp1-tp2;
```

(%o7) $0 + \cdots$

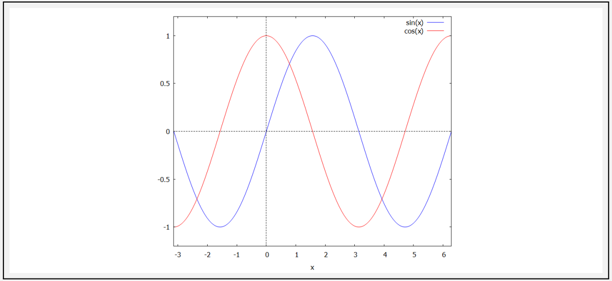
07. Grafy funkcí

Graf funkce můžeme vylíčit několika způsoby.

- Nejjednodušší způsob je zvolit v menu `Plot` podmenu `Plot 2d ...`.
- Zvolíme-li `Format=gnuplot`, funkce se vykreslí příkazem `plot2d` do nového okna pomocí programu Open Source `Gnuplot`.

  `Gnuplot` se automaticky nainstaluje spolu s Maxima.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, gnuplot])$
```

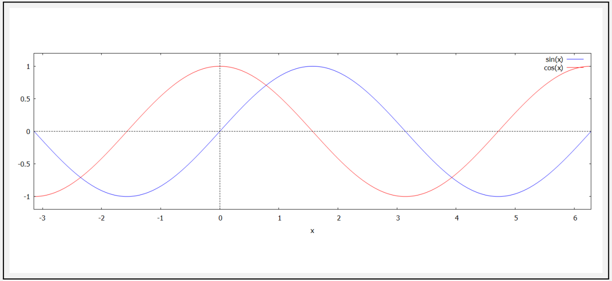


07. Grafy funkcí

Grafy funkcí nejsou zobrazeny v reálném poměru os x a y, ale jsou optimalizované pro obrazovku.

- Pro správné zobrazení můžeme použít např. parametr `same_xy`.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, gnuplot],[same_xy])$
```

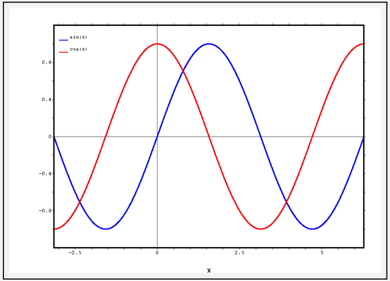


07. Grafy funkcí

Zvolíme-li `Format=wxmaxima`:

- Maxima vykreslí graf pomocí příkazu `plot2d` do nového okna.
- Obrázek můžeme uložit pouze do postscriptu.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, xmaxima])$
```



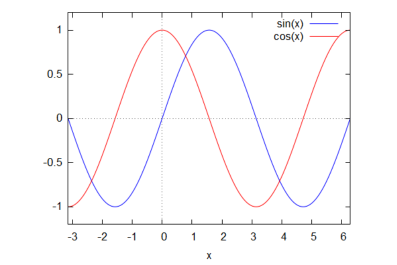
07. Grafy funkcí

Zvolíme-li `Format=inline`:

- Maxima nakreslí graf pomocí příkazu `wxplot2d` do svého prostředí.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
        [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Příkazy `plot2d` a `wxplot2d` mají stejnou syntaxi a mnohem více parametrů.

- Parametry zjistíme například příkazem `describe(plot2d)`.

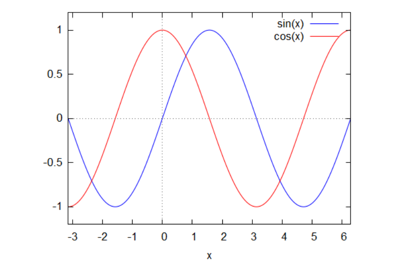
07. Grafy funkcí

Zvolíme-li `Format=inline`:

- Maxima nakreslí graf pomocí příkazu `wxplot2d` do svého prostředí.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
          [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Příkazy `plot2d` a `wxplot2d` mají stejnou syntaxi a mnohem více parametrů.

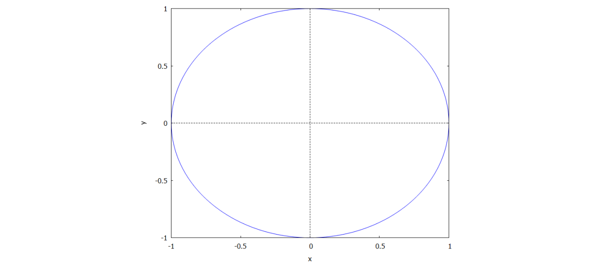
- Parametry zjistíme například příkazem `describe(plot2d)`.

07. Grafy funkcí

Pokud chceme zobrazit implicitní funkci, musíme načíst knihovnu `implicit_plot`.

- V novějších verzích (minimálně wxMaxima 21.05.2) to už není nutné.

```
(%i1) load(implicit_plot);
(%o1) ../share/contrib/implicit_plot.lisp
(%i2) implicit_plot(x^2+y^2-1, [x,-1,1], [y,-1,1])$
      implicit_plot is now obsolete. Using plot2d instead:
      plot2d (y^2+x^2-1=0, [x,-1,1], [y,-1,1])
```



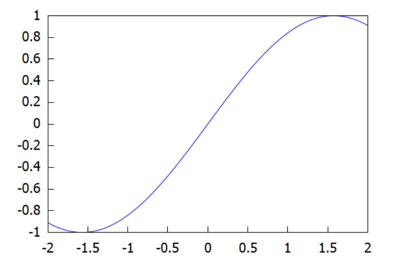
07. Grafy funkcí

Graf funkce můžeme vykreslit několika způsoby.

- Výhodnější je použít příkazy `wxdraw2d` nebo `draw2d` a výstup přesměrovat na `Gnuplot`.
- Tyto příkazy mají mírně odlišnou syntaxi než `wxplot2d`, `plot2d`.
  Parametry tisku jsou jednodušší a přehlednější.
- Vykreslovaná funkce musí být v příkazu `explicit`, `parametric` nebo `implicit`.

```
(%i1) wxdraw2d(explicit((sin(x)),x,-2,2))$
```

(%o1)

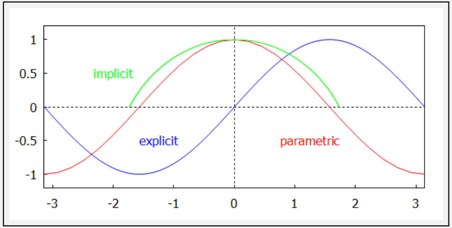


07. Grafy funkcí

Kreslení pomocí příkazů `wxdraw2d` a `draw2d`.

- Pro správné zobrazení můžeme použít např. parametr `proportional_axes`.

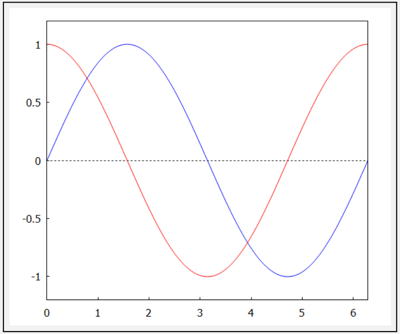
```
(%i1) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
      color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
      label(["explicit",-1.25,-.5]),
      color=red,parametric(t,cos(t),t,-%pi,%pi),
      label(["parametric",1.25,-.5]),
      color=green,implicit(x^2+(y+1)^2-4,x,-2,2,y,0,1),
      label(["implicit",-2,.5]))$
```



07. Grafy funkcí

- Příkaz draw2d.

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

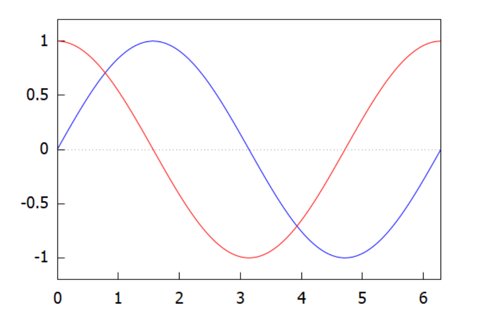


07. Grafy funkcí

- Příkaz `wxdraw2d`.

(%i1)
```
wxdraw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

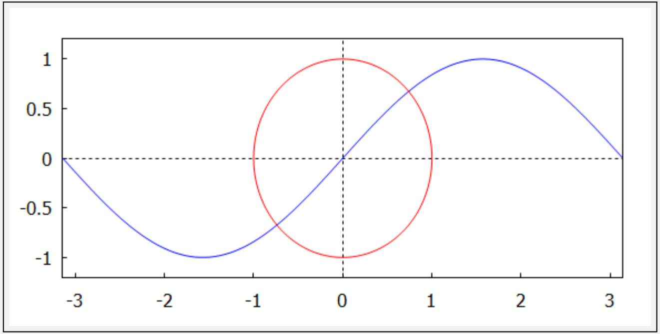
(%o1)



07. Grafy funkcí

- Stejným způsobem nakreslíme parametrickou křivku nebo funkci.

(%i1)
```
draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
color=red,nticks=300,
parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))$
```



08. Posloupnosti a řady

Posloupnosti můžeme v Maxima vytvořit několika způsoby.

- Posloupnosti můžeme vytvořit například příkazem `makelist` nebo příkazy cyklu `for..do`.
- Příkaz `makelist` vytvoří seznam, který můžeme zobrazit i jako celek i po členech.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);
      S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S2[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 7
(%o5) 199
(%i6) S1[12];
      inpart: invalid index 12 of list or matrix.
      -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

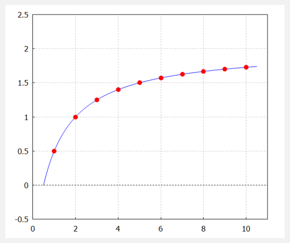
08. Posloupnosti a řady

- Posloupnost je vygenerována i se svými vzory a poté se vykreslí pomocí `draw2d`.
- Uspořádané dvojice jsou v hranatých závorkách a poté jsou zobrazeny jako body v rovině.

(%i1) `S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);`

(S1) $[[1, \frac{1}{2}], [2, 1], [3, \frac{5}{4}], [4, \frac{7}{5}], [5, \frac{3}{2}], [6, \frac{11}{7}], [7, \frac{13}{8}], [8, \frac{5}{3}], [9, \frac{17}{10}], [10, \frac{19}{11}]]$

(%i2)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
point_type=7,color=red,points(S1))$
```



08. Postupnosti a řady

- Pomocí příkazu `for..do` vypíšeme několik členů posloupnosti $\{2n^2-1\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 15 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
      1
      7
      17
      31
      49
      71
      97
      127
      161
      199
      241
      287
      337
      391
      449
```

08. Posloupnosti a řady

- Hezkým příkladem užití příkazu `for..do` je Fibonacciho posloupnost.

```
(%i3) a0:0$ a1:1$ (for i:1 thru 14
                    do (an:a1+a0,print(an),a1:a0,a0:an))$
      1
      1
      2
      3
      5
      8
      13
      21
      34
      55
      89
      144
      233
      377
```

08. Posloupnosti a řady

Součet řady můžeme vypočítat příkazem `sum`.
Tento příkaz naleznete v menu `Calculus` a podmenu `Calculate Sum...`.

- Pomocí příkazu `sum` vypočítáme konečný i nekonečný součet.

```
(%i1) sum(2*n^2-1,n,1,8);
```

(%o1) 400

- Maxima dokáže vypočítat přesný součet některých nekonečných řad.

```
(%i2) sum(1/k^2,k,1,inf);
      sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum;
```

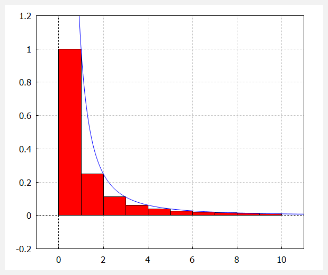
(%o1) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right)$

(%o2) $\frac{\pi^2}{6}$

08. Posloupnosti a řady

- Číselnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ lze graficky zobrazit následovně.

```
(%i1) a(n):=1/n^2$
      rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,10)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-1,11],yrange=[-0.2,1.2],
      border=true,color=black,fill_color=red,rec,
      color=blue,explicit(a(n),n,0,11))$
```



02. Reálné funkce

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

01. Základní pojmy

- **Binární relace** f mezi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Pokud pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x; y] \in f$, pak se relace f nazývá **funkce** (**zobrazení**) z množiny A do množiny B, označení $f \colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ nebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá proměnná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá proměnná, hodnota funkce.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B \colon [x; y] \in f\}$ Definiční obor funkce f (množina vzorů).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f) \colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnot funkce f (množina obrazů).
- Relace a funkce jsou množiny uspořádaných dvojic.
- $f = g$ představuje ekvivalenci $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ a pro všechny $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

01. Základní pojmy

- **Binární relace** f mezi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Pokud pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x; y] \in f$, pak se relace f nazývá **funkce** (**zobrazení**) z množiny A do množiny B, označení $f\colon A \to B$.
  Zapisujeme $[x; y] \in f$ nebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá proměnná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá proměnná, hodnota funkce.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definiční obor funkce f (množina vzorů).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnot funkce f (množina obrazů).
- Relace a funkce jsou množiny uspořádaných dvojic.
- $f = g$ představuje ekvivalenci $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,
  tj. $D(f) = D(g)$ a pro všechny $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

01. Základní pojmy

- **Binární relace** f mezi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Pokud pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x; y] \in f$, pak se relace f nazývá **funkce** (**zobrazení**) z množiny A do množiny B, označení $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ nebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá proměnná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá proměnná, hodnota funkce.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definiční obor funkce f (množina vzorů).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnot funkce f (množina obrazů).
- Relace a funkce jsou množiny uspořádaných dvojic.
- $f = g$ představuje ekvivalenci $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ a pro všechny $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

02. Posloupnosti (reálných čísel)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}.$

- Explicitní zadání: $a_n = 2n - 1,\ n \in N.$
- Rekurentní zadání: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n \in N.$

