Matematická analýza podporována programem wxMaxima

Rudolf Blaško
Žilinská univerzita v Žilině

Project: Innovative Open Source Courses for Computer Science

31. 5. 2021

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Obsah

Innovative Open Source Courses for Computer Science

This teaching material was written as one of the outputs of the project
“Innovative Open Source Courses for Computer Science”,
funded by the Erasmus+ grant no. 2019-1-PL01-KA203-065564.
The project is coordinated by West Pomeranian University of Technology in Szczecin (Poland)
and is implemented in partnership with Mendel University in Brno (Czech Republic)
and University of Žilina (Slovak Republic).
The project implementation timeline is September 2019 to December 2022.

Innovative Open Source Courses for Computer Science

Project was implemented under the Erasmus+.
Project name: "Innovative Open Source courses for Computer Science curriculum"
Project no.: 2019-1-PL01-KA203-065564
Key Action: KA2 – Cooperation for innovation and the exchange of good practices
Action Type: KA203 – Strategic Partnerships for higher education

Consortium: Zachodniopomorski uniwersytet technologiczny w Szczecinie
Mendelova univerzita v Brně
Žilinská univerzita v Žiline

Erasmus+ Disclaimer: This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

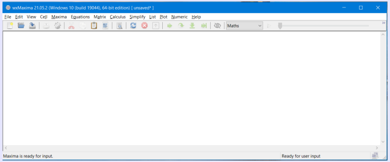
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Úvod do wxMaxima

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

Základní pojmy

- wxMaxima je dialogové rozhraní pro systém počítačové algebry Maxima.
- wxMaxima je distribuován pod licencí GPL.
- Program lze zkompilovat v různých OS (Windows, GNU/Linux, MacOS X, ...).
- xMaxima je grafické rozhraní pro Maxima napsané v Tcl/Tk.
- Maxima patří mezi Open Source programy s otevřeným zdrojovým kódem.
- Předkompilovaný program pro GNU/Linux a Windows je k dispozici zdarma na webové stránce SourceForge `https://sourceforge.net/projects/maxima/files/`.
- Po spuštění prostředí wxMaxima se na obrazovce objeví okno s menu v horní části.
- Pod menu se nachází prostor, kde můžeme zadávat příkazy a kde se zobrazují výstupy.



Základní pojmy

- Příkazy zadáváme na samostatné řádky (vstupní řádky).

  Jejich realizace je zajištěna současným stisknutím kláves Shift a Enter nebo kliknutím v menu na ikonu ➡ (Send the current cell to maxima).

- Vstupní řádky jsou uvedeny jako (%i1).
- Výstupní řádky jsou uvedeny jako (%o1).
- Čísla pro vstupní řádek a příslušný výstupní řádek jsou stejná a na základě nich se můžeme odvolávat na obsahy těchto řádků.

```
(%i1) First input line.
(%o1) First output line.
(%i2) Second input line.
(%o2) Second output line.
```

Základní pojmy

- Příkazy se provádějí na nových samostatných řádcích (výstupních řádcích).
- Příkazy na vstupních řádcích mohou být ukončeny symbolem ; nebo symbolem $, který potlačuje zobrazení příslušného výstupu.

```
(%i1) solve(0=x+2,x);
(%o1) [x = -2]
(%i2) %i1;
(%o2) solve(0 = x + 2, x)
(%i3) %o1;
(%o3) [x = -2]
```

Základní pojmy

Výstup můžeme uložit v různých tvarech a následně použít v jiných programech.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Výstup (%o3) z předchozího okna můžeme:

- Kopírovat pomocí `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovat jako text (lze použít např. pro editor rovnic MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovat jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovat jako MathML, obrázek, RTF, SVG...

Prostředí wxMaxima má dobře propracovaný help pro uživatele, který najdete v menu `Help`. Help otevřeme i stisknutím klávesy `F1`.

Návod najdeme i na stránce `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základní pojmy

Výstup můžeme uložit v různých tvarech a následně použít v jiných programech.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup (%o3) z předchozího okna můžeme:

- Kopírovat pomocí `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovat jako text (lze použít např. pro editor rovnic MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovat jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovat jako MathML, obrázek, RTF, SVG...

Prostředí wxMaxima má dobře propracovaný help pro uživatele, který najdete v menu `Help`. Help otevřeme i stisknutím klávesy `F1`.

Návod najdeme i na stránce
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základní pojmy

Výstup můžeme uložit v různých tvarech a následně použít v jiných programech.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Výstup (%o3) z předchozího okna můžeme:

- Kopírovat pomocí `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovat jako text (lze použít např. pro editor rovnic MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovat jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovat jako MathML, obrázek, RTF, SVG...

Prostředí wxMaxima má dobře propracovaný help pro uživatele, který najdete v menu `Help`. Help otevřeme i stisknutím klávesy `F1`.

Návod najdeme i na stránce
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základní příkazy

- Pomocí `apropos` zjistíme přesný název příkazu pomocí části jeho názvu.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

- Příkaz `describe` vypíše popis zadaného příkazu.

```
(%i1) describe(plot2d)$
      -- Function: plot2d
      plot2d (<expr><,<range_x><,<options><)
      plot2d (<expr_<>=<expr_<>,<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([parametric,<expr_x><,<expr><_y,<range><],<options><)
      plot2d ([discrete,<points><],<options><)
      plot2d ([contour,<expr><],<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([<type_<>,...,<type_n><],<options><)
      There are 5 types of plots that can be plotted by 'plot2d':
            1. Explicit functions. 'plot2d' ...
      ...
```

Základní příkazy

- Výrazy se zadávají pomocí běžných znaků operací, relací a funkcí.
- Argumenty funkcí a příkazů jsou v závorkách.
- Symbol násobení `*` musí být zadán!
- Umocnění se zadává znakem `^` nebo dvojicí `**`.
- Symbol `:` se používá k přiřazení hodnoty napravo do výrazu nalevo.
- Následující příkazy řeší rovnici $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou proměnnou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocí příkazu `kill` můžeme z paměti odstranit proměnné se všemi jejich přiřazeními a vlastnostmi.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Základní příkazy

- Výrazy se zadávají pomocí běžných znaků operací, relací a funkcí.
- Argumenty funkcí a příkazů jsou v závorkách.
- Symbol násobení `*` musí být zadán!
- Umocnění se zadává znakem `^` nebo dvojicí `**`.
- Symbol `:` se používá k přiřazení hodnoty napravo do výrazu nalevo.
- Následující příkazy řeší rovnici $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou proměnnou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocí příkazu `kill` můžeme z paměti odstranit proměnné se všemi jejich přiřazeními a vlastnostmi.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Základní příkazy

- Výrazy se zadávají pomocí běžných znaků operací, relací a funkcí.
- Argumenty funkcí a příkazů jsou v závorkách.
- Symbol násobení `*` musí být zadán!
- Umocnění se zadává znakem `^` nebo dvojicí `**`.
- Symbol `:` se používá k přiřazení hodnoty napravo do výrazu nalevo.
- Následující příkazy řeší rovnici $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou proměnnou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocí příkazu `kill` můžeme z paměti odstranit proměnné se všemi jejich přiřazeními a vlastnostmi.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Základní příkazy

- V menu View a podmenu Display equations můžeme změnit zobrazení výstupních řádků na tvary in 2D (implicitní tvar), as 1D ASCII +nebo as ASCII Art.
- Nastavení výstupu můžete změnit také příkazem `set_display`.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$
```

(%o1) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ /* in 2D */

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
```

(%o1) $x/\mathrm{sqrt}(x^2+1)$ /* as 1D ASCII */

```
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
            x
(%o2) ----------       /* as ASCII Art */
             2
      sqrt(x + 1)
```

Práce s čísly a základní konstanty

- Maxima dokáže pracovat s reálnými čísly v numerickém nebo symbolickém tvaru.
- Způsob zápisu reálných čísel lze nastavit v menu `Numeric` pomocí přepínače `Numeric Output` mezi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavení proměnné `numer` určuje způsob zobrazení.
- Standardně se zobrazuje 16 číslic (včetně desetinné čárky).
- Přesnost zobrazení je definována proměnnou `fpproc` a ovlivňuje zobrazení pomocí `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy stejně.
- Standardně se komplexní čísla zadávají v algebraickém tvaru (`rectform`). Pomocí příkazu `polarform` je můžeme převést do trigonometrického (exponenciálního) tvaru.

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Práce s čísly a základní konstanty

- Maxima dokáže pracovat s reálnými čísly v numerickém nebo symbolickém tvaru.
- Způsob zápisu reálných čísel lze nastavit v menu `Numeric` pomocí přepínače `Numeric Output` mezi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavení proměnné `numer` určuje způsob zobrazení.
- Standardně se zobrazuje 16 číslic (včetně desetinné čárky).
- Přesnost zobrazení je definována proměnnou `fpproc` a ovlivňuje zobrazení pomocí `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy stejně.
- Standardně se komplexní čísla zadávají v algebraickém tvaru (`rectform`). Pomocí příkazu `polarform` je můžeme převést do trigonometrického (exponenciálního) tvaru.

```
(%i1) z:1+%i;
```
(z) $i+1$
```
(%i2) polarform(z)+rectform(z);
```
(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Práce s čísly a základní konstanty

- Číselné konstanty e, π, i (imaginární jednotka) mají prefix `%`, tj. `%e`, `%pi`, `%i`.
  To platí i když jsou součástí nebo výsledkem výpočtů.
- Maxima má předdefinované konstanty `inf`, `minf` pro reálná nekonečna ∞, $-\infty$.
- Maxima má předdefinovanou konstantu `infinity` pro komplexní nekonečno.
- Logické konstanty `true` a `false` představují pravdu a nepravdu.

(%i1) `%pi+%i+%e;`

(%o1) $\pi + \% \mathrm{i} + \% \mathrm{e}$

(%i2) `[minf,inf];`

(%o2) $[-\infty, \infty]$

(%i3) `infinity;`

(%o3) *infinity*

Přiřazení a funkce

- Maxima obsahuje mnohem více funkcí než standardní programovací jazyky. Jsou to nejen samotné funkce, ale také různé funkce na jejich podporu.
- Operátor `:` používáme k přiřazování hodnot nebo výrazů proměnným.
- Funkce definujeme pomocí přiřazení `:=`.

```
(%i1) f(x):=x^2+2*x+3;
```

(%o1) $f(x) := x^2 + 2x + 3$

```
(%i6) f(x);f(y);f(x+1);
      f(-2);f(1);
```

(%o2) $x^2 + 2x + 3$

(%o3) $y^2 + 2y + 3$

(%o4) $(x+1)^2 + 2(x+1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

Práce s výrazy

Mnohokrát potřebujeme změnit podmínky pouze lokálně pro konkrétní výpočet bez změny globálního nastavení. Za tímto účelem má Maxima velmi efektivní příkaz `ev`.

- Příkaz `ev` umožňuje definovat specifické prostředí v rámci jednoho příkazu.
- Po zadání příkazu `ev(a,b1,b2,..., bn)` se vyhodnotí výraz `a` při splnění podmínek `b1`, `b2`, ..., `bn`.
- Těmito podmínkami mohou být rovnice, přiřazení, funkce, přepínače (logická nastavení).

Příklad ukazuje příklad řešení kvadratické rovnice pomocí příkazu `solve`.

- Proměnné `a`, `b`, `c` po provedení příkazu `ev` nemají přiřazené hodnoty.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x = \frac{3}{2}, x = -1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $[x = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}]$

Práce s výrazy

Substituovat výrazy můžeme pomocí příkazů `subst(a,b,c)` a `ratsubst(a,b,c)`.

- Výraz `a` bude nahrazen výrazem `b` a následně dosazen do výrazu `c`.
- Při použití příkazu `subst` musí být `b` nejjednodušší částí (atomem) resp. kompletním podvýrazem výrazu `c`.
- V příkladu není podvýraz `x+y` úplný (chybí `z`).
- Příkaz `ratsubst` výsledný výraz také upraví.

```
(%i2) subst(x+y,a,a^2+b^2); ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);
```
(%o1) $(y+x)^2+b^2$

(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$

```
(%i4) subst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(a,x+y,x+y+z);
```
(%o3) $z+y+x$

(%o4) $z+a$

Limity a derivace

V menu $\boxed{\texttt{Calculus}}$ najdeme funkce pro řešení základních problémů matematické analýzy (limity, derivace, integrály, součty řad, ...).

Limity vypočteme pomocí příkazu `limit`.

- Poslední parametr určuje směr jednostranných limit, má hodnoty `plus` nebo `minus` a je volitelný.

  Pokud není zadán, Maxima počítá limitu jako komplexní.
- Příkazem `limit(f(x),x,a)` vypočítáme limitu $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Příkazem `limit(f(x),x,a,plus)` vypočítáme limit $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

```
(%i4) limit(1/x,x,0);       limit(1/x,x,0,plus);
              limit(1/x,x,0,minus);  limit(1/x,t,0);
```

(%o1) *infinity*

(%o2) ∞

(%o3) $-\infty$

(%o4) $\frac{1}{x}$

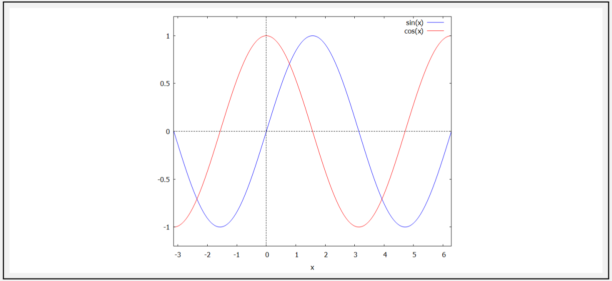
Grafy funkcí

Graf funkce můžeme vylíčit několika způsoby.

- Nejjednodušší způsob je zvolit v menu `Plot` podmenu `Plot 2d ...`.
- Zvolíme-li `Format=gnuplot`, funkce se vykreslí příkazem `plot2d` do nového okna pomocí programu Open Source `Gnuplot`.

  `Gnuplot` se automaticky nainstaluje spolu s Maxima.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
        [plot_format, gnuplot])$
```

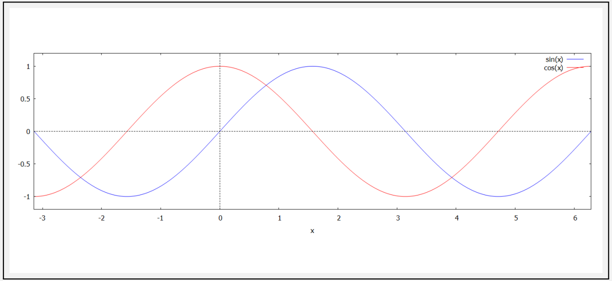


Grafy funkcí

Grafy funkcí nejsou zobrazeny v reálném poměru os x a y, ale jsou optimalizované pro obrazovku.

- Pro správné zobrazení můžeme použít např. parametr `same_xy`.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
         [plot_format, gnuplot],[same_xy])$
```

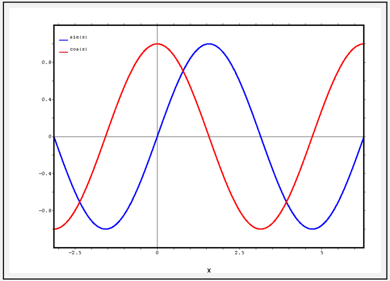


Grafy funkcí

Zvolíme-li `Format=wxmaxima`:

- Maxima vykreslí graf pomocí příkazu `plot2d` do nového okna.
- Obrázek můžeme uložit pouze do postscriptu.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, xmaxima])$
```



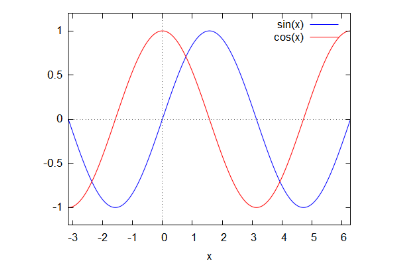
Grafy funkcí

Zvolíme-li Format=inline:

- Maxima nakreslí graf pomocí příkazu wxplot2d do svého prostředí.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
          [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Příkazy plot2d a wxplot2d mají stejnou syntaxi a mnohem více parametrů.

- Parametry zjistíme například příkazem describe(plot2d).

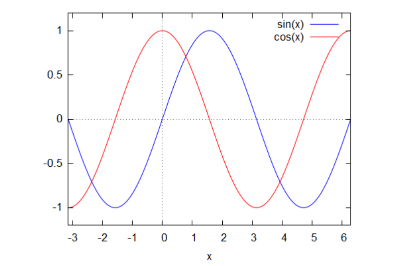
Grafy funkcí

Zvolíme-li `Format=inline`:

- Maxima nakreslí graf pomocí příkazu `wxplot2d` do svého prostředí.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
          [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Příkazy `plot2d` a `wxplot2d` mají stejnou syntaxi a mnohem více parametrů.

- Parametry zjistíme například příkazem `describe(plot2d)`.

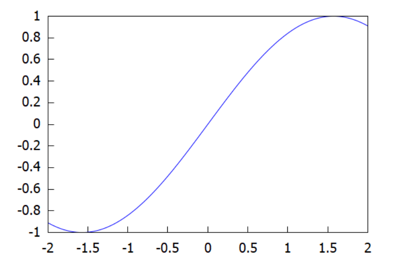
Grafy funkcí

Graf funkce můžeme vykreslit několika způsoby.

- Výhodnější je použít příkazy `wxdraw2d` nebo `draw2d` a výstup přesměrovat na `Gnuplot`.
- Tyto příkazy mají mírně odlišnou syntaxi než `wxplot2d`, `plot2d`.
  Parametry tisku jsou jednodušší a přehlednější.
- Vykreslovaná funkce musí být v příkazu `explicit`, `parametric` nebo `implicit`.

```
(%i1) wxdraw2d(explicit((sin(x)),x,-2,2))$
```

(%o1)



Posloupnosti a řady

Posloupnosti můžeme v Maxima vytvořit několika způsoby.

- Posloupnosti můžeme vytvořit například příkazem `makelist` nebo příkazy cyklu `for..do`.
- Příkaz `makelist` vytvoří seznam, který můžeme zobrazit i jako celek i po členech.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);
      S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S2[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 7
(%o5) 199
(%i6) S1[12];
      inpart: invalid index 12 of list or matrix.
      -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

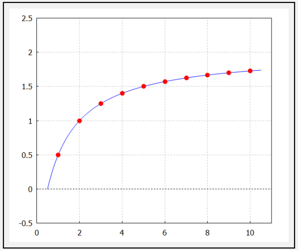
Posloupnosti a řady

- Posloupnost je vygenerována i se svými vzory a poté se vykreslí pomocí `draw2d`.
- Uspořádané dvojice jsou v hranatých závorkách a poté jsou zobrazeny jako body v rovině.

(%i1) `S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);`

(S1) $[[1,\frac{1}{2}],[2,1],[3,\frac{5}{4}],[4,\frac{7}{5}],[5,\frac{3}{2}],[6,\frac{11}{7}],[7,\frac{13}{8}],[8,\frac{5}{3}],[9,\frac{17}{10}],[10,\frac{19}{11}]]$

(%i2)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
point_type=7,color=red,points(S1))$
```



Posloupnosti a řady

- Pomocí příkazu `for..do` vypíšeme několik členů posloupnosti $\{2n^2 - 1\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 15 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
      1
      7
      17
      31
      49
      71
      97
      127
      161
      199
      241
      287
      337
      391
      449
```

Posloupnosti a řady

Součet řady můžeme vypočítat příkazem `sum`.
Tento příkaz naleznete v menu `Calculus` a podmenu `Calculate Sum...`.

- Pomocí příkazu `sum` vypočítáme konečný i nekonečný součet.

```
(%i1) sum(2*n^2-1,n,1,8);
```

(%o1) 400

- Maxima dokáže vypočítat přesný součet některých nekonečných řad.