```
(%i3) a(n):=2*n-1$ S:makelist(a(n),n,1,8);
(S)   [1,3,5,7,9,11,13,15]
(%i4) an:1$ (for n:1 thru 8 do (print(an),an:an+2))$
      1
      3
      5
      7
      9
      11
      13
      15
```

02. Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Pokud je $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ rostoucí posloupnost (přirozených čísel, indexů), pak se $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazývá **podposloupnost (vybraná posloupnost z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podposloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ jsou například:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1,3,5,7,9,11,13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3,7,11,15,19,23,27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7,11,15,19,23,27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

02. Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Pokud je $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ rostoucí posloupnost (přirozených čísel, indexů), pak se $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazývá **podposloupnost (vybraná posloupnost z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podposloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ jsou například:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

02. Posloupnosti (reálných čísel)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$
           Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      print("limit a(n)=",limit(a(n),n,inf))$
      limit a(n)= 0
```

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1) b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$
           Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      print("limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
      limit b(n)= ∞
```

02. Posloupnosti (reálných čísel)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

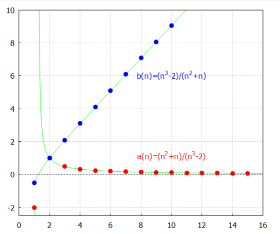
```
(%i1)  a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$
              Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
       print("limit a(n)=",limit(a(n),n,inf))$
       limit a(n)= 0
```

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1)  b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$
              Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
       print("limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
       limit b(n)= ∞
```

02. Posloupnosti (reálných čísel)

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$ Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$ Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
             xrange=[0,16],yrange=[-2.5,10],
      color=green,explicit(a(n),n,1,16),point_type=7,
             color=red,points(Sa),
        label(["a(n)=(n^2+n)/(n^3-2)",10,a(10)+1]),
      color=green,explicit(b(n),n,1,16),point_type=7,
             color=blue,points(Sb),
        label(["b(n)=(n^3-2)/(n^2+n)",10,6]))$
```



03. Číselné řady

Pokud je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost,

pak se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazývá **(nekonečná číselná) řada**.

- Číselné řady úzce souvisí s posloupnostmi a zobecňují pojem sčítání na nekonečný počet sčítanců. Jednoduchým příkladem jsou zlomky a periodická čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty částečný součet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zbytek})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vztah mezi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájemně jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\dots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Číselné řady

Pokud je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost,

pak se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazývá **(nekonečná číselná) řada**.

- Číselné řady úzce souvisí s posloupnostmi a zobecňují pojem sčítání na nekonečný počet sčítanců. Jednoduchým příkladem jsou zlomky a periodická čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k=\sum_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty částečný součet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k=\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zbytek})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vztah mezi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájemně jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Číselné řady

Pokud je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost,

pak se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazývá **(nekonečná číselná) řada**.

- Číselné řady úzce souvisí s posloupnostmi a zobecňují pojem sčítání na nekonečný počet sčítanců. Jednoduchým příkladem jsou zlomky a periodická čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k=\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty částečný součet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k=\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zbytek})}$$

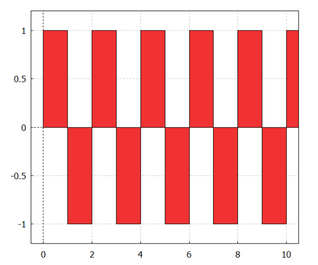
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vztah mezi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájemně jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Číselné řady

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

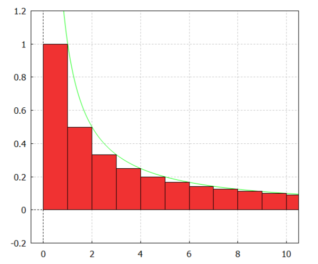
(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)$
rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



03. Číselné řady

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$

(%i1)
```
a(n):=1/n$
rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.2,1.2],
color=green,explicit(a(n),n,.5,11),
border=true,color=black,fill_color=light_red,rec)$
```



03. Číselné řady

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4) sum: sum is divergent.

#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);

- V následujícím příkladu stačí měnit na začátku hodnotu q.

```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

03. Číselné řady

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4) sum: sum is divergent.

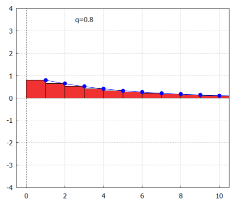
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);

- V následujícím příkladu stačí měnit na začátku hodnotu q.

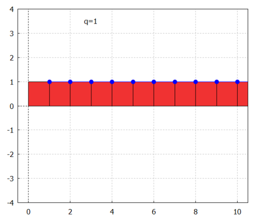
```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

03. Číselné řady

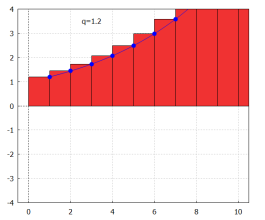
Příkazy zobrazí následující grafy:



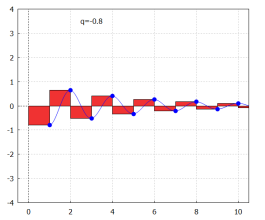
$q = 0.8$



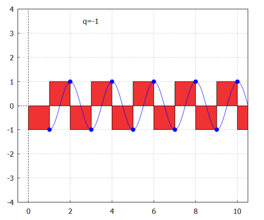
$q = 1$



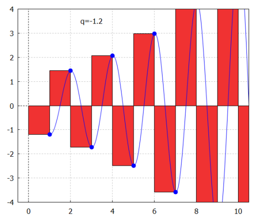
$q = 1.2$



$q = -0.8$



$q = -1$



$q = -1.2$

03. Číselné řady

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in N$ (**nezáporné členy**) má vždy součet $0 \leq s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \infty$.

Srovnávací kritérium. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty$.

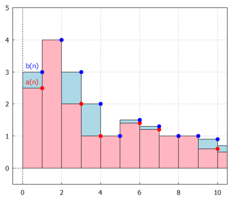
Limitní tvar. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p$, $0 < p < \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$. $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$. $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty$.

03. Číselné řady

(%i1)
```
a:[2.5,4,2,1,1,1.4,1.2,1,1,0.6,0.5]$
pa:makelist([i,a[i]],i,1,11)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a[i]]),i,1,11)$
b:[3.0,4,3,2,1,1.5,1.3,1,1,0.9,0.7]$
pb:makelist([i,b[i]],i,1,11)$
rb:makelist(rectangle([i-1,0],[i,b[i]]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.5,5],
border=true,color=black,fill_color=light_blue,
rb,color=black,fill_color=light_pink,ra,
point_type=7,color=red,points(pa),point_type=7,
color=blue,points(pb),color=red,label(["a(n)",.5,2.7]),
color=blue,label(["b(n)",.5,3.2]))$
```



03. Číselné řady

d'Alembertovo (podílové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$.

Limitní tvar. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

03. Číselné řady

d'Alembertovo (podílové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

03. Číselné řady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}} = 1.$

03. Číselné řady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

03. Číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow \text{pro } a > 0.$$

d'Alembertovo podílové kritérium:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pro $a > 0$.

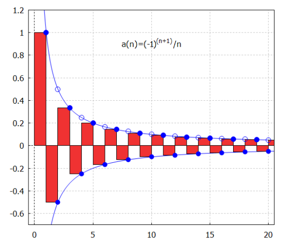
Cauchyho odmocninové kritérium:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pro $a > 0$.

```
(%i5)  an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
           limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
           limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%o3)  0
(%o4)  0
(%o5)  0
```

03. Číselné řady

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)/n$ pa:makelist([i,a(i)],i,1,21)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,21)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,20.5],yrange=[-.7,1.2],
color=blue,explicit(abs(a(n)),n,.5,21),
explicit(-abs(a(n)),n,.5,21),
border=true,color=black,fill_color=light_red,ra,
label(["a(n)=(-1)^{(n+1)}/n",10,.9]),
point_type=6,color=blue,points(abs(pa)),point_type=7,
color=blue,points(pa))$
```



04. Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkce reálné proměnné.
- $H(f) \subset R$ Reálná funkce.

Explicitně: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkce φ, ψ).

Implicitně: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmínky pro $[x; y]$ (Implicitní rovnice).

Funkce $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkci $f\colon y = |x|$, $x \in R$ můžeme například definovat:

Explicitně: • $y = \sqrt{x^2}$, resp. • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky: • $x = t$, $y = |t|$, $t \in R$, resp. • $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.

Implicitně: • $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. • $y - |x| = 0$.

04. Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkce reálné proměnné.
- $H(f) \subset R$ Reálná funkce.

Explicitně: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkce φ, ψ).

Implicitně: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmínky pro $[x; y]$ (Implicitní rovnice).

Funkce $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkci $f\colon y = |x|$, $x \in R$ můžeme například definovat:

Explicitně: • $y = \sqrt{x^2}$, resp. • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky: • $x = t$, $y = |t|$, $t \in R$, resp. • $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.

Implicitně: • $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. • $y - |x| = 0$.

04. Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkce reálné proměnné.
- $H(f) \subset R$ Reálná funkce.

Explicitně: • $y = f(x),\ x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J,\ J \subset R$ (Pomocné funkce φ, ψ).

Implicitně: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmínky pro $[x; y]$ (Implicitní rovnice).

Funkce $f\colon y = |x|,\ x \in R$.

Funkci $f\colon y = |x|$, $x \in R$ můžeme například definovat:

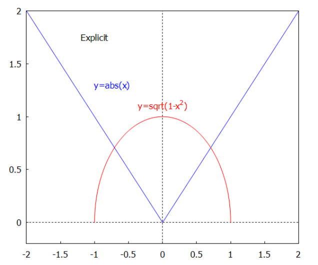
Explicitně: • $y = \sqrt{x^2}$, resp. • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky: • $x = t,\ y = |t|,\ t \in R$, resp. • $x = t,\ y = \sqrt{t^2},\ t \in R$.

Implicitně: • $y^2 - x^2 = 0,\ y \geq 0$, resp. • $y - |x| = 0$.

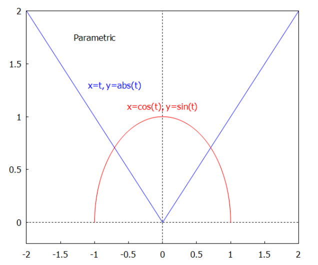
04. Funkce

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,explicit(abs(x),x,-2,2),
label(["y=abs(x)",-.75,1.3]),
color=red,explicit(sqrt(1-x^2),x,-1,1),
label(["y=sqrt(1-x^2)",0,1.1]),
color=black,label(["Explicit",-1,1.75]))$
```



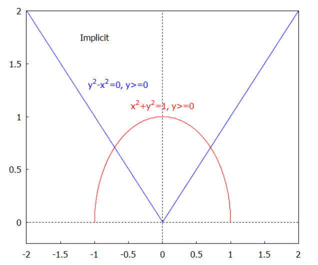
04. Funkce

```
(%i1) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
      color=blue,parametric(t,abs(t),t,-2,2),
      label(["x=t, y=abs(t)",-.7,1.3]),
      color=red,nticks=100,parametric(cos(t),sin(t),t,0,%pi),
      label(["x=cos(t), y=sin(t)",0,1.1]),
      color=black,label(["Parametric",-1,1.75]))$
```



04. Funkce

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,implicit(y^2-x^2,x,-2,2,y,0,2),
label(["y^2-x^2=0, y>=0",-.65,1.3]),
color=red,implicit(x^2+y^2-1,x,-1,1,y,0,1),
label(["x^2+y^2=1, y>=0",0,1.1]),
color=black,label(["Implicit",-1,1.75]))$
```



05. Elementární funkce I

Elementární funkce se nazývá každá funkce vytvořená pomocí operací sčítání, odečítání, násobení, dělení nebo pomocí skládání funkcí ze základních elementárních funkcí:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Polynom stupně n

$$f_n \colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \text{ kde } a_0, a_1, \ldots, a_n \in R,\ n \in N \cup \{0\},\ a_n \neq 0.$$

- $f_0 \colon y = a_0$, $a_0 \neq 0$ se nazývá **konstantní funkce**.
- $f_1 \colon y = a_0 + a_1 x$, $a_1 \neq 0$ se nazývá **lineární funkce**.
- $f_2 \colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_2 \neq 0$ se nazývá **kvadratická funkce**.

05. Elementární funkce I

Elementární funkce se nazývá každá funkce vytvořená pomocí operací sčítání, odečítání, násobení, dělení nebo pomocí skládání funkcí ze základních elementárních funkcí:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

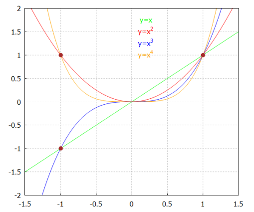
Polynom stupně n

$f_n\colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon y = a_0$, $a_0 \neq 0$ se nazývá **konstantní funkce**.
- $f_1\colon y = a_0 + a_1 x$, $a_1 \neq 0$ se nazývá **lineární funkce**.
- $f_2\colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_2 \neq 0$ se nazývá **kvadratická funkce**.

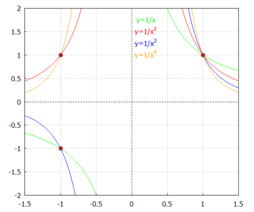
05. Elementární funkce I

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
      color=green,explicit(x,x,-1.5,1.5),
      label(["y=x",.2,1.75]),
      color=red,explicit(x^2,x,-1.5,1.5),
      label(["y=x^2",.2,1.5]),
      color=blue,explicit(x^3,x,-1.5,1.5),
      label(["y=x^3",.2,1.25]),
      color=orange,explicit(x^4,x,-1.5,1.5),
      label(["y=x^4",.2,1]),color=brown,
      point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



05. Elementární funkce I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(1/x,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x",.2,1.75]),
color=red,explicit(1/x^2,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(1/x^3,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(1/x^4,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^4",.2,1]),color=brown,
point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



05. Elementární funkce I

Racionální lomená funkce

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m jsou polynomy stupňů $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkce

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciální funkce se základem $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Nejdůležitější je $f\colon y = \exp x = e^x$ se základem e (Eulerovo číslo).
- Graf se nazývá **exponenciální křivka** a prochází body $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcí $y = a^x$, $y = a^{-x}$ jsou symetrické podle osy y.

05. Elementární funkce I

Racionální lomená funkce

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m jsou polynomy stupňů $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkce

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciální funkce se základem $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Nejdůležitější je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ se základem e (Eulerovo číslo).
- Graf se nazývá **exponenciální křivka** a prochází body $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcí $y = a^x$, $y = a^{-x}$ jsou symetrické podle osy y.