```
(%i2) sum(1/k^2,k,1,inf);
      sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum;
```

(%o1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

(%o2) $\frac{\pi^2}{6}$

Reálné funkce

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

Základní pojmy

- **Binární relace** f mezi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Pokud pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x; y] \in f$, pak se relace f nazývá **funkce** (**zobrazení**) z množiny A do množiny B, označení $f \colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ nebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá proměnná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá proměnná, hodnota funkce.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B \colon [x; y] \in f\}$ Definiční obor funkce f (množina vzorů).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f) \colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnot funkce f (množina obrazů).
- Relace a funkce jsou množiny uspořádaných dvojic.
- $f = g$ představuje ekvivalenci $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ a pro všechny $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Základní pojmy

- **Binární relace** f mezi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Pokud pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x; y] \in f$, pak se relace f nazývá **funkce** (**zobrazení**) z množiny A do množiny B, označení $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ nebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá proměnná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá proměnná, hodnota funkce.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definiční obor funkce f (množina vzorů).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnot funkce f (množina obrazů).
- Relace a funkce jsou množiny uspořádaných dvojic.
- $f = g$ představuje ekvivalenci $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ a pro všechny $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Základní pojmy

- **Binární relace** f mezi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Pokud pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x; y] \in f$, pak se relace f nazývá **funkce** (**zobrazení**) z množiny A do množiny B, označení $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ nebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá proměnná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá proměnná, hodnota funkce.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definiční obor funkce f (množina vzorů).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnot funkce f (množina obrazů).
- Relace a funkce jsou množiny uspořádaných dvojic.
- $f = g$ představuje ekvivalenci $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ a pro všechny $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Základní pojmy

- $\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

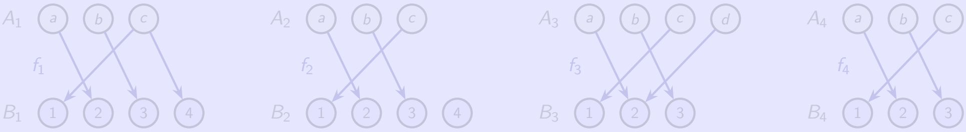
  Funkce f je injekce, resp. prostá funkce (různé vzory mají různé obrazy).

- $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$

  Funkce f je surjekce, resp. funkce na množinu B (každý obraz má vzor).

- f je injekce a surjekce současně (prostá funkce na množinu B)

  Funkce f je bijekce (injekce a surjekce).



$f_1 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [c;4]\}$ — Není funkce (je relace).

$f_2 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$ — Je injekce.

$f_3 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [d;2]\}$ — Je surjekce.

$f_4 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$ — Je bijekce.

Základní pojmy

- $\forall x_1, x_2 \in A \colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

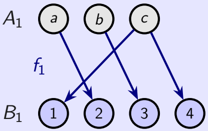
  Funkce f je injekce, resp. prostá funkce (různé vzory mají různé obrazy).

- $\forall y \in B \; \exists x \in A \colon y = f(x)$

  Funkce f je surjekce, resp. funkce na množinu B (každý obraz má vzor).

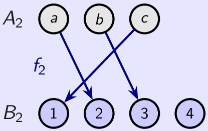
- f je injekce a surjekce současně (prostá funkce na množinu B)

  Funkce f je bijekce (injekce a surjekce).



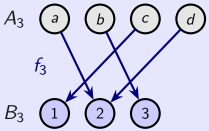
$f_1 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1], [c; 4]\}$

Není funkce
(je relace).



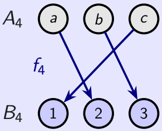
$f_2 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$

Je injekce.



$f_3 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1], [d; 2]\}$

Je surjekce.



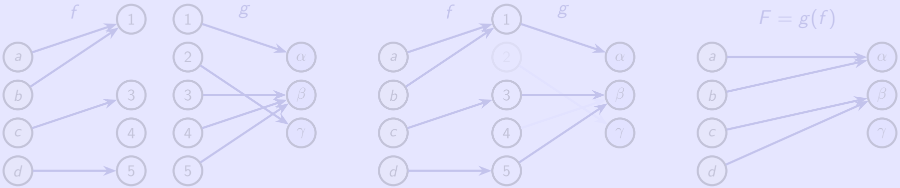
$f_4 = \{[a; 2], [b; 3], [c; 1]\}$

Je bijekce.

Základní pojmy

Funkce $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $H(f) \subset C$.

- Funkce $F = g(f)\colon A \to D$, která přiřadí každému $x \in A$ hodnotu $z = g(y) = g(f(x)) \in D$, kde $y = f(x)$, se nazývá **složení** (**kompozice**) funkcí f a g.
- Funkce f se nazývá vnitřní složka.
- Funkce g se nazývá vnější složka.



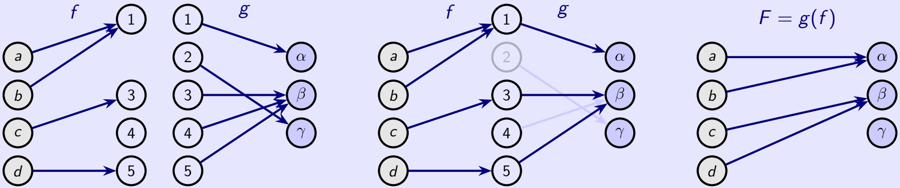
$$f = \{[a;1], [b;1], [c;3], [d;5]\},\ g = \{[1;\alpha], [2;\gamma], [3;\beta], [4;\beta], [5;\beta]\},$$

složení $F = g(f) = \{[a;\alpha], [b;\alpha], [c;\beta], [d;\beta]\}$.

Základní pojmy

Funkce $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $H(f) \subset C$.

- Funkce $F = g(f)\colon A \to D$, která přiřadí každému $x \in A$ hodnotu $z = g(y) = g(f(x)) \in D$, kde $y = f(x)$, se nazývá **složení** (**kompozice**) funkcí f a g.
- Funkce f se nazývá vnitřní složka.
- Funkce g se nazývá vnější složka.



$$f = \{[a;1],[b;1],[c;3],[d;5]\},\ g = \{[1;\alpha],[2;\gamma],[3;\beta],[4;\beta],[5;\beta]\},$$

$$\text{složení } F = g(f) = \{[a;\alpha],[b;\alpha],[c;\beta],[d;\beta]\}.$$

Základní pojmy

Funkce $f\colon A \to B$, $C \subset A$.

- Zobrazení $h\colon C \to B$ takové, že pro všechny $x \in C$ platí $f(x) = h(x)$, se nazývá **zúžení (restrikce)** f **na množinu** C, označení $h = f|_C$.

Funkce $f\colon A \to B$ je bijekce.

- Zobrazení $g\colon B \to A$ takové, že $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,
  tj. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkce k** f, označení $g = f^{-1}$.

Množina A je **ekvivalentní** s množinou B, pokud existuje bijekce $f\colon A \to B$, označení $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A je prázdna.	A je konečná.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A je spočitatelně konečná.	
$A \sim N$	A je spočitatelně nekonečná.	A je nekonečná.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A je nespočitatelná.	
$A = \emptyset$ nebo $A \sim N_n$ nebo $A \sim N$	A is spočitatelná.	

Základní pojmy

Funkce $f\colon A \to B$, $C \subset A$.

- Zobrazení $h\colon C \to B$ takové, že pro všechny $x \in C$ platí $f(x) = h(x)$, se nazývá **zúžení (restrikce)** f **na množinu** C, označení $h = f|_C$.

Funkce $f\colon A \to B$ je bijekce.

- Zobrazení $g\colon B \to A$ takové, že $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,
  tj. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkce k** f, označení $g = f^{-1}$.

Množina A je **ekvivalentní** s množinou B, pokud existuje bijekce $f\colon A \to B$, označení $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A je prázdna.	A je konečná.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A je spočitatelně konečná.	
$A \sim N$	A je spočitatelně nekonečná.	A je nekonečná.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A je nespočitatelná.	
$A = \emptyset$ nebo $A \sim N_n$ nebo $A \sim N$	A is spočitatelná.	

Základní pojmy

Funkce $f\colon A \to B$, $C \subset A$.

- Zobrazení $h\colon C \to B$ takové, že pro všechny $x \in C$ platí $f(x) = h(x)$, se nazývá **zúžení (restrikce)** f **na množinu** C, označení $h = f|_C$.

Funkce $f\colon A \to B$ je bijekce.

- Zobrazení $g\colon B \to A$ takové, že $[y;x] \in g \Leftrightarrow [x;y] \in f$,
  tj. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkce k** f, označení $g = f^{-1}$.

Množina A je **ekvivalentní** s množinou B, pokud existuje bijekce $f\colon A \to B$, označení $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A je prázdna.	A je konečná.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A je spočitatelně konečná.	
$A \sim N$	A je spočitatelně nekonečná.	A je nekonečná.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A je nespočitatelná.	
$A = \emptyset$ nebo $A \sim N_n$ nebo $A \sim N$	A is spočitatelná.	

Základní pojmy

- $N = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ Přirozená čísla.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ Celá čísla.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Racionální čísla.

  Součet, rozdíl, součin a podíl dvou racionálních čísel (s nenulovým jmenovatelem) je opět racionální číslo. Racionální číslo (zlomek) může mít několik různých vyjádření.
- $I = R - Q$ Iracionální čísla.

  Součet, rozdíl, součin a podíl dvou iracionálních čísel může být iracionální i racionální.
- $R = (-\infty; \infty)$ Reálná čísla.

  Množina R je nekonečná, ale všechny její prvky, tzn. čísla, jsou konečná (počet prvků množiny R nelze vyjádřit číslem).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozšířená množina reálných čísel.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ pro $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nedefinujeme $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in R$ (neurčité výrazy).

Základní pojmy

- $N = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ Přirozená čísla.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ Celá čísla.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Racionální čísla.
  Součet, rozdíl, součin a podíl dvou racionálních čísel (s nenulovým jmenovatelem) je opět racionální číslo. Racionální číslo (zlomek) může mít několik různých vyjádření.
- $I = R - Q$ Iracionální čísla.
  Součet, rozdíl, součin a podíl dvou iracionálních čísel může být iracionální i racionální.
- $R = (-\infty; \infty)$ Reálná čísla.
  Množina R je nekonečná, ale všechny její prvky, tzn. čísla, jsou konečná (počet prvků množiny R nelze vyjádřit číslem).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozšířená množina reálných čísel.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ pro $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nedefinujeme $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in R$ (neurčité výrazy).

Základní pojmy

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ Přirozená čísla.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ Celá čísla.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Racionální čísla.

  Součet, rozdíl, součin a podíl dvou racionálních čísel (s nenulovým jmenovatelem) je opět racionální číslo. Racionální číslo (zlomek) může mít několik různých vyjádření.
- $I = R - Q$ Iracionální čísla.

  Součet, rozdíl, součin a podíl dvou iracionálních čísel může být iracionální i racionální.
- $R = (-\infty; \infty)$ Reálná čísla.

  Množina R je nekonečná, ale všechny její prvky, tzn. čísla, jsou konečná (počet prvků množiny R nelze vyjádřit číslem).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozšířená množina reálných čísel.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ pro $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nedefinujeme $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in R$ (neurčité výrazy).

Posloupnosti (reálných čísel)

Funkce f, $D(f) = N$

$f = \{[n; f(n)], n \in N\}$

Posloupnost, pro $n \in N$ značíme $a_n = f(n)$,

tj. $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Posloupnost f je spočitatelná (nekonečná).
- $a_n \in f$ Člen posloupnosti představuje $[n; f(n)]$,

  tedy současně vzor (pořadí n) a obraz $a_n = f(n)$.

Posloupnost (reálných čísel) je každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in R$, tj. $f: N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Explicitní zadání: Obecné vyjádření $a_n = f(n)$, $n \in N$.

  $a_n = n^2$, $n \in N$ definuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
- Rekurentní zadání: Zadání a_1 a zadání a_n, $n \in N$ pomocí předchozích členů.

  $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$

  definuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Posloupnosti (reálných čísel)

Funkce f, $D(f) = N$
$f = \{[n; f(n)], n \in N\}$

Posloupnost, pro $n \in N$ značíme $a_n = f(n)$,
tj. $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Posloupnost f je spočitatelná (nekonečná).
- $a_n \in f$ Člen posloupnosti představuje $[n; f(n)]$,
tedy současně vzor (pořadí n) a obraz $a_n = f(n)$.

Posloupnost (reálných čísel) je každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in R$, tj. $f \colon N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Explicitní zadání: Obecné vyjádření $a_n = f(n)$, $n \in N$.
$a_n = n^2$, $n \in N$ definuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
- Rekurentní zadání: Zadání a_1 a zadání a_n, $n \in N$ pomocí předchozích členů.
$a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$
definuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Posloupnosti (reálných čísel)

Funkce f, $D(f) = N$
$f = \{[n; f(n)], n \in N\}$ $\Bigg\}$ **Posloupnost**, pro $n \in N$ značíme $a_n = f(n)$,
tj. $f = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Posloupnost f je spočitatelná (nekonečná).
- $a_n \in f$ Člen posloupnosti představuje $[n; f(n)]$,
  tedy současně vzor (pořadí n) a obraz $a_n = f(n)$.

Posloupnost (reálných čísel) je každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in R$, tj. $f : N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Explicitní zadání: Obecné vyjádření $a_n = f(n)$, $n \in N$.
  $a_n = n^2$, $n \in N$ definuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$.
- Rekurentní zadání: Zadání a_1 a zadání a_n, $n \in N$ pomocí předchozích členů.
  $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$
  definuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$.

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, čísla $a, b \in R$.

- $\forall n \in N$: $a \leq a_n$ — a je dolní ohraničení, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena zdola.
- $\forall n \in N$: $a_n \leq b$ — b je horní ohraničení, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena shora.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena zdola a shora — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena.

$\forall n \in N$: $a_n < a_{n+1}$ Rostoucí.
$a_n > a_{n+1}$ Klesající.
} Ostře monotónní.

$\forall n \in N$: $a_n \leq a_{n+1}$ Neklesající.
$a_n \geq a_{n+1}$ Nerostoucí.
$a_n = a_{n+1}$ Konstantní (stacionární).
} Monotónní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ není monotónní.

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, čísla $a, b \in R$.

- $\forall n \in N$: $a \leq a_n$ a je dolní ohraničení, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena zdola.
- $\forall n \in N$: $a_n \leq b$ b je horní ohraničení, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena shora.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena zdola a shora $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena.

$\forall n \in N$: $a_n < a_{n+1}$ Rostoucí.
$a_n > a_{n+1}$ Klesající.
(Rostoucí, Klesající:) Ostře monotónní.

$\forall n \in N$: $a_n \leq a_{n+1}$ Neklesající.
$a_n \geq a_{n+1}$ Nerostoucí.
$a_n = a_{n+1}$ Konstantní (stacionární).

(Všechny výše uvedené:) Monotónní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ není monotónní.

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, čísla $a, b \in R$.

- $\forall n \in N$: $a \leq a_n$ a je dolní ohraničení, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena zdola.
- $\forall n \in N$: $a_n \leq b$ b je horní ohraničení, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena shora.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena zdola a shora $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena.

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll} \forall n \in N:\ a_n < a_{n+1} & \text{Rostoucí.} \\ a_n > a_{n+1} & \text{Klesající.} \end{array}\right\} \text{Ostře monotónní.} & \\ \forall n \in N:\ a_n \leq a_{n+1} & \text{Neklesající.} \\ a_n \geq a_{n+1} & \text{Nerostoucí.} \\ a_n = a_{n+1} & \text{Konstantní (stacionární).} \end{array}\right\} \text{Monotónní posloupnost } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ není monotónní.

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Pokud je $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ rostoucí posloupnost (přirozených čísel, indexů), pak se $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazývá **podposloupnost (vybraná posloupnost z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podposloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ jsou například:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1,3,5,7,9,11,13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3,7,11,15,19,23,27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7,11,15,19,23,27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Pokud je $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ rostoucí posloupnost (přirozených čísel, indexů), pak se $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazývá **podposloupnost** (**vybraná posloupnost z**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podposloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ jsou například:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

Posloupnosti (reálných čísel)

Pro každé okolí $O(a)$ existuje nekonečně mnoho členů $a_n \in O(a)$,
pak se $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Množinu všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme E.

$\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limes superior** (horní limita) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limes inferior** (dolní limita) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Existují vždy.

$\sup E = \inf E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (množina E má jediný prvek).

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má alespoň jednu hromadnou hodnotu.
- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, pak je jediná.

Posloupnosti (reálných čísel)

Pro každé okolí $O(a)$ existuje nekonečně mnoho členů $a_n \in O(a)$,
pak se $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Množinu všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme E.

$\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limes superior** (horní limita) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limes inferior** (dolní limita) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Existují vždy.

$\sup E = \inf E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (množina E má jediný prvek).

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má alespoň jednu hromadnou hodnotu.
- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, pak je jediná.

Posloupnosti (reálných čísel)

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$ Existuje konečná limita, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. } $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ Existuje nekonečná limita, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Neexistuje limita, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.

} $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Změna konečného počtu (přidání, vynechání, výměna pořadí atd.) členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vliv na konvergenci nebo divergenci této posloupnosti.

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pro } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pro } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pro } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Geometrická posloupnost.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pro } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pro } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pro } q \in (0;1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pro } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pro } q < -1. \end{cases}$$

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pro } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pro } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pro } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Geometrická posloupnost.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pro } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pro } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pro } q \in (0;1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pro } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pro } q < -1. \end{cases}$$

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničena.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pro } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pro } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pro } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Geometrická posloupnost.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pro } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pro } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pro } q \in (0; 1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pro } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pro } q < -1. \end{cases}$$

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokud limity existují).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } a < 1, \\ \infty & \text{pro } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } a < 1, \\ \infty & \text{pro } a > 1. \end{cases}$

Důležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$

- Číslo e se nazývá **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je přibližně $2,718\,281\,827$.

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokud limity existují).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } a < 1, \\ \infty & \text{pro } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } a < 1, \\ \infty & \text{pro } a > 1. \end{cases}$

Důležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$

- Číslo e se nazývá **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je přibližně $2,718\,281\,827$.

Posloupnosti (reálných čísel)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokud limity existují).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } a < 1, \\ \infty & \text{pro } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } a < 1, \\ \infty & \text{pro } a > 1. \end{cases}$

Důležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$

- Číslo e se nazývá **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je přibližně $2,718\,281\,827$.

Číselné řady

Pokud je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost,

pak se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazývá **(nekonečná číselná) řada**.

- Číselné řady úzce souvisí s posloupnostmi a zobecňují pojem sčítání na nekonečný počet sčítanců. Jednoduchým příkladem jsou zlomky a periodická čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty částečný součet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zbytek})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vztah mezi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájemně jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Číselné řady

Pokud je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost,

pak se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazývá **(nekonečná číselná) řada**.

- Číselné řady úzce souvisí s posloupnostmi a zobecňují pojem sčítání na nekonečný počet sčítanců. Jednoduchým příkladem jsou zlomky a periodická čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty částečný součet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zbytek})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vztah mezi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájemně jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\cdots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Číselné řady

Pokud je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost,

pak se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazývá **(nekonečná číselná) řada**.

- Číselné řady úzce souvisí s posloupnostmi a zobecňují pojem sčítání na nekonečný počet sčítanců. Jednoduchým příkladem jsou zlomky a periodická čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty částečný součet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zbytek})}$$

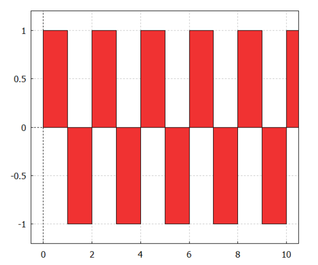
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vztah mezi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájemně jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    ...
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Číselné řady

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)$
rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



Číselné řady

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (pokud existuje) se nazývá **součet** řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$ Existuje konečná limita,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k součtu s,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ Existuje nekonečná limita,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $\pm\infty$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Limita neexistuje,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Číselné řady

$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (pokud existuje) se nazývá **součet** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, označení $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$ — Existuje konečná limita, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k součtu s, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\Bigg\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ — Existuje nekonečná limita, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $\pm\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ — Limita neexistuje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.

$\Bigg\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Číselné řady

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Změna konečného počtu (přidání, vynechání, výměna pořadí atd.) členů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá vliv na její konvergenci nebo divergenci.
- Ale má vliv na její součet.

Harmonická řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (Harmonická řada má nekonečný součet).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty.$ (Harmonická řada diverguje do nekonečna).

Číselné řady

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Změna konečného počtu (přidání, vynechání, výměna pořadí atd.) členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá vliv na její konvergenci nebo divergenci.
- Ale má vliv na její součet.

Harmonická řada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (Harmonická řada má nekonečný součet).
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty.$ (Harmonická řada diverguje do nekonečna).

Číselné řady

Pro nekonečné řady neplatí některá pravidla, například. asociativní zákon:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0, \\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \quad = 1+0+0+\cdots = 1. \end{cases}$$

Geometrická řada.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\cdots = \frac{1}{1-q}$ pro všechny $q \in (-1;1)$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n$, $s_n = (1+q+\cdots+q^{n-1})\frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1}$ pro $q \neq 1$.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{q^n-1}{q-1} \to \frac{\infty-1}{q-1} = \infty. & \Rightarrow \bullet\ S = \infty \quad \text{pro } q > 1. \\ 1+1+1+1+\cdots \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ S = \infty \quad \text{pro } q = 1. \\ \frac{q^n-1}{q-1} \to \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}. & \Rightarrow \bullet\ S = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } q \in (-1;1). \\ -1+1-1+1-1+\cdots. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{pro } q = -1. \\ \frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1},\ \frac{1}{q} \to 0,\ q^{n-1} \to \pm\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \quad \text{pro } q < -1. \end{cases}$$

Číselné řady

Pro nekonečné řady neplatí některá pravidla, například. asociativní zákon:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=\begin{cases}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0,\\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\quad=1+0+0+\cdots=1.\end{cases}$$

Geometrická řada.

$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}=1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q}$ pro všechny $q\in(-1;1)$.

- $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n$, $s_n=(1+q+\cdots+q^{n-1})\frac{1-q}{1-q}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1}$ pro $q\neq 1$.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases}\frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{\infty-1}{q-1}=\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty \quad \text{pro } q>1.\\ 1+1+1+1+\cdots\to\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty \quad \text{pro } q=1.\\ \frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{0-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\frac{1}{1-q} \quad \text{pro } q\in(-1;1).\\ -1+1-1+1-1+\cdots. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists \quad \text{pro } q=-1.\\ \frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1},\ \frac{1}{q}\to 0,\ q^{n-1}\to\pm\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists \quad \text{pro } q<-1.\end{cases}$$

Číselné řady

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4)
```
sum: sum is divergent.
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