05. Elementární funkce I

Racionální lomená funkce

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m jsou polynomy stupňů $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkce

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

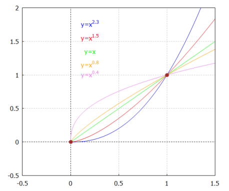
Exponenciální funkce se základem $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Nejdůležitější je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ se základem e (Eulerovo číslo).
- Graf se nazývá **exponenciální křivka** a prochází body $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcí $y = a^x$, $y = a^{-x}$ jsou symetrické podle osy y.

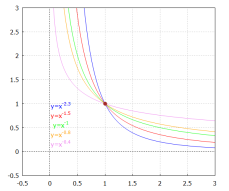
05. Elementární funkce I

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,1.5],yrange=[-.5,2],
      color=blue,explicit(x^2.3,x,0,1.5),
      label(["y=x^{2.3}",.2,1.75]),
      color=red,explicit(x^1.5,x,0,1.5),
      label(["y=x^{1.5}",.2,1.55]),
      color=green,explicit(x,x,-0,1.5),
      label(["y=x",.2,1.35]),
      color=orange,explicit(x^.8,x,0,1.5),
      label(["y=x^{0.8}",.2,1.15]),
      color=violet,explicit(x^.4,x,0,1.5),
      label(["y=x^{0.4}",.2,1]),
      color=brown,point_type=7,points([[0,0],[1,1]]))$
```



05. Elementární funkce I

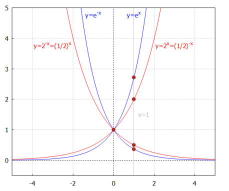
(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,3],yrange=[-.5,3],
color=blue,explicit(x^-2.3,x,0,3),
label(["y=x^{-2.3}",.2,.95]),
color=red,explicit(x^-1.5,x,0,3),
label(["y=x^{-1.5}",.2,.75]),
color=green,explicit(x^-1,x,-0,3),
label(["y=x^{-1}",.2,.55]),
color=orange,explicit(x^-.8,x,0,3),
label(["y=x^{-0.8}",.2,.35]),
color=violet,explicit(x^-.4,x,0,3),
label(["y=x^{-0.4}",.2,.15]),
color=brown,point_type=7,points([[1,1]]))$
```



05. Elementární funkce I

(%i1)

```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-.5,5],
color=blue,explicit(%e^x,x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.75]),
explicit(%e^(-x),x,-5,5),
label(["y=e^{-x}",-1,4.75]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x=(1/2)^{-x}",3,3.75]),
explicit(2^(-x),x,-5,5),
label(["y=2^{-x}=(1/2)^x",-3,3.75]),
color=grey,parametric(1,t,t,-.5,5),
label(["x=1",1.5,1.5]),color=brown,point_type=7,
points([[0,1],[1,1/2],[1,2],[1,1/%e],[1,%e]]))$
```



05. Elementární funkce I

(%i1) `exp(x)+%e^x;exp(1);`

(%o1) $2\%e^{x}$

(%o2) $\%e$

(%i5) `log(x);log(2);log(%e);`

(%o3) $\log(x)$

(%o4) $\log(2)$

(%o5) 1

(%i8) `log_2(x):=log(x)/log(2);log_2(2);log_2(%e);`

(%o6) $\log\_2(x) := \frac{\log(x)}{\log(2)}$

(%o7) 1

(%o8) $\frac{1}{\log(2)}$

05. Elementární funkce I

Logaritmická funkce se základem $a > 0$, $a \neq 1$

$f\colon y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$.

- Logaritmická funkce $y = \log_a x$, $x \in \langle 0; \infty)$ je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, $x \in R$ se stejným základem $a > 0$, $a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Pro $a > 0$, $a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pro $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pro $x \in R$.
- Graf se nazývá logaritmická křivka a prochází body $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcí $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ jsou symetrické podle osy x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označení $\log x = \log_{10} x$.
- $a = e$. $\Rightarrow$ Přirozený logaritmus, označení $\ln x = \log_e x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (přirozený logaritmus) mají základ e.
- Pokud chceme vypočítat logaritmus s jiným základem, například. $\log_2 x$, musíme použít konstrukci $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

05. Elementární funkce I

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$

$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$.

- Logaritmická funkce $y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$ je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, $x \in R$ se stejným základem $a > 0,\ a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Pro $a > 0,\ a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pro $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pro $x \in R$.
- Graf se nazývá logaritmická křivka a prochází body $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcí $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ jsou symetrické podle osy x.
- $a = 10.\quad \Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označení $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}.\quad \Rightarrow$ Přirozený logaritmus, označení $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (přirozený logaritmus) mají základ e.
- Pokud chceme vypočítat logaritmus s jiným základem, například. $\log_2 x$, musíme použít konstrukci $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

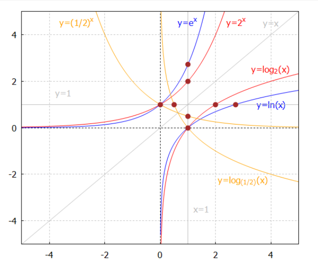
05. Elementární funkce I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(exp(x),x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.5]),
explicit(log(x),x,.01,5),label(["y=ln(x)",4,1]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x",2.75,4.5]),
explicit(log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_2(x)",4,2.5]),
color=orange,explicit((1/2)^x,x,-5,5),
label(["y=(1/2)^x",-3,4.5]),
explicit(-log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/2)}(x)",3,-2.25]),
color=grey,parametric(t,t,t,-5,5),label(["y=x",4,4.5]),
parametric(1,t,t,-5,5),label(["x=1",1.5,-3.5]),
parametric(t,1,t,-5,5),label(["y=1",-3.5,1.5]),
color=brown,point_type=7,points([[1,0],[0,1],
[1,2],[2,1],[1,1/2],[1/2,1],[1,%e],[%e,1]]))$
```

05. Elementární funkce I

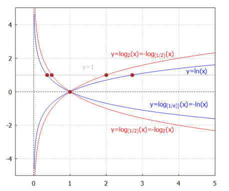
- Grafy exponenciálních a logaritmických funkcí z předchozí strany.

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
      color=blue,explicit(exp(x),x,-5,5),
      label(["y=e^x",1,4.5]),
      explicit(log(x),x,.01,5),label(["y=ln(x)",4,1]),
      color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
      label(["y=2^x",2.75,...
```
the command continues (previous page)



05. Elementární funkce I

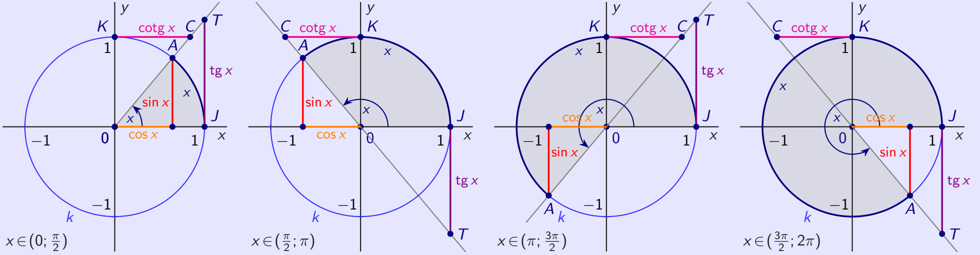
(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(log(x),x,.01,5),
label(["y=ln(x)",4.5,1.25]),
explicit(-log(x),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/e))}(x)=-ln(x)",4,-.75]),
color=red,explicit(log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_2(x)=-log_{(1/2)}(x)",3,2.25]),
explicit(-log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/2)}(x)=-log_2(x)",3,-2.25]),
color=grey,parametric(t,1,t,-.5,5),
label(["y=1",1.5,1.5]),color=brown,point_type=7,
points([[1,0],[1/2,1],[2,1],[1/%e,1],[%e,1]]))$
```



06. Elementární funkce II

Goniometrické (trigonometrické) funkce jsou:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{ k\pi, k \in Z \} \to R$.

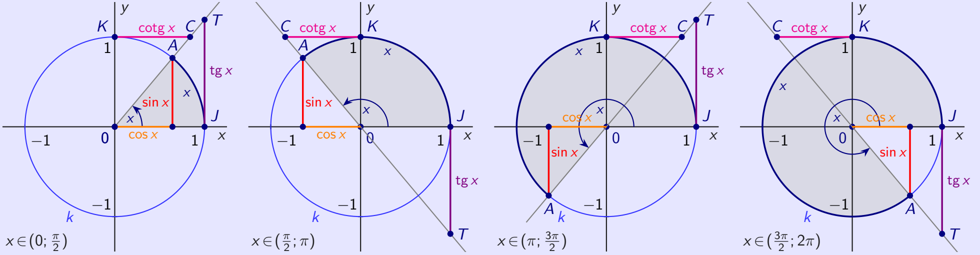


- Číslo π se nazývá **Ludolfovo**. Jeho hodnota je přibližně $3,141\,592\,654$.
- Kružnice s poloměrem $r = 1$ má obvod 2π.

06. Elementární funkce II

Goniometrické (trigonometrické) funkce jsou:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{k\pi, k \in Z\} \to R$.



- Číslo π se nazývá **Ludolfovo**. Jeho hodnota je přibližně $3,141\,592\,654$.
- Kružnice s poloměrem $r = 1$ má obvod 2π.

06. Elementární funkce II

- V programu Maxima mají goniometrické funkce tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcí musí být zadány v radiánech.
- Pokud chceme použít stupně, musíme je nejprve převést na radiány.

(%i3) `tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);`
`ratsimp(tangrad(22.5));`

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

```
rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125
```

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Pro zjednodušení práce s goniometrickými funkcemi můžeme použít příkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` nebo `spangl`, které obsahují další podporu pro práci s goniometrickými funkcemi.
- Balíčky načteme do systému pomocí příkazu `load`.

06. Elementární funkce II

- V programu Maxima mají goniometrické funkce tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcí musí být zadány v radiánech.
- Pokud chceme použít stupně, musíme je nejprve převést na radiány.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
      ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

`rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125`

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Pro zjednodušení práce s goniometrickými funkcemi můžeme použít příkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` nebo `spangl`, které obsahují další podporu pro práci s goniometrickými funkcemi.
- Balíčky načteme do systému pomocí příkazu `load`.

06. Elementární funkce II

(%i1) `tan(%pi/4);tan(%pi/6);tan(%pi/8);`

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i4) `ratsimp(tan(%pi/8));`

(%o4) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i5) `trigsimp(tan(%pi/8));`

(%o5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

(%i6) `load(spangl);`

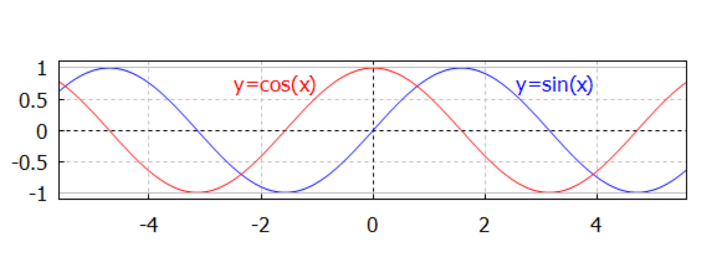
(%o6) *../share/trigonometry/spangl.mac*

(%i7) `tan(%pi/8);`

(%o7) $\sqrt{2}-1$

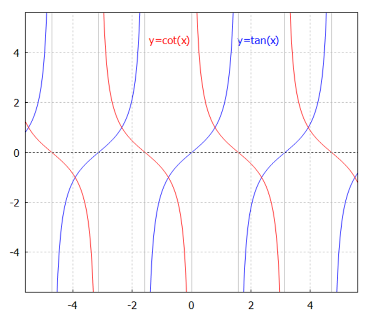
06. Elementární funkce II

```
(%i1) draw2d(proportional_axes=xy,grid=true,
      xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],yrange=[-1.1,1.1],
      color=blue,explicit(sin(x),x,-3*%pi,3*%pi),
      label(["y=sin(x)",3.25,.75]),
      color=red,explicit(cos(x),x,-3*%pi,3*%pi),
      label(["y=cos(x)",-1.75,.75]),
      color=grey,parametric(t,1,t,-3*%pi,3*%pi),
      parametric(t,-1,t,-3*%pi,3*%pi))$
```



06. Elementární funkce II

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],
yrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],
color=blue,explicit(tan(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=tan(x)",2.25,4.5]),
color=red,explicit(cot(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=cot(x)",-.75,4.5]),
color=grey,    /* asymptotes */
parametric(0,t,t,-6,6),
parametric(%pi/2,t,t,-6,6),
parametric(-%pi/2,t,t,-6,6),
parametric(%pi,t,t,-6,6),
parametric(-%pi,t,t,-6,6),
parametric(3*%pi/2,t,t,-6,6),
parametric(-3*%pi/2,t,t,-6,6))$
```



06. Elementární funkce II

Součtové vzorce pro sinus a kosinus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

- **Arkussinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- **Arkuskosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ke goniometrickým funkcím neexistují inverzní funkce, protože nejsou injektivní. Je nutné je vhodně zúžit.

06. Elementární funkce II

Součtové vzorce pro sinus a kosinus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

- **Arkussinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- **Arkuskosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ke goniometrickým funkcím neexistují inverzní funkce, protože nejsou injektivní. Je nutné je vhodně zúžit.

06. Elementární funkce II

- Cyklometrické funkce mají tvar `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`.
- Na tomto místě můžeme zmínit funkci `atan2(x,y)` definovanou vztahem $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

(%i4) `asin(1);asin(1),numer;`
`acos(1);acos(1),numer;`

(%o1) $\frac{\pi}{2}$

(%o2) 1.570796326794897

(%o1) 0

(%o2) 0.0

(%i7) `atan2(2,4);atan(1/2);atan(1/2),numer;`

(%o5) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$

(%o6) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$

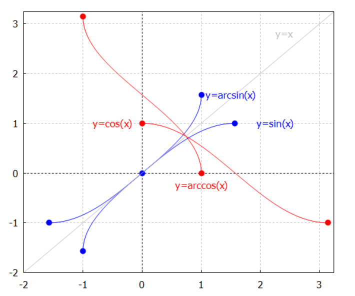
(%o7) 0.4636476090008061

Součtové vzorce pro cyklometrické funkce.

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in R$.

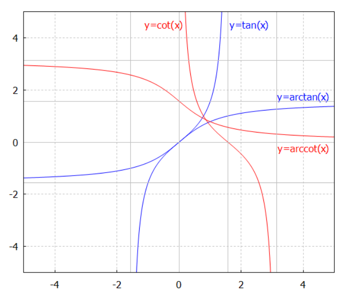
06. Elementární funkce II

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,%pi+.1],yrange=[-2,%pi+.1],
color=blue,explicit(sin(x),x,-%pi/2,%pi/2),
label(["y=sin(x)",2.25,1]),explicit(asin(x),x,-1,1),
label(["y=arcsin(x)",1.5,%pi/2]),
point_type=7, points([[0,0],[1,%pi/2],
[-1,-%pi/2],[%pi/2,1],[-%pi/2,-1]]),
color=red,explicit(cos(x),x,0,%pi),
label(["y=cos(x)",-.5,1]),
explicit(acos(x),x,-1,1),
label(["y=arccos(x)",1,-.25]),
point_type=7,
points([[0,1],[1,0],
[%pi,-1],[-1,%pi]]),
color=grey,
parametric(t,t,t,-5,5),
label(["y=x",2.4,2.8]))$
```



06. Elementární funkce II

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
      color=blue,explicit(tan(x),x,-%pi/2+.01,%pi/2-.01),
      label(["y=tan(x)",2.25,4.5]),explicit(atan(x),x,-5,5),
      label(["y=arctan(x)",4,1.75]),color=grey,
      parametric(t,-%pi/2,t,-5,5),parametric(t,%pi/2,t,-5,5),
      parametric(-%pi/2,t,t,-5,5),parametric(%pi/2,t,t,-5,5),
      color=red,explicit(cot(x),x,.01,%pi-.01),
      label(["y=cot(x)",-.5,4.5]),
      explicit(%pi/2-atan(x),x,-5,5),
      label(["y=arccot(x)",4,-.25]),
      color=grey,
      parametric(t,0,t,-5,5),
      parametric(t,%pi,t,-5,5),
      parametric(0,t,t,-5,5),
      parametric(%pi,t,t,-5,5))$
```



06. Elementární funkce II

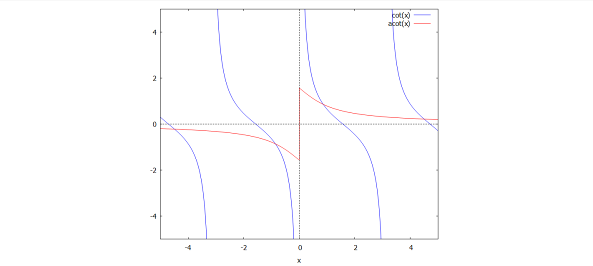
- Musíme si dát pozor na nepřesnou interpretaci funkce arkuskotangens.

(%i4)
```
acot(-1)$
print("acot(-1)=",acot(-1),"is bad")$
%pi/2-atan(-1)$
print("acot(-1)=",%pi/2-atan(-1),"is ok")$
```

$acot(-1) = -\frac{\pi}{4}$ *is bad*

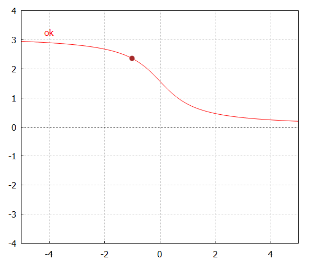
$acot(-1) = -\frac{3\pi}{4}$ *is ok*

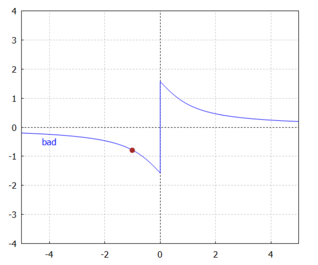
(%i5)
```
plot2d([cot(x),acot(x)],[x,-5,5],[y,-5,5])$
```



06. Elementární funkce II

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],color=red,
      explicit(%pi/2-atan(x),x,-5,5),label(["ok",-4,3.25]),
      color=brown,point_type=7,
      points([[-1,%pi/2-atan(-1)]]))$
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],color=blue,
      explicit(acot(x),x,-5,5),label(["bad",-4,-.5]),
      color=brown,point_type=7,points([[-1,acot(-1)]]))$
```





06. Elementární funkce II

Hyperbolické funkce jsou:

- **Hyperbolický sinus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\, e^x}$: $R \to R$.
- **Hyperbolický kosinus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\, e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Hyperbolické funkce mají podobné vlastnosti jako goniometrické funkce.

Součtové vzorce pro sinus a kosinus hyperbolické. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

06. Elementární funkce II

Hyperbolické funkce jsou:

- **Hyperbolický sinus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $R \to R$.
- **Hyperbolický kosinus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Hyperbolické funkce mají podobné vlastnosti jako goniometrické funkce.

Součtové vzorce pro sinus a kosinus hyperbolické. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

06. Elementární funkce II

Moivreův vzorec. $x \in R,\ n \in N.$

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$

- Hyperbolické funkce jsou `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` a k nim inverzní hyperbolometrické funkce jsou `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

```
(%i4) sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1) sinh(x)
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 1.313035285499331
(%i8) asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5) asinh(x)
(%o6) 0
(%o7) 0
(%o8) 1.01844096363052
```

06. Elementární funkce II

Hyperbolometrické funkce jsou inverzní ke hyperbolickým funkcím:

- **Argument sinus hyperbolický**

$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right):\quad R \to R.$$

- **Argument kosinus hyperbolický**

$$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right):\ \langle 1;\infty) \to \langle 0;\infty).$$

- **Argument tangens hyperbolický**

$$y = \operatorname{argtgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x}:\qquad (-1;1) \to R.$$

- **Argument kotangens hyperbolický**

$$y = \operatorname{argcotgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x+1}{x-1}:\qquad R - \langle -1;1\rangle \to R - \{0\}.$$

```
(%i3) ash(x):=log(x+sqrt(x^2+1))$
      a:2$ asinh(a)-ash(a),numer;
(%o3) 0.0
```

07. Limita funkce

- Při vyšetřování funkce je potřeba charakterizovat její lokální vlastnosti v různých intervalech a v okolích důležitých bodů.
- Funkce f nemusí být definována v bodě, kolem kterého ji vyšetřujeme.

Bod $a \in R^*$ se nazývá **hromadný bod** množiny $A \subset R$,
pokud pro každé okolí $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Následující definice pomocí posloupností se nazývá ve smyslu Heineho.

Funkce f **má v bode** $a \in R^*$ **limitu** $b \in R^*$, označení $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pokud:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pak existuje (alespoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

07. Limita funkce

- Při vyšetřování funkce je potřeba charakterizovat její lokální vlastnosti v různých intervalech a v okolích důležitých bodů.
- Funkce f nemusí být definována v bodě, kolem kterého ji vyšetřujeme.

Bod $a \in R^*$ se nazývá **hromadný bod** množiny $A \subset R$,
pokud pro každé okolí $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Následující definice pomocí posloupností se nazývá ve smyslu Heineho.

Funkce f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označení $\lim_{x \to a} f(x) = b$, pokud:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Pokud $\lim_{x \to a} f(x) = b$, pak existuje (alespoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
a platí $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$.

07. Limita funkce

$a \in R^*$ je hromadný bod množin $D(f)$ a $D(g)$, $O(a)$ je okolí.

$\forall x \in O(a)$, $x \neq a$:
- $f(x) = g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokud existují.
- $f(x) \leq g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokud existují.

$\forall x \in O(a)$, $x \neq a$:
- $f(x) < g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokud existují.

Věta o dvou policistech.

$a \in R^*$ je hromadný bod množin $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$, $O(a)$ je okolí.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in O(a),\ x \neq a\colon h(x) \leq f(x) \leq g(x). \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b, \text{ kde } b \in R^*. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x\to a} f(x) = b.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

- ∞ je hromadný bod definičního oboru $D(f) = R - \{0\}$ funkce f: $y = \frac{\sin x}{x}$.
- $x > 0. \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o1) 0
```

```
(%i1) f(x):=sin(x)/x$ for i:1 thru 10 do
          (x:100^i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

100 $-0.0050636564110975\,88$

10000 $-3.056143888882521 \cdot 10^{-5}$

1000000 $-3.499935021712929 \cdot 10^{-7}$

100000000 $9.31639027109726 \cdot 10^{-9}$

10000000000 $-4.875060250875107 \cdot 10^{-11}$

1000000000000 $-6.112387023768895 \cdot 10^{-13}$

100000000000000 $-2.094083074964523 \cdot 10^{-15}$

10000000000000000 $7.796880066069787 \cdot 10^{-17}$

1000000000000000000 $-9.929693207404051 \cdot 10^{-19}$

100000000000000000000 $-6.452512852657808 \cdot 10^{-21}$

07. Limita funkce

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- 0 je hromadný bod $D(f) = R - \{0\}$ funkce $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- $0 < x < \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad \Rightarrow 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$
- $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. $\Rightarrow \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0. \quad \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x} = 1.$
- $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. $\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,0);
(%o1) 1
(%i2) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o2) 0
(%i3) limit(sin(x)/x,x,minf);
(%o3) 0
```

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)=1.$

```
(%i2) limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0);limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1) und             /* undefined */
(%o2) 1
```

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}\cdot\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2}{x^2+4}=\frac{3\cdot 0+2}{0+4}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$

```
(%i3) limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
      limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
      limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
(%o1) 1
(%o2) 1/2
(%o3) 1/2
```

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right) = 1.$

```
(%i2) limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0);limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1) und            /* undefined */
(%o2) 1
```

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} \cdot \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{x^2+4} = \frac{3\cdot 0+2}{0+4} = \frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$

```
(%i3) limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
      limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
      limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
(%o1) 1
(%o2) 1/2
(%o3) 1/2
```

07. Limita funkce

- $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+x\cdot\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}.$$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}=\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}=1+1=2.$$

```
(%i3) limit(x/(sqrt(1+x)-sqrt(1-x)),x,0);
      limit((1-sqrt(1-x))/x,x,0);
      limit((\sqrt(x^2-1)+sqrt(x^2+1))/x,x,inf);
```
(%o1) 1
(%o2) $\frac{1}{2}$
(%o3) 2

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \left[\begin{matrix} \text{Subst.} & x = z^{12} \\ x \to 1, & z \to 1 \end{matrix}\right] = \lim\limits_{z\to 1} \frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^3-1}$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to 1} \frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

```
(%i1) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
(%o1) 4/3
```

Pokud použijeme substituci $x = z^{12}$, můžeme limitu zjednodušit.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$
      g(z):=subst(z^12,x,f(x))$
      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
```

(%o1) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^2\cdot|z|-1}$ /* z is positive, z=|z| */

(%o2) $\frac{4}{3}$

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \begin{bmatrix} \text{Subst.} & x = z^{12} \\ x \to 1, & z \to 1 \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^3-1}$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to 1} \frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

```
(%i1) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
(%o1) 4/3
```

Pokud použijeme substituci $x = z^{12}$, můžeme limitu zjednodušit.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$
      g(z):=subst(z^12,x,f(x))$
      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
```

(%o1) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^2\cdot|z|-1}$ `/* z is positive, z=|z| */`

(%o2) $\frac{4}{3}$

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1-\infty^{-2}}+2^0=\frac{5}{1-0}+1=6.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^a=e^a$ pro $a\in R$.

```
(%i4) limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(2/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(-2/log(x)),x,0,plus);
```

(%o1) 6
(%o2) e^a
(%o3) e^2
(%o4) e^{-2}

V posledním příkladu jsme vypočítali limitu výrazu 0^0 (tzv. neurčitý výraz).

Mezi **neurčité výrazy** (počítáme je pomocí limit) patří:

- $\infty-\infty$, • $\pm\infty\cdot 0$, • $\frac{0}{0}$, • $\frac{1}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, • 0^0, • $0^{\pm\infty}$, • $1^{\pm\infty}$, • $(\pm\infty)^0$.

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1-\infty^{-2}}+2^0=\frac{5}{1-0}+1=6.$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^a=e^a$ pro $a\in R$.

```
(%i4) limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(2/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(-2/log(x)),x,0,plus);
```

(%o1) 6
(%o2) e^a
(%o3) e^2
(%o4) e^{-2}

V posledním příkladu jsme vypočítali limitu výrazu 0^0 (tzv. neurčitý výraz).

Mezi **neurčité výrazy** (počítáme je pomocí limit) patří:

- $\infty-\infty$, • $\pm\infty\cdot 0$, • $\frac{0}{0}$, • $\frac{1}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, • 0^0, • $0^{\pm\infty}$, • $1^{\pm\infty}$, • $(\pm\infty)^0$.

07. Limita funkce

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2)-\ln x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \ln e^2 = 2.$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix}\text{Subst.} & z=tx\\ x\to 0, & z\to 0\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{\frac{z}{t}}{\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\ln(1+z)}$

  $= \frac{1}{t}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{t}$ pro $t\in R,\ t\neq 0.$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } z=3x+1\\ x\to\infty, \quad z\to\infty\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}}$

  $= \lim\limits_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[e^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

```
(%i3)  limit(x*(log(x+2)-log(x)),x,inf);
       limit(x/log(1+t*x),x,0);
       limit(((3*x-2)/(3*x+1))^x,x,inf);
```

(%o1) 2
(%o2) $\frac{1}{t}$
(%o3) e^{-1}

07. Limita funkce

Při vyšetřování funkce f je důležité přezkoumat její vlastnosti i v jiných než vlastních bodech:

- Pro $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodů $a \in R$, pro které platí $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Přímka $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice** (**vertikální**) grafu f,
  pokud $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ (alespoň jedna z limit je nekonečná).
- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota se směrnicí** grafu f,
  pokud $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ nebo $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Speciálně asymptota $y = q$ se nazývá **horizontální asymptota**,
tj. $k = 0$ a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = q$ nebo $\lim_{x \to \infty} f(x) = q$.

07. Limita funkce

Při vyšetřování funkce f je důležité přezkoumat její vlastnosti i v jiných než vlastních bodech:

- Pro $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodů $a \in R$, pro které platí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Přímka $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice** (**vertikální**) grafu f,

  pokud $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (alespoň jedna z limit je nekonečná).

- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota se směrnicí** grafu f,

  pokud $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Speciálně asymptota $y = q$ se nazývá **horizontální asymptota**,

tj. $k = 0$ a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = q$ nebo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q$.

07. Limita funkce

Funkce $y=f(x)$, $x\in D(f)$, přičemž $D(f)$ je neomezená množina.

- Přímka $y=kx+q$ je asymptota se směrnicí grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existují $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=q$, $k,q\in R$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(kx+q)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{q}{x}\right]=0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+q)]=\lim_{x\to\infty}[(f(x)-kx)-q]=0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=q.$$

Funkce $f(x)=\frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x\in R$.

- $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x+1}{8x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8}=\frac{2+0+0}{8}=\frac{1}{4}$.
- $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2+x+1}{8x}-\frac{x}{4}\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2+x+1}{8x}-\frac{2x^2}{8x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{8x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right]=\frac{1}{8}.$$

- Přímka $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{8}$ je asymptota se směrnicí $\frac{1}{4}$.

07. Limita funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, přičemž $D(f)$ je neomezená množina.

- Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existují $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0.$ $\quad\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$

$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim\limits_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0.$ $\quad\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$

Funkce $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Přímka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ je asymptota se směrnicí $\frac{1}{4}$.

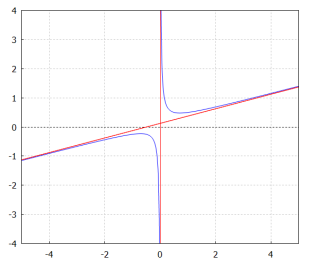
07. Limita funkce

```
(%i10) f(x):=(2*x^2+x+1)/(8*x); km:limit(f(x)/x,x,minf)$
       kp:limit(f(x)/x,x,inf)$
       qm:limit(f(x)-km*x,x,minf)$ qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf)$
       dm(x):=km*x+qm$ dp(x):=kp*x+qp$ dm(x);dp(x);
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],
       color=blue,explicit(f(x),x,-8,0),
       explicit(f(x),x,0,8),
       color=red,parametric(0,t,t,-5,5),
       explicit(dm(x),x,-8,8),
       explicit(dp(x),x,-8,8))$
```

(%o1) $f(x) := \frac{2x^2+x+1}{8x}$

(%o8) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$

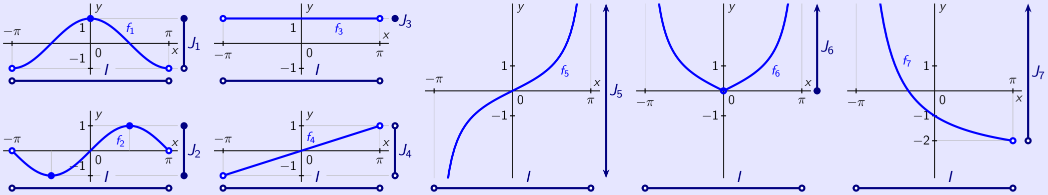
(%o9) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$



08. Spojitost funkce

Pokud je funkce f spojitá na intervalu $I \subset R$, pak množina $f(I)$ je interval.

- $I = \langle a; b \rangle$ je uzavřený interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ je uzavřený interval.
- I není uzavřený interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ může být intervalem libovolného typu.



- $f_1(x) = \cos x$: $(-\pi; \pi) \to J_1 = (-1; 1\rangle$.
- $f_2(x) = \sin x$: $(-\pi; \pi) \to J_2 = \langle -1; 1\rangle$.
- $f_3(x) = 1$: $(-\pi; \pi) \to J_3 = \{1\}$.
- $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_4 = (-1; 1)$.
- $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $(-\pi; \pi) \to J_5 = (-\infty; \infty)$.
- $f_6(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$: $(-\pi; \pi) \to J_6 = \langle 0; \infty)$.
- $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_7 = (-2; \infty)$.

03. Diferenciální počet

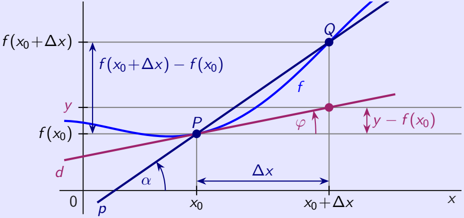
Matematická analýza podporována programem wxMaxima

01. Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafu f.
- Přímka PQ má směrnici $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Tečna k f v bodě P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,

  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ je její směrnice.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ směřuje k tečně).

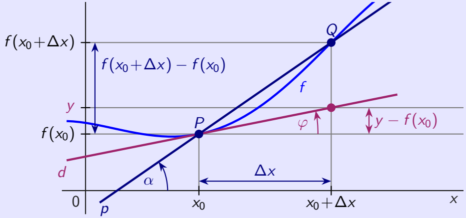
- Tečna má směrnici $\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometrický význam derivace funkce v bodě. – Směrnice tečny.

01. Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafu f.
- Přímka PQ má směrnici $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Tečna k f v bodě P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je její směrnice.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$
  - $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$,
  - $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$,
  - $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ směřuje k tečně).

- Tečna má směrnici $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

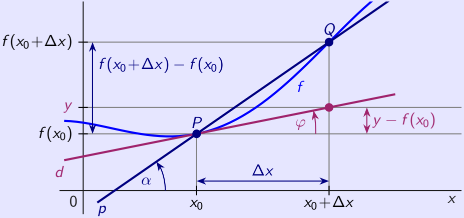
Geometrický význam derivace funkce v bodě. – Směrnice tečny.

01. Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafu f.
- Přímka PQ má směrnici $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Tečna k f v bodě P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,

  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je její směrnice.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ směřuje k tečně).

- Tečna má směrnici $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometrický význam derivace funkce v bodě. – Směrnice tečny.

01. Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **derivaci v bodě** $x_0 \in D(f)$,
označení $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ nebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocí diferenciálů,

pokud existuje • $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ f'(x_0) \in R. & \text{Vlastní (konečná)} \\ \bullet\ f'(x_0) = \infty \text{ aneb } f'(x_0) = -\infty. & \text{Nevlastní (nekonečná)} \end{array}\right\} \text{derivace } f \text{ v bodě } x_0.$$

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bodě x_0.

Spojitost funkce f v bodě x_0 nezaručuje existenci $f'(x_0)$.

Funkce $f\colon y = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

01. Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **derivaci v bodě** $x_0 \in D(f)$,

označení $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ nebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocí diferenciálů,

pokud existuje • $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$

- $f'(x_0) \in R$. Vlastní (konečná)
- $f'(x_0) = \infty$ aneb $f'(x_0) = -\infty$. Nevlastní (nekonečná)

$\Big\}$ derivace f v bodě x_0.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bodě x_0.

Spojitost funkce f v bodě x_0 nezaručuje existenci $f'(x_0)$.

Funkce $f\colon y = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

01. Derivace reálné funkce

$f'(x_0)$ představuje geometricky směrnici tečny ke grafu f v bodě x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Tečna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ se směrnicí $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bodě x_0.
  Tečna d: $x = x_0$ bez směrnice (vertikální).

Vypočteme derivaci funkce $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

01. Derivace reálné funkce

$f'(x_0)$ představuje geometricky směrnici tečny ke grafu f v bodě x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Tečna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ se směrnicí $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bodě x_0.
  Tečna d: $x = x_0$ bez směrnice (vertikální).

Vypočteme derivaci funkce $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1} + x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}$

01. Derivace reálné funkce

V předchozím příkladu jsme vypočítali derivaci $f'(x)$ ale nepodařilo se nám ji přiměřeně zjednodušit. Použijeme příkaz `subst`.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `fp:subst(a,sqrt(x^2+1),f1(x));`

(fp) $\frac{\frac{x}{a}+1}{x+a}$

(%i5) `ratsimp(fp);`

(%o5) $\frac{1}{a}$

(%i6) `subst(sqrt(x^2+1),a,ratsimp(fp));`

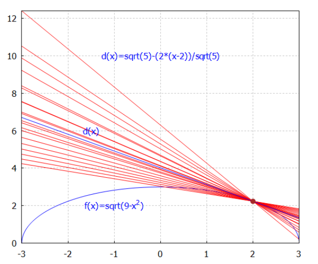
(%o6) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

01. Derivace reálné funkce

Určíme tečnu v bodě 2 k půlkružnici $y = \sqrt{9 - x^2}$.

(%i8)
```
f(x):=sqrt(9-x^2)$ p(a,b):=(f(b)-f(a))/(b-a)$
s(x,a,b):=p(a,b)*(x-a)+f(a)$
S:makelist(explicit(s(x,2,-.15+.25*i),x,-3,3),i,1,20)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$
d(x):=f(2)+subst(2,x,f1(x))*(x-2)$
print("Secant d(x)=",d(x)," in point 2 is a blue")$
draw2d(grid=true,xaxis=true,
color=blue,explicit(f(x),x,-3,3),color=red,S,
color=blue,explicit(d(x),x,-3,3),
point_type=7,color=brown,
points([[2,f(2)]]),
color=blue,label(["d(x)",-1.5,6]),
label(["f(x)=sqrt(9-x^2)",-1,2]),
label([concat("d(x)=",
     string(d(x))),0,10]))$
```

Secant $d(x) = \sqrt{5} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{5}}$ in point 2 is a blue

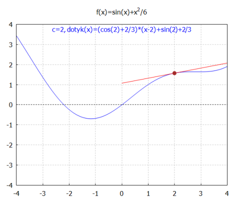


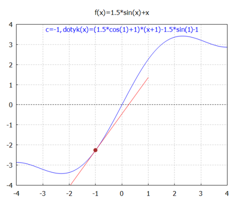
01. Derivace reálné funkce

Sestrojíme tečnu ke grafu funkce f v bodě c.

```
(%i6) c:2$ f(x):=x^2/6+sin(x)$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      d(x):=f(c)+subst(c,x,f1(x))*(x-c)$
      print("Secant y=d(x)=",d(x)," in point",c)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,xrange=[-4,4],
      yrange=[-4,4],color=blue,explicit(f(x),x,-4,4),
      color=red,explicit(d(x),x,c-2,c+2),
      point_type=7,color=brown,points([[c,f(c)]]),
      color=blue,title=concat("f(x)=",string(f(x))),
      label([concat("c=",string(c),",
          d(x)=",string(d(x))),0,3.75]))$
```

Secant $y = d(x) = (\cos(2) + \frac{2}{3})(x - 2) + \sin(2) + \frac{2}{3}$ in point 2





02. Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Nejlepší lokální lineární sbližování.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in D(f)$.

- Aproximace funkce f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 pomocí tečny d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ je nejlepší ze všech saproximací pomocí lineární funkce (přímky).

Vypočtěte přibližně $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nechť $O(1)$ je taková, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Přesně $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

02. Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Nejlepší lokální lineární sbližování.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in D(f)$.

- Aproximace funkce f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 pomocí tečny $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ je nejlepší ze všech saproximací pomocí lineární funkce (přímky).

Vypočtěte přibližně $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nechť $O(1)$ je taková, že $1,06 \in O(1)$.

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1)\cdot(x-1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}.$$

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01.$$

Přesně $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

02. Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Proměnná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.

Aproximace funkce f má smysl pouze pro x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333

$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667

$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333

$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333

$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667

$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5

$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333

$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333

$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

02. Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Proměnná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.
Aproximace funkce f má smysl pouze pro x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

02. Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Vypočtěte přibližně $\sqrt[6]{1,06}$ (jiné řešení).

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1} = (x+1)^{1/6}$, $x > -1$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0) = f(0) = 1$.
- $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.
- Nechť $O(0)$ je taková, že $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x+1} = f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot(x-0) = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(0.06) \approx \frac{0.06+6}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Změníme první příkazy `c:.06`, `f(x):=(x+1)^(1/6)`, `s:0` v předchozím příkladu.

```
(%i9) c:.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$ s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
(%o8) x/6+1
      c = 0.06   f(0.06) = 1.0097588 approx 1.01
```

02. Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Vypočtěte přibližně $\sqrt[6]{1,06}$ (jiné řešení).

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1} = (x+1)^{1/6}$, $x > -1$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0) = f(0) = 1$.
- $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.
- Nechť $O(0)$ je taková, že $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x+1} = f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot(x-0) = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(0.06) \approx \frac{0.06+6}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Změníme první příkazy `c:.06`, `f(x):=(x+1)^(1/6)`, `s:0` v předchozím příkladu.

```
(%i9)  c:.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$ s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
       p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
       h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
       subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x}{6}+1$

$c = 0.06$ $f(0.06) = 1.0097588$ approx 1.01

02. Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Výpočet $f^{(n)}$, $n\in N$ může být obecně velmi pracný.

Funkce $y = x^k$, $x\in R$, kde $k\in N$.

- $[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, $x\in R$ pro $n = 1, 2, \ldots, k$,
  $$[x^k]' = kx^{k-1},\ [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2},\ [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3},\ \ldots,\ [x^k]^{(k)} = k!.$$
- $[x^k]^{(n)} = 0$, $x\in R$ pro $n = k+1, k+2, k+3, \ldots,$
  $$[x^k]^{(k+1)} = [k!]' = 0,\ [x^k]^{(k+2)} = [x^k]^{(k+3)} = [0]' = 0,\ \ldots$$

```
(%i9) f(x,k):=x^k;fn(x,k,n):=diff(f(x,k),x,n)$
      fn(x,k,1);fn(x,k,2);fn(x,k,k);
      fn(x,5,1);fn(x,5,2);fn(x,5,5);fn(x,5,6);
```

(%o1) $f(x,k) := x^k$

(%o3) kx^{k-1}

(%o4) $(k-1)kx^{k-2}$

(%o5) $\frac{d^k}{dx^k}x^k$

(%o6) $5x^4$

(%o7) $20x^3$

(%o8) 120

(%o9) 0

03. Aplikace derivace funkce

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12.$

- $f(x) = x^3 - 8$, $x \in R$, $g(x) = x - 2$, $x \in R$. $O(2)$ můžeme volit libovolně, $O(2) = R$.
- $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 1$ pro $x \in R - \{2\}$.
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12.$
- $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 8) = \lim\limits_{x\to 2} (x - 2) = 0.$

$\Rightarrow$

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12.$

```
(%i9) f(x):=(x^3-8)/(x-2)$
      fc(x):=num(f(x))$ fc(x);fm(x):=denom(f(x))$ fm(x);
      'limit(f(x),x,2); limit(f(x),x,2);
      'limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o3) $x^3 - 8$

(%o5) $x - 2$

(%o6) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

(%o7) 12

(%o8) $3 \lim\limits_{x\to 2} x^2$

(%o9) 12

03. Aplikace derivace funkce

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

```
(%i4)  f(x):=log(x)/x$
       fc(x):=num(f(x))$
       fm(x):=denom(f(x))$
       limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,inf);
(%o4)  0
```

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$

  $= [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$

  $= [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

  $= [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \cdots$

L'Hospitalovo pravidlo nemůžeme použít.