- V následujícím příkladu stačí měnit na začátku hodnotu q.

```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

Číselné řady

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4) sum: sum is divergent.

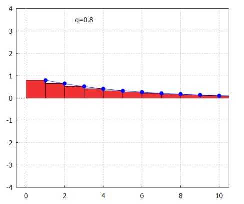
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);

- V následujícím příkladu stačí měnit na začátku hodnotu q.

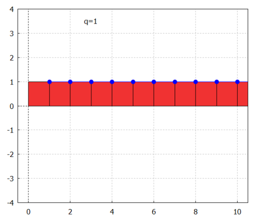
```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

Číselné řady

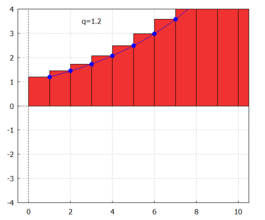
Příkazy zobrazí následující grafy:



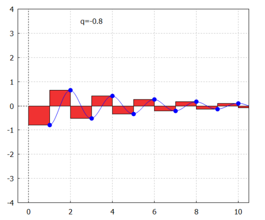
$q = 0.8$



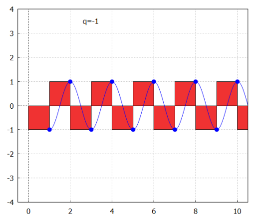
$q = 1$



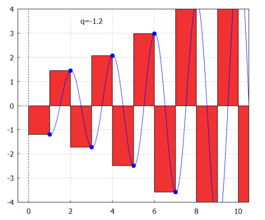
$q = 1.2$



$q = -0.8$



$q = -1$



$q = -1.2$

Číselné řady

Nutná podmínka konvergence.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$ $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (limita neexistuje nebo je nulová).

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (osciluje nebo $\longrightarrow \pm\infty$).

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje do nekonečna.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ pro $q = \frac{1}{2}$ konverguje do 2.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Číselné řady

Nutná podmínka konvergence.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (limita neexistuje nebo je nulová).

  $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (osciluje nebo $\longrightarrow \pm\infty$).

Harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje do nekonečna.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ pro $q = \frac{1}{2}$ konverguje do 2.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Číselné řady

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in N$ (**nezáporné členy**) má vždy součet $0 \leq s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \infty$.

Srovnávací kritérium. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty$.

Limitní tvar. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p$, $0 < p < \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$. $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$. $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty$.

Číselné řady

d'Alembertovo (podílové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

Číselné řady

d'Alembertovo (podílové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N,$ kde $q \in (0;1).$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty,$ ale $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow,$ ale $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

Číselné řady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

Číselné řady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitní tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pro $p = 1$ neumíme rozhodnout.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

Číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow \text{pro } a > 0.$$

d'Alembertovo podílové kritérium:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pro $a > 0$.

Cauchyho odmocninové kritérium:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pro $a > 0$.

```
(%i5)  an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
           limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
           limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%o3)  0
(%o4)  0
(%o5)  0
```

Číselné řady

- Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$.
- Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje relativně**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R}$.

Řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a_n \in R$, $n \in N$ mají vždy součet $0 \leq s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \infty$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{A}$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

Leibnizovo kritérium.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n \geq 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerostoucí.} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$

- Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, kde $a_n \geq 0$ nebo $a_n \leq 0$ se nazývá **řada se střídavými znaménky**.

Číselné řady

- Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$.
- Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje relativně**, označení $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R}$.

Řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a_n \in R$, $n \in N$ mají vždy součet $0 \leq s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \infty$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{A}$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

Leibnizovo kritérium.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n \geq 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerostoucí.} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$

- Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, kde $a_n \geq 0$ nebo $a_n \leq 0$ se nazývá **řada se střídavými znaménky**.

Číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$$ (Anharmonická řada.)

Leibnizovo kritérium:

- $a_n = \frac{1}{n} > 0$, $n \in N$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající (nerostoucí).
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$$

Anharmonická a harmonická řada.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$ (Anharmonická řada).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty$ (Harmonická řada).

Číselné řady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{\mathrm{R}}.$ (Anharmonická řada.)

Leibnizovo kritérium:

- $a_n = \frac{1}{n} > 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající (nerostoucí).
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{\mathrm{R}}.$

Anharmonická a harmonická řada.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$ (Anharmonická řada).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty$ (Harmonická řada).

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkce reálné proměnné.
- $H(f) \subset R$ Reálná funkce.

Explicitně: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkce φ, ψ).

Implicitně: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmínky pro $[x; y]$ (Implicitní rovnice).

Funkce $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkci $f\colon y = |x|$, $x \in R$ můžeme například definovat:

Explicitně: • $y = \sqrt{x^2}$, resp. • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky: • $x = t$, $y = |t|$, $t \in R$, resp. • $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.

Implicitně: • $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. • $y - |x| = 0$.

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkce reálné proměnné.
- $H(f) \subset R$ Reálná funkce.

Explicitně: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkce φ, ψ).

Implicitně: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmínky pro $[x; y]$ (Implicitní rovnice).

Funkce $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkci $f\colon y = |x|$, $x \in R$ můžeme například definovat:

Explicitně:	• $y = \sqrt{x^2}$,	resp.	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametricky:	• $x = t$, $y = \|t\|$, $t \in R$,	resp.	• $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
Implicitně:	• $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,	resp.	• $y - \|x\| = 0$.

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkce reálné proměnné.
- $H(f) \subset R$ Reálná funkce.

Explicitně: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkce φ, ψ).

Implicitně: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmínky pro $[x; y]$ (Implicitní rovnice).

Funkce $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkci $f\colon y = |x|$, $x \in R$ můžeme například definovat:

Explicitně: • $y = \sqrt{x^2}$, resp. • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky: • $x = t$, $y = |t|$, $t \in R$, resp. • $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.

Implicitně: • $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. • $y - |x| = 0$.