03. Aplikace derivace funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
okolí $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorův polynom stupně n funkce f se středem v bodě x_0 je definován jako

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Pro $x_0 = 0$ se nazývá **Maclaurinův polynom**

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Zbytek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadřuje chybu aproximace f pomocí $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$. (Lagrangeův tvar.)

03. Aplikace derivace funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
okolí $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorův polynom stupně n funkce f se středem v bodě x_0 je definován jako

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Pro $x_0 = 0$ se nazývá **Maclaurinův polynom**

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Zbytek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadřuje chybu aproximace f pomocí $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$. (Lagrangeův tvar.)

03. Aplikace derivace funkce

Vypočítáme Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Ruční derivování je dost pracné.

```
(%i2) f(x):=sqrt(x^2+1)$ print("f(x)=", f(x),
      ", f'(x)=", diff(f(x),x),
      ", f''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,2)),
      ", f'''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,1);
```

$1 + \cdots$

```
(%i4) taylor(f(x),x,0,2);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,3);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i6) taylor(f(x),x,0,4);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$

```
(%i7) taylor(f(x),x,0,18);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \frac{21x^{12}}{1024} + \frac{33x^{14}}{2048} - \frac{429x^{16}}{32768} + \frac{715x^{18}}{65536} + \cdots$

03. Aplikace derivace funkce

Počítáme Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Polynom `tp1` je devátého stupně (prakticky osmého stupně), proto výstup příkazu `coeff(tp1,x,10))` je číslo 0.
- Polynom `tp2` je desátého stupně a výstup příkazu `coeff(tp2,x,10))` je skutečný koeficient $c_{10} = 7/256$.

```
(%i1) f(x):=sqrt(x^2+1)$
(%i2) tp1:taylor(f(x),x,0,9);
```

(tp1) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\cdots$

```
(%i3) print("c_3=",coeff(tp1,x,3),
            ", c_4=",coeff(tp1,x,4),
            ", c_10=",coeff(tp1,x,10))$
```

c_3$=0$, c_4$=-\frac{1}{8}$, c_10$=0$

```
(%i4) tp2:taylor(f(x),x,0,10);
```

(tp2) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\frac{7x^{10}}{256}+\cdots$

```
(%i5) print("c_3=",coeff(tp2,x,3),
            ", c_4=",coeff(tp2,x,4),
            ", c_10=",coeff(tp2,x,10))$
```

c_3$=0$, c_4$=-\frac{1}{8}$, c_10$=\frac{7}{256}$

03. Aplikace derivace funkce

$f(x) = \ln x$, $x \in (0;\infty)$, $x_0 = 1$, $f(1) = 0$, $n \in N$.

- $f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $x > 0$.
- $f^{(2)}(x) = -x^{-2}$, $x > 0$.
- $f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $x > 0$.
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4}$, $x > 0$.

  ...
- $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$, $x > 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

- $f^{(1)}(1) = 1 = 0!$.
- $f^{(2)}(1) = -1 = -1!$.
- $f^{(3)}(1) = 2 \cdot 1 = 2!$.
- $f^{(4)}(1) = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -3!$.
- $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

$\Rightarrow$ • $T_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(x-1)^k}{k}$, $x \in O(1)$.

(%i1) `taylor(log(x),x,1,5);`

(%o1) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots$

(%i2) `taylor(log(x),x,1,8);`

(%o2) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \cdots$

03. Aplikace derivace funkce

Někdy je výhodnější vyjádřit $f(x) = \ln x$ ve tvaru Maclaurinova polynomu.

- $f(x) = \ln x,\ x \in (0; \infty),\ x_0 = 1.$

  $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (x-1)^k}{k},\ x \in O(1),\ n \in N.$

- $x = t + 1,\ f(x) = f(t+1) = \ln(t+1),\ t \in (-1; \infty).$

  $T_n(x) = T_n(t+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (t+1-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot t^k}{k},\ x \in O(1),\ t \in O(0),\ n \in N.$

- Maclaurinův polynom funkce $f(x) = \ln(x+1)$ stupně $n \in N$:

  $T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},\ x \in O(0).$

(%i1) `taylor(log(x+1),x,0,8);`

(%o1) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \cdots$

(%i2) `taylor(log(x),x,1,8);`

(%o2) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \cdots$

(%i3) `taylor(log(x+1),x,1,8);`

(%o3) $\log(2) + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{24} - \frac{(x-1)^4}{64} + \frac{(x-1)^5}{160} - \frac{(x-1)^6}{384} + \frac{(x-1)^7}{896} - \frac{(x-1)^8}{2048} + \cdots$

03. Aplikace derivace funkce

Funkce $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ můžeme pomocí **Maclaurinova polynomu** aproximovat pro všechny $x \in R$. Potřebné přesnosti dosáhneme dostatečně velkým stupněm n.

- $f(x) = e^x,\ x \in R.$
  $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!},\ x \in R,\ n \in N.$
- $f(x) = \sin x,\ x \in R.$
  $T_{2k+1}(x) = 0 + \frac{x}{1!} + 0 + \frac{-x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!},\ x \in R,\ n \in N.$
- $f(x) = \cos x,\ x \in R$
  $T_{2k}(x) = 1 + 0 + \frac{-x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!},\ x \in R,\ n \in N.$

(%i1) `taylor(exp(x),x,0,10);`

(%o1) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

(%i2) `taylor(sin(x),x,0,10);`

(%o2) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \cdots$

(%i3) `taylor(cos(x),x,0,10);`

(%o3) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

03. Aplikace derivace funkce

Najdeme Maclaurinův polynom stupně $n \in N$ funkce $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

- Pokud označíme $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$, $t = x^2$, pak $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} = g(x^2) = g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \geq 0$.
- Pro Maclaurinův polynom $P_n(t)$ funkce $g(t)$, $t \geq 0$ a Maclaurinův polynom $T_{2n}(x)$ funkce $f(x)$, $x \in R$ platí:

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x^2)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = T_{2n}(x).$$

Maclaurinův polynom stupně $2n$ funkce $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$ má tvar

- $T_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$, $x \in R$.

(%i1) `taylor(exp(x^2),x,0,10);`

(%o1) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \cdots$

(%i3) `subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,5));`
`subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,10));`

(%o2) $\frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

(%o3) $\frac{x^{20}}{3628800} + \frac{x^{18}}{362880} + \frac{x^{16}}{40320} + \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

04. Vyšetřování průběhu funkce

Důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce je určení intervalů, na kterých je tato funkce monotónní.

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkce f je na I

- Rostoucí. $\Leftrightarrow$ pro všechny $x \in I$ platí • $f'(x) > 0$.
- Klesající. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) < 0$.
- Neklesající. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \geq 0$.
- Nerostoucí. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \leq 0$.
- Konstantní. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) = 0$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnitřní bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- Funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkce f může mít lokální extrém i v bodě, kde derivace neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenci lokálního extrému funkce f v bodě $x_0 \in D(f)$.

04. Vyšetřování průběhu funkce

Důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce je určení intervalů, na kterých je tato funkce monotónní.

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkce f je na I

- Rostoucí. $\Leftrightarrow$ pro všechny $x \in I$ platí
  - $f'(x) > 0$.
- Klesající. $\Leftrightarrow$
  - $f'(x) < 0$.
- Neklesající. $\Leftrightarrow$
  - $f'(x) \geq 0$.
- Nerostoucí. $\Leftrightarrow$
  - $f'(x) \leq 0$.
- Konstantní. $\Leftrightarrow$
  - $f'(x) = 0$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnitřní bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- Funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. $\Rightarrow$
  - $f'(x_0) = 0$.

- Funkce f může mít lokální extrém i v bodě, kde derivace neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenci lokálního extrému funkce f v bodě $x_0 \in D(f)$.

04. Vyšetřování průběhu funkce

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• Konvexní.	$\Leftrightarrow$	f' je na I	• Neklesající.
	• Konkávní.	$\Leftrightarrow$		• Nerostoucí.
	• Ostře konvexní.	$\Leftrightarrow$		• Rostoucí.
	• Ostře konkávní.	$\Leftrightarrow$		• Klesající.

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f''(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• Konvexní.	$\Leftrightarrow$	pro všechny $x \in I$ platí	• $f''(x) > 0$.
	• Konkávní.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) < 0$.
	• Ostře konvexní.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \geq 0$.
	• Ostře konkávní.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \leq 0$.

Při vyšetřování konvexnosti a konkávnosti funkce f musíme prozkoumat:

- Všechny body $x \in D(f)$, kde je funkce f spojitá a pro které existuje $f''(x) = 0$.
- Všechny body $x \in D(f)$, kde je funkce f spojitá a ve kterých $f''(x)$ neexistuje.

04. Vyšetřování průběhu funkce

Předchozí výsledky můžeme zobecnit.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k-1$, $k \in N$ (liché) .
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f je rostoucí v bodě x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f je klesající v bodě x_0.

  $f(x_0)$ není extrém.
- $n = 2k$, $k \in N$ (sudé).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k+1$, $k \in N$ (liché) .
  - x_0 je inflexní bod funkce f.
- $n = 2k$, $k \in N$ (sudé).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f je ostře konvexní v bodě x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f je ostře konkávní v bodě x_0.

05. Průběh funkce

Vyšetřit prieběh funkce f znamená určit:

- Definiční obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Sudost, lichost, periodicita, případně jiné speciální vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodech nespojitosti, hraničních bodech a v bodech $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na kterých je f kladná a záporná.
- f', stacionární body, lokální a globální extrémy, intervaly, na kterých f roste, klesá a je konstantní.
- f'', inflexní body, intervaly, na kterých je f konvexní a konkávní.
- Asymptoty bez směrnice a asymptoty se směrnicí.
- Obor hodnot $H(f)$ a nastínit graf funkce.

  Graf nám obvykle poskytne nejnázornější představu o průběhu funkce. Při jeho konstrukci využíváme všech zjištěných údajů.

  Mnohokrát jsou ale nedostatečné, proto je musíme doplnit vhodně zvolenými funkčními hodnotami.

05. Průběh funkce

Průběh funkce $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{8x-16}{x^2}$.

(%i1) `f(x):=(8*x-16)/x^2;`

(%o1) $f(x) := \frac{8x-16}{x^2}$

- $D(f) = R - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

  Pomocí příkazu `denom` (denominator) zjistíme, kdy je jmenovatel nulový.

(%i3) `fm:denom(f(x));solve(fm=0,x);`

(fm) x^2

(%o3) $[x = 0]$

- f není periodická, f není sudá, f není lichá.
- f je spojitá na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, je nespojitá v bodě 0.

05. Průběh funkce

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right) = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0.$

```
(%i5) limit(f(x),x,minf);limit(f(x),x,inf);
(%o4) 0
(%o5) 0
```

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty.$

```
(%i7) limit(f(x),x,0,minus);limit(f(x),x,0,plus);
(%o6) −∞
(%o7) −∞
```

- Bod $x = 0$ je neodstranitelný bod nespojitosti II. typu.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice.

05. Průběh funkce

- $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = 0. \Leftrightarrow 8x - 16 = 0. \Leftrightarrow x = 2.$
  Příkazem `num` (numerator) zjistíme, kdy je čitatel nulový.

(%i9) `fc:num(f(x));solve(fc=0,x);`
(fc) $8x - 16$
(%o9) $[x = 2]$

- $f(2) = 0.$
- f není definována v bodě $x = 0.$
- Funkce f nemění znaménko na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$.
- Stačí vybrat libovolné body z daných intervalů a ověřit jejich hodnoty (např. -1, 1, 3).

(%i13) `f(2);f(-1);f(1);f(3);`
(%o10) 0
(%o11) -24
(%o12) -8
(%o13) $\frac{8}{9}$

05. Průběh funkce

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f(-1) = -24 < 0.$ $\Rightarrow$ • $f(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 2)$, $f(1) = -8 < 0.$ $\Rightarrow$ • $f(x) < 0$ pro $x \in (0; 2)$.
- $3 \in (2; \infty)$, $f(3) = \frac{8}{9} > 0.$ $\Rightarrow$ • $f(x) > 0$ pro $x \in (2; \infty)$.

- $f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x-8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i15) f1(x):=diff(f(x),x,1)$
       ratsimp(f1(x));
```
(%o15) $-\frac{8x-32}{x^3}$

- $f'(x) = \frac{32-8x}{x^3} = 0. \Leftrightarrow 32 - 8x = 0. \Leftrightarrow x = 4.$

```
(%i16) solve(f1(x)=0,x);
```
(%o16) $[x = 4]$

05. Průběh funkce

- f' je nespojitá v bodě 0.

```
(%i18) f1m:denom(ratsimp(f1(x)));solve(f1m=0,x);
```

(f1m) x^3

(%o18) $[x = 0]$

- $f'(4) = 0$.
- f' není definována v bodě $x = 0$.
- Funkce f' nemění znaménko na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$, $(4; \infty)$.
- Stačí vybrat libovolné body z daných intervalů a ověřit jejich hodnoty (např. -1, 1, 5).

```
(%i22) subst(4,x,f1(x));
       subst(-1,x,f1(x));subst(1,x,f1(x));subst(5,x,f1(x));
```

(%o19) 0

(%o20) -40

(%o21) 24

(%o22) $-\frac{8}{125}$

05. Průběh funkce

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f'(-1) = -40 < 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) < 0$, f je klesající pro $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 4)$, $f'(1) = 24 > 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) > 0$, f je rostoucí pro $x \in (0; 4)$.
- $5 \in (4; \infty)$, $f'(5) = -\frac{8}{125} < 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) < 0$, f je klesající pro $x \in (4; \infty)$.

- f má lokální maximum v bodě $x = 4$ a také globální maximum $f(4) = 1$.

```
(%i23) f(4);
(%o23) 1
```

- f nemá lokální ani globální minimum.
- $f''(x) = \left[\frac{32-8x}{x^3}\right]' = \frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6} = \frac{16x^3-96x^2}{x^6} = \frac{16x-96}{x^4}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i25) f2(x):=diff(f(x),x,2)$ ratsimp(f2(x));
```
(%o25) $\frac{16x-96}{x^4}$

05. Průběh funkce

- $f''(x) = \frac{16x-96}{x^4} = 0. \Leftrightarrow 16x - 96 = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

```
(%i26) solve(f2(x)=0,x);
```
(%o26) $[x = 6]$

- f'' je nespojitá v bodě 0.

```
(%i28) f2m:denom(ratsimp(f2(x)));solve(f2m=0,x);
```
(f2m) x^4
(%o28) $[x = 0]$

- $f''(6) = 0.$
- f'' není definována v bodě $x = 0$.
- Funkce f'' nemění znaménko na intervalech $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; \infty)$.
- Stačí vybrat libovolné body z daných intervalů a ověřit jejich hodnoty (např. -1, 1, 7).

05. Průběh funkce

```
(%i32) subst(6,x,f2(x));
       subst(-1,x,f2(x));subst(1,x,f2(x));subst(7,x,f2(x));
```
(%o29) 0
(%o30) -112
(%o31) -80
(%o32) $\frac{16}{2401}$

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f''(-1) = -112 < 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) < 0$, f je konkávní pro $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 6)$, $f''(1) = -80 < 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) < 0$, f je konkávní pro $x \in (0; 6)$.
- $7 \in (6; \infty)$, $f''(7) = \frac{16}{2401} > 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) > 0$, f je konvexní pro $x \in (6; \infty)$.

- $x = 6$ je inflexní bod funkce f.

```
(%i33) f(6);
```
(%o33) $\frac{8}{9}$

05. Průběh funkce

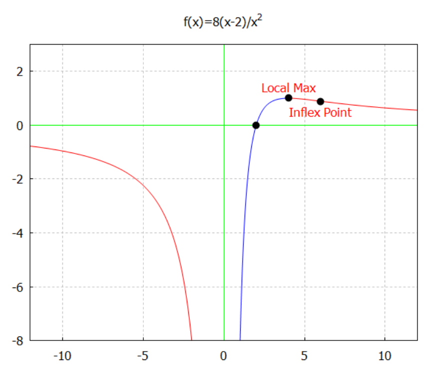
- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = 0 - 0 = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0\cdot x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$
- $y = kx + q = 0\cdot x + 0 = 0$, tj. $y = 0$ je asymptota se směrnicí (horizontální).

```
(%i35) km:limit(f(x)/x,x,minf);
       qm:limit(f(x)-km*x,x,minf);
(km)   0
(qm)   0
(%i37) kp:limit(f(x)/x,x,inf);
       qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf);
(kp)   0
(qp)   0
```

- $H(f) = (-\infty; 1\rangle.$

05. Průběh funkce

```
(%i38) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-12,12],yrange=[-8,3],title="f(x)=8(x-2)/x^2",
       color=blue,explicit(f(x),x,0,4),
       color=red,explicit(f(x),x,-12,0),explicit(f(x),x,4,12),
       label(["Inflex Point",6,f(6)-.4],
       ["Local Max",4,f(4)+.4]),
       color=green,
       parametric(0,t,t,-8,3),
       parametric(t,0,t,-12,12),
       color=black,point_type=7,
       points([[4,f(4)],
       [6,f(6)],
       [2,f(2)]]))$
```



04. Neurčitý integrál

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

01. Základní pojmy

Všechny primitivní funkce k dané funkci $f(x)$, $x \in I$ na intervalu I se liší od sebe pouze konstantou a tvoří množinu $\{F(x) + c, c \in R\}$, přičemž F je libovolná primitivní funkce. Tato množina se nazývá **neurčitý integrál funkce** f **na intervalu** I a označuje se

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervalu I.

$\Rightarrow$ • Existuje $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

K integrování se používá příkaz `integrate`.

```
(%i1) 'integrate(1/(1+x^2),x)
```

(%o1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

01. Základní pojmy

(%i1) `f(x):=1/(1-x^2); integrate(f(x),x);`

(%o1) $\frac{1}{1-x^2}$

(%o2) $\frac{\log(x+1)}{2} - \frac{\log(x-1)}{2}$

- Derivování a integrování jsou inverzní operace na intervalu I.

Funkce F je primitivní k funkci f na intervalu I, $c \in R$.

pro všechny $x \in I$ platí:

- $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$
- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$

(%i1) `integrate(1/(1+x^2),x);`

(%o1) $\operatorname{atan} x$

(%i2) `diff(%,x);`

(%o2) $\frac{1}{x^2+1}$

01. Základní pojmy

- $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c,\ x \in R - \{k\pi,\ k \in Z\},\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c,$
  $\displaystyle x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\},\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3} \, dx = \int x^{\frac{3}{5}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \geq 0,\ c \in R.$

(%i1) `integrate(cot(x),x);`
(%o1) $\log(\sin x)$
(%i2) `integrate(tan(x),x);`
(%o2) $\log(\sec x)$
(%i3) `trigsimp(%);`
(%o3) $-\log(\cos x)$
(%i4) `integrate((x^3)^(1/5),x);`
(%o4) $\dfrac{5x^{5/8}}{8}$

01. Základní pojmy

- $$\int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c = \frac{x\cdot x}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{pro } x \geq 0, \\ \displaystyle\int (-x)\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c = \frac{x\cdot(-x)}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{x\,|x|}{2} + c,\ x \in R,\ c \in R.$

```
(%i1) integrate(abs(x),x);
```

(%o1) $\frac{x\,|x|}{2}$

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c,\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).$ (tabulkový integrál).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2-1),x);
```

(%o1) $\log\left(2\sqrt{x^2-1} + 2x\right)$

02. Metody integrování

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c,\ x \in R.$ (tabulkový integrál).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2+1),x);
(%o1) asinh x
```

- Oba výsledky jsou správné, protože argument sinus hyperbolický je definován jako $y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in R$ (viz elementární funkce).

Metoda rozkladu.

Funkce F, G jsou primitivní k funkcím f, g na intervalu I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$.

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitivní k funkci $af + bg$ na intervalu I a platí:

- $\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx = aF(x) + bG(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- V praxi píšeme přímo $\int [af(x) + bg(x)]\, dx = aF(x) + bG(x) + c.$

02. Metody integrování

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right]\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$
  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left[x - 2 + \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \left[2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

(%i1) `integrate(1/(sin(x)^2*cos(x)^2),x);`

(%o1) $\tan x - \frac{1}{\tan x}$

(%i2) `integrate((x-1)^2/x,x);`

(%o2) $\log x + \frac{x^2-4x}{2}$

(%i3) `integrate(2*cos(x)+x^3+3/(x^2+1),x);`

(%o3) $2\sin x + 3\operatorname{atan} x + \frac{x^4}{4}$

02. Metody integrování

Metoda per partes.

Funkce u, v mají spojité derivace u', v' na intervalu I.

$$\Rightarrow \quad \bullet \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

$$\bullet\ [uv]' = u'v + uv'. \Rightarrow \quad \bullet\ uv = \int [uv]' = \int u'v + \int uv'. \Rightarrow \quad \bullet \int uv' = uv - \int u'v.$$

- Metodu per partes můžeme použít několikrát za sebou, ale musíme dávat pozor, abychom se opětovným použitím nevrátili k původnímu integrálu.
- Metoda per partes se používá poměrně často. Je vhodná k integrování funkcí

$$P(x)\,\mathrm{e}^{ax}, \quad P(x)\cos ax, \quad P(x)\sin ax, \quad P(x)\ln Q(x), \quad P(x)\operatorname{arctg} Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou reálné polynomy, $a \in R$, $a \neq 0$.

- $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

02. Metody integrování

- $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{0+2x}{1+x^2}\,dx$
  $\displaystyle= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln \left|1 + x^2\right| + c = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2} + c,\ x \in R,\ c \in R.$
- $\displaystyle\int x \sin x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = -x \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cos x + \sin x + c,$
  $x \in R,\ c \in R.$
- $\displaystyle\int x \cos x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

```
(%i1) u:x; v:integrate(cos(x),x);
(u)   x
(v)   sin x
(%i3) u*v-integrate(v,x);
(%o3) x sin x + cos x
(%i4) integrate(x*cos(x),x);
(%o4) x sin x + cos x
```

02. Metody integrování

- $I_n = \int x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n\,\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^n\,\mathrm{e}^x - nI_{n-1},\ n \in N.$

$\Rightarrow$
- $I_0 = \int x^0\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$
- $I_1 = x\,\mathrm{e}^x - I I_0 = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,$
- $I_2 = x^2\,\mathrm{e}^x - 2I I_1 = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\left[x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right] + c = x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + c,$
- $I_3 = x^3\,\mathrm{e}^x - 3I I_2 = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\left[x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x\right] + c = x^3\,\mathrm{e}^x - 3x^2\,\mathrm{e}^x + 6x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x + c.$

```
(%i1) I(n,x):=integrate(x^n*exp(x),x)$
      I(0,x); I(1,x); I(2,x); I(3,x); I(4,x); I(5,x);
```

(%o2) e^x

(%o3) $(x-1)\,\mathrm{e}^x$

(%o4) $(x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^x$

(%o5) $(x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x$

(%o6) $(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)\,\mathrm{e}^x$

(%o7) $(x^5-5x^4+20x^3-60x^2-120x+120)\,\mathrm{e}^x$

02. Metody integrování

Metoda substituce.

Funkce F je primitivní k funkci f na intervalu I,

$x = \varphi(t)$ má derivaci na intervalu J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi(t)\big)$ je primitivní k funkci $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J a platí:

- $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c,\ t \in J,\ c \in R.$

I, J jsou intervaly, $x = \varphi(t) : J \to I$ má derivaci $\varphi'(t) \neq 0$ na J,

funkce $F(t)$ je primitivní k $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I a platí:

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- V prvním případě nemusíme použít inverzní substituci,
  ale v druhém případě musíme použít inverzní substituci $t = \varphi^{-1}(x)$.

02. Metody integrování

- $\displaystyle\int \sin^3 t \cos t \,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in R \\ \mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c,\ t \in R,\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } t = f(x) \\ \mathrm{d}t = f'(x) \,\mathrm{d}x \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c,\ x \in D(f),\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(t)}{f(t)} \,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = f(t) \\ \mathrm{d}x = f'(t) \,\mathrm{d}t \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c = \ln|f(t)| + c,\ t \in D(f),\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{x^3+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 + 1 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 3x^2 \,\mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + c = \frac{1}{3} \ln\left|x^3 + 1\right| + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{x^6+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 3x^2 \,\mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{x^6-1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 & x \in R - \{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 3x^2 \,\mathrm{d}x & t \in R - \{\pm 1\} \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|,$
  $x \in R - \{\pm 1\},\ c \in R.$

02. Metody integrování

- $\displaystyle\int e^{5x}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } 5x = t & x \in R \\ 5\,dx = dt & t \in R \end{array}\right]$

$$= \int e^t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int e^t\,dt = \frac{1}{5}\,e^t + c = \frac{1}{5}\,e^{5x} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Provést substituci t ve wxMaxima znamená:

- Zvolíme substituci a použijeme `diff` k vytvoření rozdílu dt (označení `del(t)`), pak vyjádříme dx pomocí dt použitím příkazu `solve`.
- Vyjádříme výsledek rovnice pomocí `%[1]` a nahradíme `del(x)` pomocí `dĕl(t)` v integrandě.
- Použijeme `subst` k transformaci celého integrandu s proměnnou t a pak vypočteme integrál nezapomínaje na to, že se očekává pouze koeficient `del(t)`.
- Do výsledného integrálu dosadíme za t hodnotu x.

02. Metody integrování

```
(%i1) INTEGRAND:(%e^(5*x))*diff(x);
```

(%o1) $e^{5x}\,\mathrm{del}(x)$

```
(%i2) solve(diff(t)=diff(5*x),del(x));
```

(%o2) $[\mathrm{del}(x) = \frac{\mathrm{del}(t)}{5}]$

```
(%i3) %[1];
```

(%o3) $\mathrm{del}(x) = \frac{\mathrm{del}(t)}{5}$

```
(%i5) subst(rhs(%),del(x),INTEGRAND)$ subst(t,5*x,%);
```

(%o5) $\frac{e^{t}\,\mathrm{del}(t)}{5}$

```
(%i6) integrate(coeff(%,del(t)),t);
```

(%o6) $\frac{e^{t}}{5}$

```
(%i7) subst(5*x,u,%);
```

(%o7) $\frac{e^{5x}}{5}$

```
(%i8) integrate(%e^(5*x),x);
```

(%o8) $\frac{e^{5x}}{5}$

02. Metody integrování

- $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

- $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

(Rovnice s integrálem jako neznámým parametrem.)

$$\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x + 2c. \Rightarrow$$

- $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x > 0,\ c \in R.$$

$f(x)$ má na intervalu I primitivní funkci $F(x)$, reálné číslo $a, b \in R$, $a \neq 0$.

- $$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{rr} \text{Subst.} & x = at + b \\ & dx = a\,dt \end{array} \right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c.$$

- $$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{rr} \text{Subst.} & x = t + b \\ & dx = dt \end{array} \right] = \int f(x)\,dx = F(x) + c = F(t+b) + c \text{ pro } a = 1.$$

- $$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{rr} \text{Subst.} & x = -t \\ & dx = -dt \end{array} \right] = -\int f(x)\,dx = -F(x) + c = -F(-t) + c \text{ pro } a = -1.$$

05. Určitý integrál

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

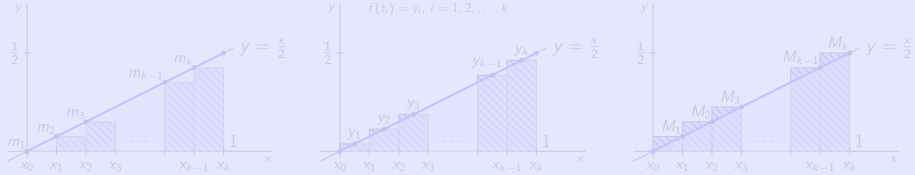
01. Základní pojmy

- Při vyšetřování riemannovsky integrovatelné funkce f na $\langle a; b\rangle$, nepotřebujeme každé dělení $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí se omezit na **normální posloupnosti dělení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. pro které platí $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Potom pro každou volbu bodů T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_H(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (další strana).