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in A\colon a \leq f(x) & a \text{ je dolní ohraničení,} & f \text{ je ohraničená zdola} \\ \bullet\ \forall x \in A\colon f(x) \leq b & b \text{ je horní ohraničení,} & f \text{ je ohraničena shora} \\ \bullet\ f \text{ je ohraničena zdola a shora} & & f \text{ je ohraničená} \end{array}\right\} \text{na množině } A.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \text{není ohraničena zdola na množině } A & f \text{ je neohraničená zdola} \\ \bullet\ \text{není ohraničena shora na množině } A & f \text{ je neohraničená shora} \\ \bullet\ \text{není ohraničena na množině } A & f \text{ je neohraničená} \end{array}\right\} \text{na množině } A.$$

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Lokální vlastnost na množině A.
- $A = D(f)$. Globální vlastnost (na definičním oboru).

- $f\colon y = \sin x$ je ohraničená, tzn. ohraničená na $D(f) = R$.
- $f\colon y = x^3$ je neohraničená (zdola nebo shora), f je ohraničena např. na $\langle 0; 1\rangle$.

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x \in A$: $a \leq f(x)$ — a je dolní ohraničení, f je ohraničená zdola
- $\forall x \in A$: $f(x) \leq b$ — b je horní ohraničení, f je ohraničena shora
- f je ohraničena zdola a shora — f je ohraničená

na množině A.

- není ohraničena zdola na množině A — f je neohraničená zdola
- není ohraničena shora na množině A — f je neohraničená shora
- není ohraničena na množině A — f je neohraničená

na množině A.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Lokální vlastnost na množině A.
- $A = D(f)$. Globální vlastnost (na definičním oboru).

- f: $y = \sin x$ je ohraničená, tzn. ohraničená na $D(f) = R$.
- f: $y = x^3$ je neohraničená (zdola nebo shora), f je ohraničena např. na $\langle 0; 1 \rangle$.

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x \in A$: $a \leq f(x)$ — a je dolní ohraničení, f je ohraničená zdola
- $\forall x \in A$: $f(x) \leq b$ — b je horní ohraničení, f je ohraničena shora
- f je ohraničena zdola a shora — f je ohraničená

} na množině A.

- není ohraničena zdola na množině A — f je neohraničená zdola
- není ohraničena shora na množině A — f je neohraničená shora
- není ohraničena na množině A — f je neohraničená

} na množině A.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Lokální vlastnost na množině A.
- $A = D(f)$. Globální vlastnost (na definičním oboru).

- $f\colon y = \sin x$ je ohraničená, tzn. ohraničená na $D(f) = R$.
- $f\colon y = x^3$ je neohraničená (zdola nebo shora), f je ohraničena např. na $(0;1\rangle$.

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\}$ Lokální infimum
- $\sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\}$ Lokální supremum

} na množině A.

- $\inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\}$ Globální infimum
- $\sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\}$ Globální supremum

} (na definičním oboru).

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$ a bod $x_0 \in A$.

- $\forall x \in A$: $f(x_0) \leq f(x)$ Minimum.
  $f(x_0) \geq f(x)$ Maximum.
- $\forall x \in A$, $x \neq x_0$: $f(x_0) < f(x)$ Ostré minimum.
  $f(x_0) > f(x)$ Ostré maximum.

} Ostré extrémy.

} Extrémy na množině A.

$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Lokální extrémy na množině A.

$A = D(f)$ • Globální (absolutní) extrémy (na definičním oboru).

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\}$ Lokální infimum
- $\sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\}$ Lokální supremum

} na množině A.

- $\inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\}$ Globální infimum
- $\sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\}$ Globální supremum

} (na definičním oboru).

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$ a bod $x_0 \in A$.

- $\forall x \in A$: $f(x_0) \leq f(x)$ Minimum.
  $f(x_0) \geq f(x)$ Maximum.
- $\forall x \in A$, $x \neq x_0$: $f(x_0) < f(x)$ Ostré minimum.
  $f(x_0) > f(x)$ Ostré maximum.

} Ostré extrémy.

} Extrémy na množině A.

$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Lokální extrémy na množině A.

$A = D(f)$ • Globální (absolutní) extrémy (na definičním oboru).

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \inf f(A) = \inf\{f(x), x \in A\} & \text{Lokální infimum} \\ \bullet\ \sup f(A) = \sup\{f(x), x \in A\} & \text{Lokální supremum} \end{array}\right\} \text{ na množině } A.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \inf f(x) = \inf\{f(x), x \in D(f)\} & \text{Globální infimum} \\ \bullet\ \sup f(x) = \sup\{f(x), x \in D(f)\} & \text{Globální supremum} \end{array}\right\} \text{ (na definičním oboru).}$$

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$ a bod $x_0 \in A$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in A: & f(x_0) \leq f(x) & \text{Minimum.} \\ & f(x_0) \geq f(x) & \text{Maximum.} \\ \bullet\ \forall x \in A,\ x \neq x_0: & f(x_0) < f(x) & \left.\begin{array}{l}\text{Ostré minimum.} \\ \text{Ostré maximum.}\end{array}\right\} \text{Ostré extrémy.} \\ & f(x_0) > f(x) & \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Extrémy} \\ \text{na množině } A.\end{array}$$

$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Lokální extrémy na množině A.

$A = D(f)$ • Globální (absolutní) extrémy (na definičním oboru).

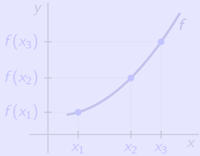
Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ Rostoucí.
  $f(x_1) > f(x_2)$ Klesající.
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ Neklesající.
  $f(x_1) \geq f(x_2)$ Nerostoucí.
- $\forall x_1, x_2 \in A$: $f(x_1) = f(x_2)$ Konstantní.

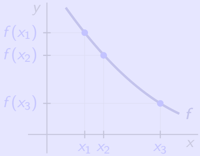
Rostoucí a Klesající: Ostře monotónní.

Všech pět: Monotónní na množině A.



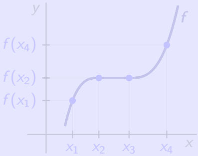
$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

Rostoucí funkce



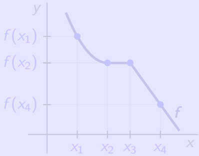
$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

Klesající funkce



$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$

Neklesající funkce



$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$

Nerostoucí funkce

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

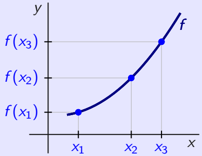
Konstantní funkce

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

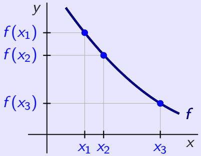
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ Rostoucí.
  $f(x_1) > f(x_2)$ Klesající.
  } Ostře monotónní.
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ Neklesající.
  $f(x_1) \geq f(x_2)$ Nerostoucí.
- $\forall x_1, x_2 \in A$: $f(x_1) = f(x_2)$ Konstantní.

} Monotónní na množině A.



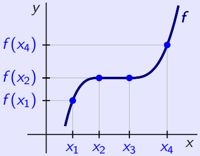
$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

Rostoucí funkce



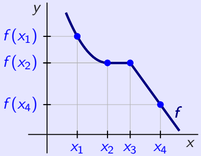
$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

Klesající funkce



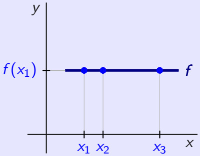
$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$

Neklesající funkce



$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$

Nerostoucí funkce



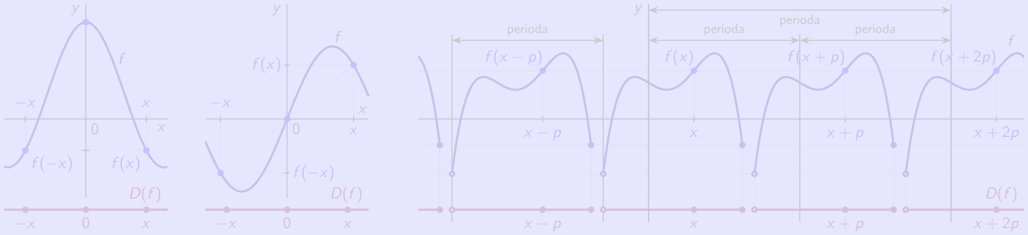
$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

Konstantní funkce

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

- $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f)$, $f(x) = f(-x)$ Sudá funkce.
  $f(x) = -f(-x)$ Lichá funkce.
- $\forall x \in D(f)$: $x \pm p \in D(f)$, $f(x) = f(x \pm p)$, $p \in R - \{0\}$ Periodická funkce, p je perioda.

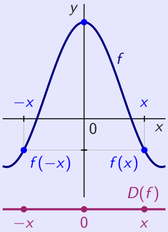


Sudá funkce Lichá funkce Periodická funkce

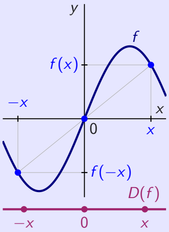
Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

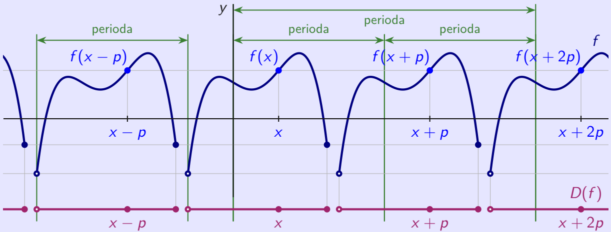
- $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f)$, $\quad f(x) = f(-x)$ Sudá funkce.
  $f(x) = -f(-x)$ Lichá funkce.
- $\forall x \in D(f)$: $x \pm p \in D(f)$, $f(x) = f(x \pm p)$, $p \in R - \{0\}$ Periodická funkce, p je perioda.



Sudá funkce



Lichá funkce



Periodická funkce

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

- Přímka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spojuje body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \leq p(x) & \text{Konvexní} \\ & f(x) < p(x) & \text{Ostře konvexní} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \geq p(x) & \text{Konkávní} \\ & f(x) > p(x) & \text{Ostře konkávní} \end{array}\right\} \text{ na intervalu } I.$$

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

$x_0 \in D(f)$ se nazývá **inflexní bod** f (f má **inflexi** v bodě x_0),

pokud existuje okolí $O_\delta(x_0)$ takové, že funkce f:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \text{ ostře konvexní} \\ \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta) \text{ ostře konkávní} \end{array}\right\} \text{ resp. } \left\{\begin{array}{l} f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) \text{ ostře konkávní.} \\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) \text{ ostře konvexní.} \end{array}\right.$$

Funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

- Přímka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spojuje body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \leq p(x) & \text{Konvexní} \\ & f(x) < p(x) & \text{Ostře konvexní} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \geq p(x) & \text{Konkávní} \\ & f(x) > p(x) & \text{Ostře konkávní} \end{array}\right\} \text{ na intervalu } I.$$

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

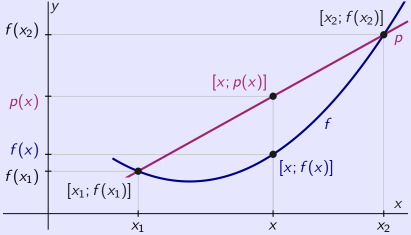
$x_0 \in D(f)$ se nazývá **inflexní bod** f (f má **inflexi** v bodě x_0),

pokud existuje okolí $O_\delta(x_0)$ takové, že funkce f:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \text{ ostře konvexní} \\ \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta) \text{ ostře konkávní} \end{array}\right\} \text{ resp. } \left\{\begin{array}{l} f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) \text{ ostře konkávní.} \\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) \text{ ostře konvexní.} \end{array}\right.$$

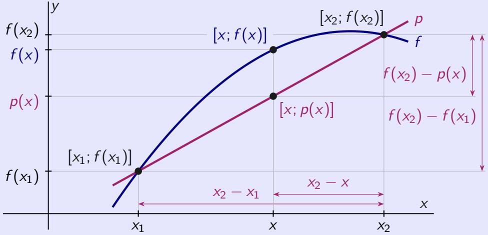
Funkce

- Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
- Přímka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spojuje body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.