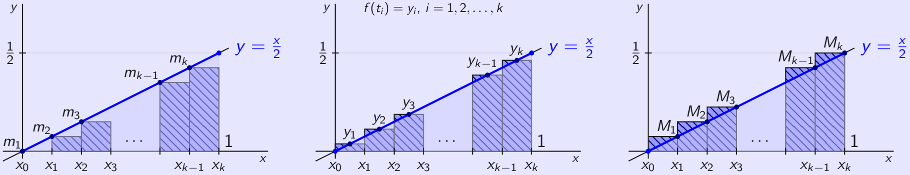
01. Základní pojmy

- Při vyšetřování riemannovsky integrovatelné funkce f na $\langle a; b\rangle$, nepotřebujeme každé dělení $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí se omezit na **normální posloupnosti dělení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. pro které platí $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

  Potom pro každou volbu bodů T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



$S_D(f, D_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k\cdot k} = \frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f, D_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k\cdot k} = \frac{1}{4}$ $\quad S_H(f, D_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{i}{2k\cdot k} = \frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}$ (další strana).

01. Základní pojmy

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}.$ Funkce $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0;1\rangle$ je rostoucí, spojitá, $f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

- Normální posloupnost dělení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, přičemž $D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}$ pro $k \in N$.
- Pro $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$.

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2} = \frac{\frac{(0+k-1)k}{2}}{2k^2} = \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4k}.$$

$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k^2} = \frac{\frac{(1+k)k}{2}}{2k^2} = \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4}.$$

- zvolme $T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ jako středy intervalů $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$,
  tj. $t_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{k} + \frac{i}{2}\right) = \frac{2i-1}{2k}$, pak $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$ a platí

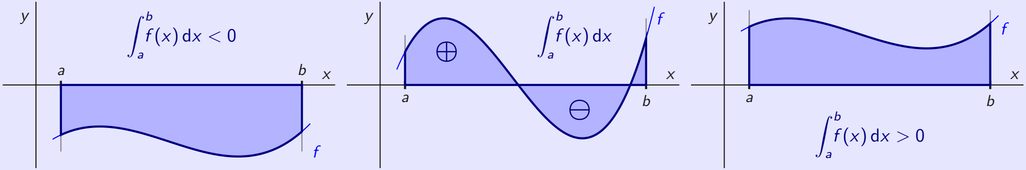
$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2} = \frac{\frac{(1+2k-1)k}{2}}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

02. Základní vlastnosti

- Geometricky představuje Riemannův určitý integrál na intervalu $\langle a; b\rangle$ plochu křivočarého lichoběžníku určenou funkcí f a intervalem $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (tj. pro f záporné) je tato oblast záporná.



Funkce $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

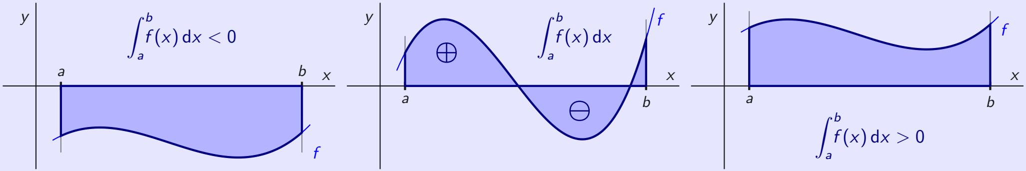
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Pokud $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, pak i $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

02. Základní vlastnosti

- Geometricky představuje Riemannův určitý integrál na intervalu $\langle a; b\rangle$ plochu křivočarého lichoběžníku určenou funkcí f a intervalem $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (tj. pro f záporné) je tato oblast záporná.



Funkce $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Pokud $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, pak i $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

02. Základní vlastnosti

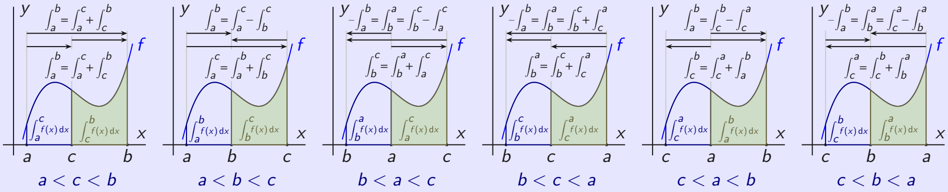
Funkce $f, g \in R_{\langle a;b \rangle}$.

- $f(x) \geq 0$ pro všechny $x \in \langle a; b \rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- $g(x) \geq f(x)$ pro všechny $x \in \langle a; b \rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Additivnost integrálu.

Funkce $f \in R_{\langle I;\text{jméno} \rangle}$, $I \subset R$ je ohraničený interval, body $a, b, c \in I$ jsou libovolné.

$\Rightarrow$ • $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Aditivnost Riemanova integrálu můžeme ilustrovat na vektorech.

03. Metody integrování

Výpočet Riemanova integrálu (Newton-Leibnizův vzorec).

Funkce $f \in R_{\langle a;b \rangle}$, funkce F je primitivní k funkci f na $\langle a; b \rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

03. Metody integrování

Výpočet Riemanova integrálu (Newton-Leibnizův vzorec).

Funkce $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkce F je primitivní k funkci f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

03. Metody integrování

(%i2) `f(x):=x^2$ F:integrate(f(x),x);`

(F) $\frac{x^3}{3}$

(%i3) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o3) $\frac{2}{3}$

(%i4) `subst(1,x,F)-subst(-1,x,F);`

(%o4) $\frac{2}{3}$

(%i5) `float(subst(1,x,F)-subst(-1,x,F));`

(%o5) 0.6666666666666666

(%i6) `float(integrate(f(x),x,-1,1));`

(%o6) 0.6666666666666666

(%i7) `bfloat(integrate(f(x),x,-1,1));`

(%o7) $6.666666666666667b-1$

03. Metody integrování

```
(%i2) f(x):=cos(x)*sin(x)$ F:integrate(f(x),x);
```

(F) $-\frac{\cos x^2}{2}$

```
(%i3) integrate(f(x),x,1,2);
```

(%o3) $\frac{\cos 1^2}{2} - \frac{\cos 2^2}{2}$

```
(%i4) subst(2,x,F)-subst(1,x,F);
```

(%o4) $\frac{\cos 1^2}{2} - \frac{\cos 2^2}{2}$

```
(%i5) float(integrate(f(x),x,1,2));
```

(%o5) 0.05937419607911741

```
(%i6) float(subst(2,x,F)-subst(1,x,F));
```

(%o6) 0.05937419607911741

```
(%i7) bfloat(subst(2,x,F)-subst(1,x,F));
```

(%o7) $5.937419607911738b-2$

03. Metody integrování

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1}=\ln 1-\ln 1=0 \quad (?!?).$
- Funkce $\frac{1}{x}$ není definována v bodě 0.
- Funkce $\frac{1}{x}$ není omezena na intervalech $\langle -1;0)$ a $(0;1\rangle$.
- V tomto smyslu integrál nemůžeme vypočítat.

(%i2) `f(x):=1/x$ F:integrate(f(x),x);`

(F) $-\log x$

(%i3) `integrate(f(x),x,-1,1);`

`Principal Value`

(%o3) 0

(%i4) `subst(1,x,F)-subst(-1,x,F);`

(%o4) $-\log(-1)$

03. Metody integrování

- Určité integrály se obecně počítají pomocí neurčitých integrálů.
- Metodu per partes a substituční metody můžeme upravit a přímo pomocí nich vypočítat určitý integrál.

  Po substituci se nemusíme vracet k původním proměnným.

Metoda per partes.

$u, u', v, v' \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = \Big[-4\pi^2\cdot 1 + 0^2\cdot 1\Big] + \Big[2x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= -4\pi^2 + \Big[4\pi\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0\Big] - \Big[-2\cos x\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 - \Big[-2\cdot 1 + 2\cdot 1\Big] = -4\pi^2.$$

03. Metody integrování

Metoda substituce. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicemi a, b, J je interval s hranicemi α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Můžeme použít oběma směry.)

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ pro všechny } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $\displaystyle\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

03. Metody integrování

Metoda substituce. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicemi a, b, J je interval s hranicemi α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Můžeme použít oběma směry.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ pro všechny } t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2t\right] dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \quad\mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

03. Metody integrování

Metoda substituce. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicemi a, b, J je interval s hranicemi α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$ (Můžeme použít oběma směry.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ pro všechny } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1+\cos 2t\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \tfrac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

04. Integrování sudých a lichých funkcí

$a \in R,\ m, n \in N,\ m \neq n.$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4n}\right] = \left[\pi - 0 - 0 + 0\right] = \pi.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left[\frac{2\pi}{2} + \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4n}\right] = \left[\pi + 0 - 0 - 0\right] = \pi.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{\sin(m-n)2\pi}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)2\pi}{2(m+n)} - \frac{\sin 0}{2(m-n)} + \frac{\sin 0}{2(m+n)}\right] = 0.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

04. Integrování sudých a lichých funkcí

(%i1) `f(x,n):=sin(n*x)^2;`

(%o1) $f(x,n) : \sin(nx)^2$

(%i2) `integrate(f(x,n),x,0,2*%pi);`

(%o2) $-\frac{\sin(4\pi n)-4\pi n}{4n}$

(%i3) `integrate(f(x,n),x,a+0,a+2*%pi);`

(%o3) $\frac{\sin(2an)-2an}{4n}-\frac{\sin((2a+4\pi)n)+(-2a-4\pi)n}{4n}$

(%i4) `ratsimp(%o3);`

(%o4) $-\frac{\sin((2a+4\pi)n)-\sin(2an)-4\pi n}{4n}$

(%i5) `integrate(f(x,4),x,0,2*%pi);`

(%o5) π

(%i6) `integrate(f(x,4),x,a+0,a+2*%pi);`

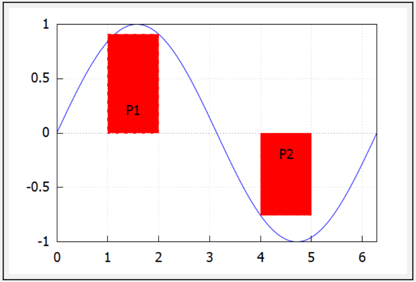
(%o6) $\frac{\sin(8a)-8a}{16}-\frac{\sin(8a)-8a-16\pi}{16}$

(%i7) `ratsimp(%);`

(%o8) π

04. Integrování sudých a lichých funkcí

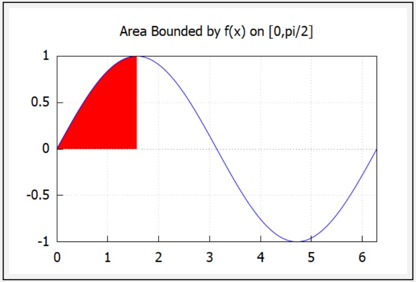
```
(%i1) f(x):=sin(x)$
      wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      color=blue, explicit(f(x),x,0,2*%pi),border=false,
      rectangle([1,0],[2,f(2)]),color=black,
      label(["P1",1.5,0.2]),
      rectangle([4,f(4)],[5,0]),color=black,
      label(["P2",4.5,-0.2]));
```



04. Integrování sudých a lichých funkcí

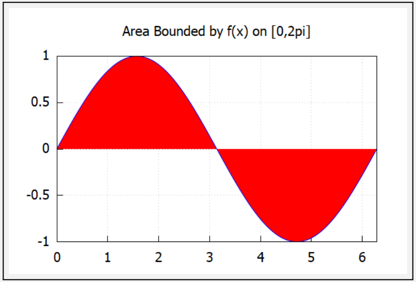
- Připomeňme, že $\int_a^b f(x)\,dx$ určuje oblast ohraničenou $f(x)$ a osou x.

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$
wxdraw2d(grid=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
xaxis=true,yaxis=true,
title="Area Bounded by f(x) on [0,pi/2]",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(0,x,0,%pi/2),filled_func=false,
color=blue,explicit(f(x),x,0,2*%pi));
```



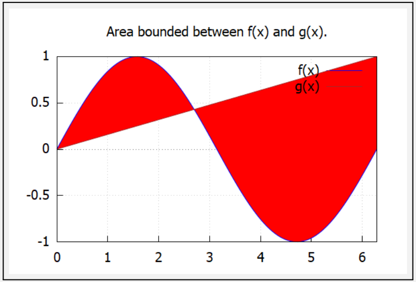
04. Integrování sudých a lichých funkcí

```
(%i1) f(x):=sin(x)$
      wxdraw2d(grid=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
      xaxis=true,yaxis=true,
      title="Area Bounded by f(x) on [0,2pi]",
      fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
      explicit(0,x,0,2*%pi),filled_func=false,
      color=blue,explicit(f(x),x,0,2*%pi));
```



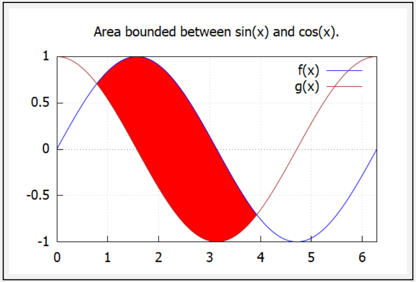
04. Integrování sudých a lichých funkcí

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$ g(x):=x/(2*%pi)$
wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
title="Area bounded between f(x) and g(x).",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(g(x),x,0,2*%pi),
filled_func=false,color=blue,key="f(x)",
explicit(f(x),x,0,2*%pi),color=brown,key="g(x)",
explicit(g(x),x,0,2*%pi));
```



04. Integrování sudých a lichých funkcí

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$ g(x):=cos(x)$
wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
title="Area bounded between sin(x) and cos(x).",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(g(x),x,%pi/4,5*%pi/4),
filled_func=false,color=blue,key="f(x)",
explicit(f(x),x,0,2*%pi),color=brown,key="g(x)",
explicit(g(x),x,0,2*%pi));
```



Děkuji za pozornost.

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

beerb@frcatel.fri.uniza.sk