Konvexní funkce

$f(x) \le p(x)$, $x_1 < x < x_2$



Konkávní funkce

$f(x) \ge p(x)$, $x_1 < x < x_2$

Konvexní

Ostře konvexní

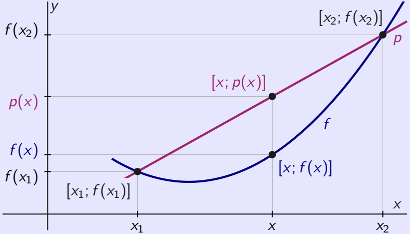
Konvexní a také konkávní

Konkávní

Ostře konkávní

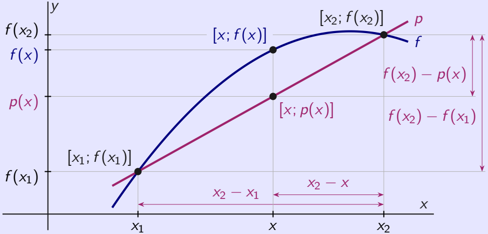
Funkce

- Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
- Přímka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spojuje body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.



Konvexní funkce

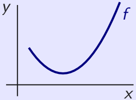
$f(x) \leq p(x)$, $x_1 < x < x_2$



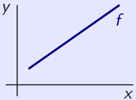
Konkávní funkce

$f(x) \geq p(x)$, $x_1 < x < x_2$

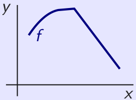
Konvexní



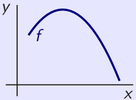
Ostře konvexní



Konvexní a také konkávní



Konkávní



Ostře konkávní

Elementární funkce I

Elementární funkce se nazývá každá funkce vytvořená pomocí operací sčítání, odečítání, násobení, dělení nebo pomocí skládání funkcí ze základních elementárních funkcí:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Polynom stupně n

$f_n\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon y = a_0$, $a_0 \neq 0$ se nazývá **konstantní funkce**.
- $f_1\colon y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ se nazývá **lineární funkce**.
- $f_2\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ se nazývá **kvadratická funkce**.

Elementární funkce I

Elementární funkce se nazývá každá funkce vytvořená pomocí operací sčítání, odečítání, násobení, dělení nebo pomocí skládání funkcí ze základních elementárních funkcí:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Polynom stupně n

$f_n\colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon y = a_0$, $a_0 \neq 0$ se nazývá **konstantní funkce**.
- $f_1\colon y = a_0 + a_1 x$, $a_1 \neq 0$ se nazývá **lineární funkce**.
- $f_2\colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_2 \neq 0$ se nazývá **kvadratická funkce**.

Elementární funkce I

Racionální lomená funkce

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m jsou polynomy stupňů $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkce

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciální funkce se základem $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Nejdůležitější je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ se základem e (Eulerovo číslo).
- Graf se nazývá **exponenciální křivka** a prochází body $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcí $y = a^x$, $y = a^{-x}$ jsou symetrické podle osy y.

Elementární funkce I

Racionální lomená funkce

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m jsou polynomy stupňů $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkce

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciální funkce se základem $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Nejdůležitější je $f\colon y = \exp x = e^x$ se základem e (Eulerovo číslo).
- Graf se nazývá **exponenciální křivka** a prochází body $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcí $y = a^x$, $y = a^{-x}$ jsou symetrické podle osy y.

Elementární funkce I

Racionální lomená funkce

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m jsou polynomy stupňů $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkce

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciální funkce se základem $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Nejdůležitější je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ se základem e (Eulerovo číslo).
- Graf se nazývá **exponenciální křivka** a prochází body $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcí $y = a^x$, $y = a^{-x}$ jsou symetrické podle osy y.

Elementární funkce I

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$

$f\colon y = \log_a x,\ x \in (0; \infty).$

- Logaritmická funkce $y = \log_a x,\ x \in (0; \infty)$ je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, $x \in R$ se stejným základem $a > 0,\ a \neq 1$ $(y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y)$.
- Pro $a > 0,\ a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pro $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pro $x \in R$.
- Graf se nazývá logaritmická křivka a prochází body $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcí $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ jsou symetrické podle osy x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označení $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ Přirozený logaritmus, označení $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (přirozený logaritmus) mají základ e.
- Pokud chceme vypočítat logaritmus s jiným základem, například. $\log_2 x$, musíme použít konstrukci $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

Elementární funkce I

Logaritmická funkce se základem $a > 0,\ a \neq 1$

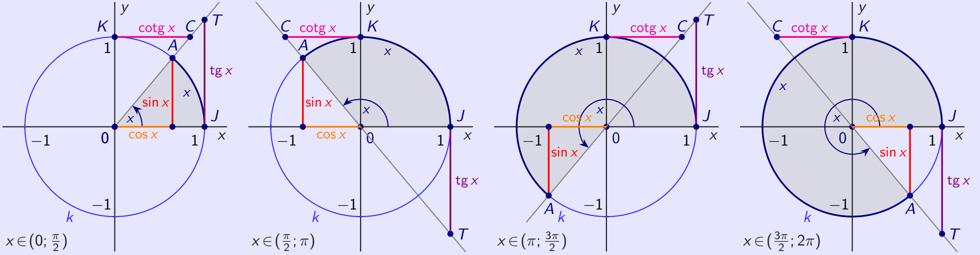
$f\colon y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$.

- Logaritmická funkce $y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$ je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, $x \in R$ se stejným základem $a > 0,\ a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Pro $a > 0,\ a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pro $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pro $x \in R$.
- Graf se nazývá logaritmická křivka a prochází body $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcí $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ jsou symetrické podle osy x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označení $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ Přirozený logaritmus, označení $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (přirozený logaritmus) mají základ e.
- Pokud chceme vypočítat logaritmus s jiným základem, například. $\log_2 x$, musíme použít konstrukci $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

Elementární funkce II

Goniometrické (trigonometrické) funkce jsou:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{k\pi, k \in Z\} \to R$.

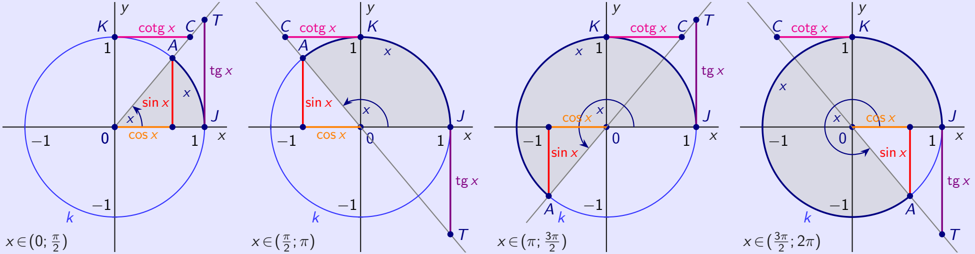


- Číslo π se nazývá **Ludolfovo**. Jeho hodnota je přibližně $3,141\,592\,654$.
- Kružnice s poloměrem $r = 1$ má obvod 2π.

Elementární funkce II

Goniometrické (trigonometrické) funkce jsou:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{k\pi, k \in Z\} \to R$.



- Číslo π se nazývá **Ludolfovo**. Jeho hodnota je přibližně $3,141\,592\,654$.
- Kružnice s poloměrem $r = 1$ má obvod 2π.

Elementární funkce II

- V programu Maxima mají goniometrické funkce tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcí musí být zadány v radiánech.
- Pokud chceme použít stupně, musíme je nejprve převést na radiány.

(%i3) `tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);`
`ratsimp(tangrad(22.5));`

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

`rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125`

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Pro zjednodušení práce s goniometrickými funkcemi můžeme použít příkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` nebo `spangl`, které obsahují další podporu pro práci s goniometrickými funkcemi.
- Balíčky načteme do systému pomocí příkazu `load`.

Elementární funkce II

- V programu Maxima mají goniometrické funkce tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcí musí být zadány v radiánech.
- Pokud chceme použít stupně, musíme je nejprve převést na radiány.

```
(%i3)  tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
       ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

```
rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125
```

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Pro zjednodušení práce s goniometrickými funkcemi můžeme použít příkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` nebo `spangl`, které obsahují další podporu pro práci s goniometrickými funkcemi.
- Balíčky načteme do systému pomocí příkazu `load`.

Elementární funkce II

Součtové vzorce pro sinus a kosinus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

- **Arkussinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- **Arkuskosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ke goniometrickým funkcím neexistují inverzní funkce, protože nejsou injektivní. Je nutné je vhodně zúžit.

Elementární funkce II

Součtové vzorce pro sinus a kosinus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

- **Arkussinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- **Arkuskosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ke goniometrickým funkcím neexistují inverzní funkce, protože nejsou injektivní. Je nutné je vhodně zúžit.

Elementární funkce II

- Cyklometrické funkce mají tvar `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`.
- Na tomto místě můžeme zmínit funkci `atan2(x,y)` definovanou vztahem $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

```
(%i4) asin(1);asin(1),numer;
      acos(1);acos(1),numer;
```

(%o1) $\frac{\pi}{2}$

(%o2) 1.570796326794897

(%o1) 0

(%o2) 0.0

```
(%i7) atan2(2,4);atan(1/2);atan(1/2),numer;
```

(%o5) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$

(%o6) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$

(%o7) 0.463647609000806

Součtové vzorce pro cyklometrické funkce.

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in R$.

Elementární funkce II

Hyperbolické funkce jsou:

- **Hyperbolický sinus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\, e^x}$: $R \to R$.
- **Hyperbolický kosinus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\, e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1 \rangle$.

- Hyperbolické funkce mají podobné vlastnosti jako goniometrické funkce.

Součtové vzorce pro sinus a kosinus hyperbolické. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Elementární funkce II

Hyperbolické funkce jsou:

- **Hyperbolický sinus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\, e^x}$: $R \to R$.
- **Hyperbolický kosinus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\, e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1 \rangle$.

- Hyperbolické funkce mají podobné vlastnosti jako goniometrické funkce.

Součtové vzorce pro sinus a kosinus hyperbolické. $x, y \in R$.

- $\sinh (x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh (x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Elementární funkce II

Moivreův vzorec. $x \in R,\ n \in N.$

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$

- Hyperbolické funkce jsou `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` a k nim inverzní hyperbolometrické funkce jsou `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

```
(%i4) sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1) sinh(x)
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 1.313035285499331
(%i8) asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5) asinh(x)
(%o6) 0
(%o7) 0
(%o8) 1.01844096363052
```

Elementární funkce II

Hyperbolometrické funkce jsou inverzní ke hyperbolickým funkcím:

- **Argument sinus hyperbolický**
$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\colon \quad R \to R.$$
- **Argument kosinus hyperbolický**
$$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\colon \quad \langle 1; \infty) \to \langle 0; \infty).$$
- **Argument tangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{argtgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1+x}{1-x}\colon \qquad (-1; 1) \to R.$$
- **Argument kotangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{argcotgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{x+1}{x-1}\colon \qquad R - \langle -1; 1\rangle \to R - \{0\}.$$

```
(%i3) ash(x):=log(x+sqrt(x^2+1))$
      a:2$ asinh(a)-ash(a),numer;
(%o3) 0.0
```

Limita funkce

- Při vyšetřování funkce je potřeba charakterizovat její lokální vlastnosti v různých intervalech a v okolích důležitých bodů.
- Funkce f nemusí být definována v bodě, kolem kterého ji vyšetřujeme.

Bod $a \in R^*$ se nazývá **hromadný bod** množiny $A \subset R$,
pokud pro každé okolí $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Následující definice pomocí posloupností se nazývá ve smyslu Heineho.

Funkce f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označení $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pokud:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pak existuje (alespoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

Limita funkce

- Při vyšetřování funkce je potřeba charakterizovat její lokální vlastnosti v různých intervalech a v okolích důležitých bodů.
- Funkce f nemusí být definována v bodě, kolem kterého ji vyšetřujeme.

Bod $a \in R^*$ se nazývá **hromadný bod** množiny $A \subset R$,
pokud pro každé okolí $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Následující definice pomocí posloupností se nazývá ve smyslu Heineho.

Funkce f **má v bode** $a \in R^*$ **limitu** $b \in R^*$, označení $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pokud:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pak existuje (alespoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

Limita funkce

Limitu můžeme charakterizovat pomocí okolí $O(a)$ a $O(b)$.

Funkce f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označení $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pokud:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pro každé okolí $O(b)$ existuje okolí $O(a)$ takové, že pro všechny $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \begin{cases} a \in R^*. & \begin{cases} a \in R. & \text{Limita ve vlastním bodě } a. \\ a = \pm\infty. & \text{Limita v nevlastním bodě } a. \end{cases} \\ b \in R^*. & \begin{cases} b \in R. & \text{Vlastní (konečná) limita.} \\ b = \pm\infty. & \text{Nevlastní (nekonečná) limita.} \end{cases} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, kde $a \in R^*$, $b \in R$.

$\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, ve kterém je funkce f ohraničena.

Limita funkce

Limitu můžeme charakterizovat pomocí okolí $O(a)$ a $O(b)$.

Funkce f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označení $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pokud:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pro každé okolí $O(b)$ existuje okolí $O(a)$ takové, že pro všechny $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \begin{cases} a \in R^*. & \begin{cases} a \in R. & \text{Limita ve vlastním bodě } a. \\ a = \pm\infty. & \text{Limita v nevlastním bodě } a. \end{cases} \\ b \in R^*. & \begin{cases} b \in R. & \text{Vlastní (konečná) limita.} \\ b = \pm\infty. & \text{Nevlastní (nekonečná) limita.} \end{cases} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, kde $a \in R^*$, $b \in R$.

$\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, ve kterém je funkce f ohraničena.

Limita funkce

$a \in R^*$ je hromadný bod množin $D(f)$ a $D(g)$, $O(a)$ je okolí.

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$:
- $f(x) = g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ pokud existují.
- $f(x) \leq g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ pokud existují.

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$:
- $f(x) < g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ pokud existují.

Věta o dvou policistech.

$a \in R^*$ je hromadný bod množin $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$, $O(a)$ je okolí.

- $\forall x \in O(a),\ x \neq a$: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
- $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, kde $b \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- ∞ je hromadný bod definičního oboru $D(f) = R - \{0\}$ funkce $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- $x > 0. \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

Limita funkce

Limita složené funkce.

Funkce $y = f(x)$, $y = g(x)$, $H(f) \subset D(g)$, $a, b, c \in R^*$, $O(a)$ je okolí.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u) = c. \\ \left.\begin{array}{l} \bullet \ \forall x \in O(a),\ x \neq a\text{: } f(x) \neq b, \\ \qquad\qquad \text{resp.} \quad \bullet \ g(b) = c. \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \bullet \ \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c.$$

Substituce $u = f(x)$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \begin{bmatrix} \text{Subst. } u = f(x) \\ x \to a,\ u \to b. \end{bmatrix} = \lim\limits_{u\to b} g(u)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $a, b, c \in R^*$, $r \in R$. $\Rightarrow$ (Pokud mají výrazy smysl.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b$.
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \circledast g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \circledast \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \circledast c$, kde $\circledast$ je $+$, $-$, $\cdot$, resp. $/$.

Pokud některý z výrazů nemá smysl, neznamená to, že limita neexistuje.
Limitu musíme vypočítat jiným způsobem.

Limita funkce

Limita složené funkce.

Funkce $y = f(x)$, $y = g(x)$, $H(f) \subset D(g)$, $a, b, c \in R^*$, $O(a)$ je okolí.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u) = c. \\ \left.\begin{array}{r} \bullet \ \forall x \in O(a),\ x \neq a\colon f(x) \neq b, \\ \text{resp.} \quad \bullet \ g(b) = c. \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \bullet \ \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c.$$

Substituce $u = f(x)$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \left[\begin{array}{c} \text{Subst. } u = f(x) \\ x \to a,\ u \to b. \end{array}\right] = \lim\limits_{u\to b} g(u).$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $a, b, c \in R^*$, $r \in R$. $\Rightarrow$ (Pokud mají výrazy smysl.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|.$
- $\lim\limits_{x\to a} \left[r \cdot f(x)\right] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \circledast g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \circledast \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \circledast c,$ kde $\circledast$ je $+$, $-$, $\cdot$, resp. $/$.

Pokud některý z výrazů nemá smysl, neznamená to, že limita neexistuje.
Limitu musíme vypočítat jiným způsobem.

Limita funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- $f^{-}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x<a\}}$ Zúžení funkce f nalevo.
- $f^{+}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a<x\}}$ Zúžení funkce f napravo.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^{-}(x)$ Limita sleva.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^{+}(x)$ Limita zprava.

} Jednostranná limita funkce f v bodě a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (Oboustranná) limita funkce f v bodě a.

```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,x,0,plus);
      limit(1/x,x,0);
(%o1) -∞
(%o2) ∞
(%o3) infinity       /* Complex inf */
```

Pokud $a \in R$, $b \in R^*$, pak platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$.

Limita funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- $f^{-}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x<a\}}$ Zúžení funkce f nalevo.
- $f^{+}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a<x\}}$ Zúžení funkce f napravo.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^{-}(x)$ Limita sleva.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^{+}(x)$ Limita zprava.

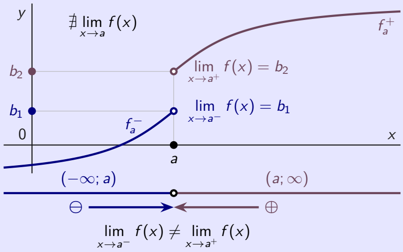
Jednostranná limita funkce f v bodě a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (Oboustranná) limita funkce f v bodě a.

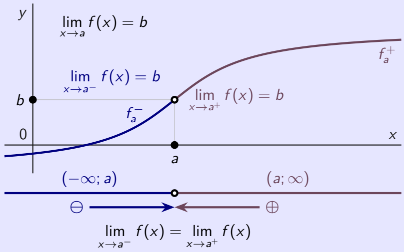
```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,x,0,plus);
      limit(1/x,x,0);
(%o1) -∞
(%o2) ∞
(%o3) infinity        /* Complex inf */
```

Pokud $a \in R$, $b \in R^*$, pak platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b. \Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b.$

Limita funkce



Jednostranné limity

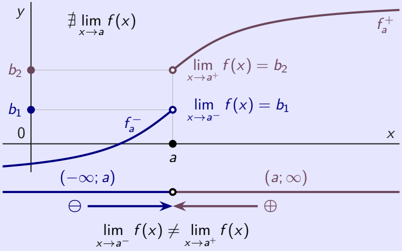


Oboustranné limity

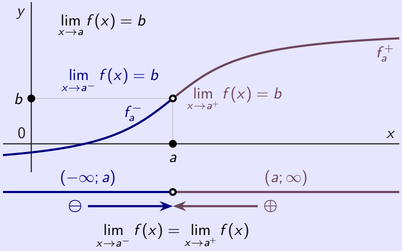
Důležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + bx} = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$

Limita funkce



Jednostranné limity



Oboustranné limity

Důležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + bx} = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$

Limita funkce

Při vyšetřování funkce f je důležité přezkoumat její vlastnosti i v jiných než vlastních bodech:

- Pro $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodů $a \in R$, pro které platí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Přímka $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice** (**vertikální**) grafu f, pokud $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (alespoň jedna z limit je nekonečná).
- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota se směrnicí** grafu f, pokud $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

Speciálně asymptota $y = q$ se nazývá **horizontální asymptota**, tj. $k = 0$ a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = q$ nebo $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = q$.

Limita funkce

Při vyšetřování funkce f je důležité přezkoumat její vlastnosti i v jiných než vlastních bodech:

- Pro $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodů $a \in R$, pro které platí $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Přímka $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice** (**vertikální**) grafu f,

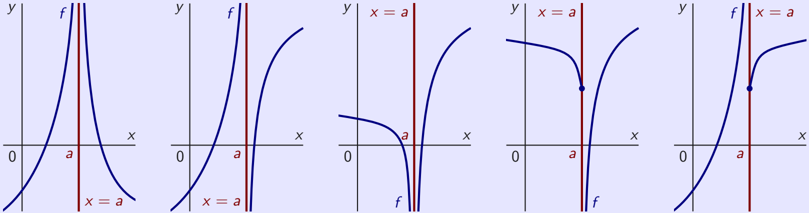
  pokud $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ (alespoň jedna z limit je nekonečná).
- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota se směrnicí** grafu f,

  pokud $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

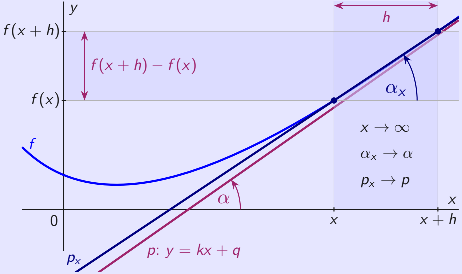
Speciálně asymptota $y = q$ se nazývá **horizontální asymptota**,

tj. $k = 0$ a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = q$ nebo $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = q$.

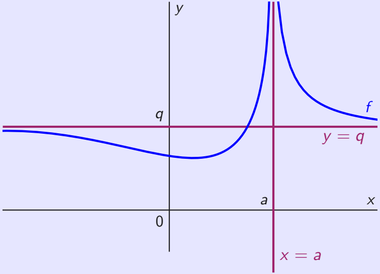
Limita funkce



Příklady asymptot bez směrnice.



Asymptota se směrnicí α.



Vertikální asymptota $y = q$.
Horizontální asymptota $x = a$.

Limita funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, pričemž $D(f)$ je neomezená množina.

- Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existují $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkce $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Přímka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ je asymptota se směrnicí $\frac{1}{4}$.

Limita funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, přičemž $D(f)$ je neomezená množina.

- Přímka $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existují $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkce $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Přímka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ je asymptota se směrnicí $\frac{1}{4}$.

Spojitost funkce

- Pojem limity funkce f v bodě a úzce souvisí se spojitostí funkce f v bodě a.
- Spojitost je také lokální záležitostí v nějakém okolí $O(a)$.

Následující definice spojitosti pomocí posloupností se nazývá ve smyslu Heineho.

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud:

- Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

- Pokud je $a \in D(f)$ izolován bod, pak funkce f je spojitá v bodě a.

(Pak existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.)

Spojitost můžeme charakterizovat pomocí okolí $O(a)$ a $O(f(a))$.

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud:

- Pro každé okolí $O(f(a))$ existuje okolí $O(a)$ takové, že pro všechny $x \in O(a)$ platí $f(x) \in O(f(a))$, tj. $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Spojitost funkce

- Pojem limity funkce f v bodě a úzce souvisí se spojitostí funkce f v bodě a.
- Spojitost je také lokální záležitostí v nějakém okolí $O(a)$.

Následující definice spojitosti pomocí posloupností se nazývá ve smyslu Heineho.

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud:

- Pro všechny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

- Pokud je $a \in D(f)$ izolován bod, pak funkce f je spojitá v bodě a.

(Pak existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.)

Spojitost můžeme charakterizovat pomocí okolí $O(a)$ a $O(f(a))$.

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud:

- Pro každé okolí $O(f(a))$ existuje okolí $O(a)$ takové, že
pro všechny $x \in O(a)$ platí $f(x) \in O(f(a))$, tj. $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Spojitost funkce

Je-li $a \in D(f)$ hromadný bod, pak se definice spojitosti shoduje s definicí limity.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $a \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$.

- Funkce f je spojitá v bodě a. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Funkce f, g jsou spojité v bodě $a \in D(f) \cap D(g)$, $r \in R$.

$\Rightarrow$ • $|f|$, • $f \pm g$, • rf, • fg, • $\frac{f}{g}$ pro $g(a) \neq 0$ jsou spojité v bodě a.

Spojitost složené funkce.

- Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$.
- Funkce g je spojitá v bodě $b = f(a) \in D(g)$.
- $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Funkce $F = g(f)$ je spojitá v bodě a.

Spojitost funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$.

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x\leq a\}}$ Zúžení funkce f nalevo.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a\leq x\}}$ Zúžení funkce f napravo.

- $f_a^-(x)$ spojitá v bodě a Spojitost zleva.
- $f_a^+(x)$ spojitá v bodě a Spojitost zprava.

Jednostranná spojitost funkce f v bodě a.

- $f(x)$ spojitá v bodě a (Oboustranná) spojitost funkce f v bodě a.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, ve kterém je f ohraničena.
- Funkce f je spojitá na množině $A \subset D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Funkce f nemusí být ohraničena na A.

Funkce f se nazývá **spojitá na množině** $A \subset D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě $a \in A$.

Spojitost funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$.

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x\leq a\}}$ Zúžení funkce f nalevo.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a\leq x\}}$ Zúžení funkce f napravo.

- $f_a^-(x)$ spojitá v bodě a Spojitost zleva.
- $f_a^+(x)$ spojitá v bodě a Spojitost zprava.

(Jednostranná spojitost funkce f v bodě a.)

- $f(x)$ spojitá v bodě a (Oboustranná) spojitost funkce f v bodě a.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

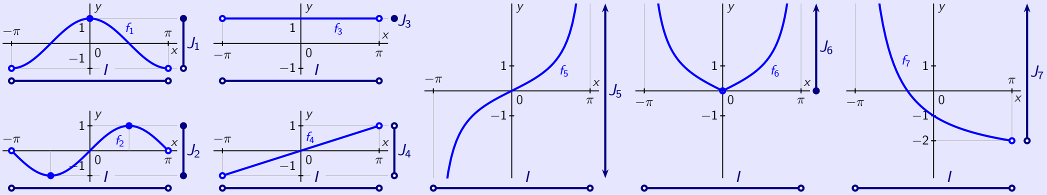
- Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, ve kterém je f ohraničena.
- Funkce f je spojitá na množině $A \subset D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Funkce f nemusí být ohraničena na A.

Funkce f se nazývá **spojitá na množině** $A \subset D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě $a \in A$.

Spojitost funkce

Pokud je funkce f spojitá na intervalu $I \subset R$, pak množina $f(I)$ je interval.

- $I = \langle a; b\rangle$ je uzavřený interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ je uzavřený interval.
- I není uzavřený interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ může být intervalem libovolného typu.



- $f_1(x) = \cos x$: $(-\pi; \pi) \to J_1 = (-1; 1\rangle$.
- $f_2(x) = \sin x$: $(-\pi; \pi) \to J_2 = \langle -1; 1\rangle$.
- $f_3(x) = 1$: $(-\pi; \pi) \to J_3 = \{1\}$.
- $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_4 = (-1; 1)$.
- $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $(-\pi; \pi) \to J_5 = (-\infty; \infty)$.
- $f_6(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$: $(-\pi; \pi) \to J_6 = \langle 0; \infty)$.
- $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_7 = (-2; \infty)$.

Spojitost funkce

Funkce f môže byť nespojitá pouze v hromadném bodě $a \in R$ (bod nespojitosti).

- Odstranitelná nespojitost

  Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in R$, $b \neq f(a)$.

- Neodstranitelná nespojitost I. typu

  $$\left.\begin{array}{r} \text{Existujú } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b^- \in R \\ \text{a } \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b^+ \in R \end{array}\right\} \; b^- \neq b^+.$$

  Rozdíl $c = b^+ - b^-$ se nazývá skok funkce f v bodě a.

- Neodstranitelná nespojitost II. typu

  $$\left.\begin{array}{r} \text{Aspoň jedna } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \\ \text{nebo } \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \end{array}\right\} \; \text{neexistuje nebo je nekonečná.}$$

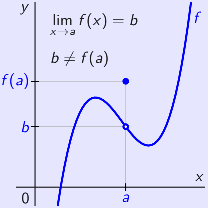
  Asymptotická nespojitost, alespoň jedna z jednostranných limit je nekonečná.

Funkce f je nespojitá v bodě $a \in R$.

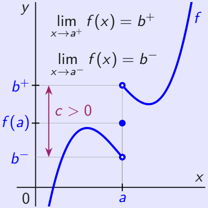
Obraz $f(a)$ může, ale nemusí existovat.

Spojitost funkce

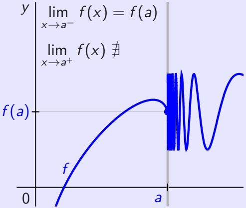
- Nespojitosť funkce f v bodě a.



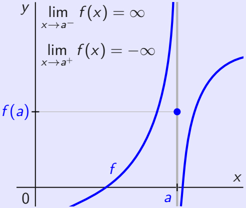
Odstranitelná nespojitost.



Neodstranitelná nespojitost I. typu.



Neodstranitelná nespojitost II. typu.



Neodstranitelná nespojitost II. typu. (asymptotická nespojitost).

Cauchyho věta o nulovém bodě.

- Funkce f je spojitá na $\langle a; b\rangle$.
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $c \in (a; b)$ takové, že $f(c) = 0$.

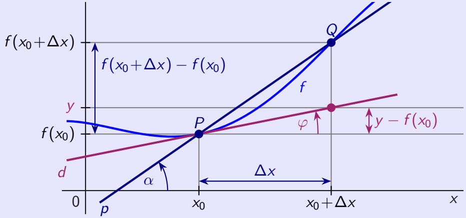
Diferenciální počet

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafu f.
- Přímka PQ má směrnici $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Tečna k f v bodě P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$,
  kde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ je její směrnice.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ směřuje k tečně).

- Tečna má směrnici $\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

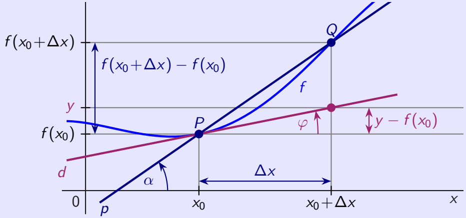
Geometrický význam derivace funkce v bodě. – Směrnice tečny.

Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leží na grafu f.
- Přímka PQ má směrnici $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Tečna k f v bodě P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,

  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je její směrnice.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ směřuje k tečně).

- Tečna má směrnici $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

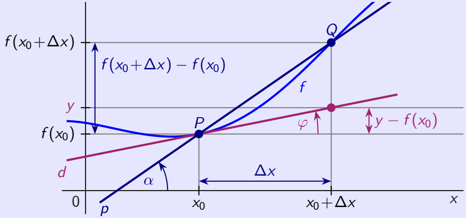
Geometrický význam derivace funkce v bodě. – Směrnice tečny.

Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafu f.
- Přímka PQ má směrnici $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Tečna k f v bodě P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$,

  kde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ je její směrnice.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ směřuje k tečně).

- Tečna má směrnici $\operatorname{tg} \varphi = \lim\limits_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometrický význam derivace funkce v bodě. – Směrnice tečny.

Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **derivaci v bodě** $x_0 \in D(f)$,
označení $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ nebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocí diferenciálů,

pokud existuje • $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{matrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{matrix} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

$$\left. \begin{array}{ll} \bullet\ f'(x_0) \in R. & \text{Vlastní (konečná)} \\ \bullet\ f'(x_0) = \infty \text{ aneb } f'(x_0) = -\infty. & \text{Nevlastní (nekonečná)} \end{array} \right\} \text{derivace } f \text{ v bodě } x_0.$$

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bodě x_0.

Spojitost funkce f v bodě x_0 nezaručuje existenci $f'(x_0)$.

Funkce f: $y = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **derivaci v bodě** $x_0 \in D(f)$,

označení $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ nebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocí diferenciálů,

pokud existuje • $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\begin{matrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{matrix} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

- $f'(x_0) \in R$. Vlastní (konečná)
- $f'(x_0) = \infty$ aneb $f'(x_0) = -\infty$. Nevlastní (nekonečná)

} derivace f v bodě x_0.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bodě x_0.

Spojitost funkce f v bodě x_0 nezaručuje existenci $f'(x_0)$.

Funkce $f\colon y = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Derivace reálné funkce

$f'(x_0)$ představuje geometricky směrnici tečny ke grafu f v bodě x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Tečna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ se směrnicí $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bodě x_0.
  Tečna d: $x = x_0$ bez směrnice (vertikální).

Vypočteme derivaci funkce $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Derivace reálné funkce

$f'(x_0)$ představuje geometricky směrnici tečny ke grafu f v bodě x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Tečna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ se směrnicí $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bodě x_0.
  Tečna d: $x = x_0$ bez směrnice (vertikální).

Vypočteme derivaci funkce $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$.

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivace zleva.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivace zprava.

Jednostranné derivace funkce f v bodě x_0.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Oboustranná) derivace funkce f v bodě x_0.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset \{x_0 \in D(f), f'(x_0) \text{ is finite}\}$, $A \neq \emptyset$.

- Pak $y = f'(x)$, $x \in A$ je funkce
  a nazývá se **derivace** funkce f na množině A, označení $f' = \frac{df}{dx}$, resp. $y' = \frac{dy}{dx}$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x_0 \in A$: $f'(x_0) \in R$ (konečná derivace). $\Rightarrow$
- Funkce f je spojitá na množině A.

Exponenciální funkce f: $y = e^x$, $x \in R$.

- $[e^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ pro všechny $x \in R$.

Derivace reálné funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$.

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivace zleva.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivace zprava.

} Jednostranné derivace funkce f v bodě x_0.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Oboustranná) derivace funkce f v bodě x_0.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset \{x_0 \in D(f), f'(x_0) \text{ is finite}\}$, $A \neq \emptyset$.

- Pak $y = f'(x)$, $x \in A$ je funkce
  a nazývá se **derivace** funkce f na množině A, označení $f' = \frac{df}{dx}$, resp. $y' = \frac{dy}{dx}$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x_0 \in A$: $f'(x_0) \in R$ (konečná derivace). $\Rightarrow$ • Funkce f je spojitá na množině A.

Exponenciální funkce f: $y = e^x$, $x \in R$.

- $[e^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ pro všechny $x \in R$.

Derivace reálné funkce

Derivace základních elementárních funkcí.

- $[c]' = 0$ pro $x \in R,\ c \in R$.
- $[x^n]' = nx^{n-1}$ pro $x \in R,\ n \in N$.
- $[e^x]' = e^x$ pro $x \in R$.
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.
- $[\sin x]' = \cos x$ pro $x \in R$.
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z$.
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1;1)$.
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in R$.
- $[\sinh x]' = \cosh x$ pro $x \in R$.
- $[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ pro $x \in R$.
- $[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ pro $x \in R$.
- $[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pro $x \in (-1;1)$.
- $[x]' = 1$ pro $x \in R$.
- $[x^a]' = ax^{a-1}$ pro $x > 0,\ a \in R$.
- $[a^x]' = a^x \ln a$ pro $x \in R,\ a > 0$.
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$ pro $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.
- $[\cos x]' = -\sin x$ pro $x \in R$.
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \neq k\pi,\ k \in Z$.
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1;1)$.
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in R$.
- $[\cosh x]' = \sinh x$ pro $x \in R$.
- $[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pro $x \neq 0$.
- $[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pro $x > 1$.
- $[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pro $x \in R - \langle -1;1 \rangle$.

Pro praktické potřeby je třeba vzorce se naučit nazpaměť.

Derivace reálné funkce

Při praktickém výpočtu derivaci používáme různé vzorce a pravidla.

Pravidla pro derivace.

Funkce f, g mají derivace f', g' na množině $A \neq \emptyset$, bod $x_0 \in A$, číslo $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ for $g(x_0) \neq 0$,

- $(cf)' = cf'$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkce f, g, h mají derivace f', g', h' na množině $A \neq \emptyset$.

- $[fgh]' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = [f'g + fg']h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkce f má derivaci $f'(x) \neq 0$ na množině $A \neq \emptyset$.

- $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Derivace reálné funkce

Při praktickém výpočtu derivaci používáme různé vzorce a pravidla.

Pravidla pro derivace.

Funkce f, g mají derivace f', g' na množině $A \neq \emptyset$, bod $x_0 \in A$, číslo $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ for $g(x_0) \neq 0$,

- $(cf)' = cf'$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkce f, g, h mají derivace f', g', h' na množině $A \neq \emptyset$.

- $[fgh]' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = [f'g + fg']h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkce f má derivaci $f'(x) \neq 0$ na množině $A \neq \emptyset$.

- $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Derivace reálné funkce

Derivace inverzní funkce.

Funkce $y = f(x)$, $x \in I$ je bijekce, $I \subset R$ je interval, $x_0 \in I$ je vnitřní bod.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je spojitá na } I. \\ \bullet\ f'(x_0) \neq 0 \text{ je konečná.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [f^{-1}]'(y_0) = \left.\frac{1}{f'(x_0)}\right|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Funkce f: $y = e^x$, $x \in R$ je spojitá a rostoucí, $f'(x) = e^x \neq 0$ pro $x \in R$.

- f^{-1}: $x = \ln y$, $y \in (0; \infty)$.
- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \left.\frac{1}{[e^x]'}\right|_{x=\ln y} = \left.\frac{1}{e^x}\right|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ pro $y \in (0; \infty)$.

Funkce f: $y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá a rostoucí,

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0 \text{ pro } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

- f^{-1}: $x = \arcsin y$, $y \in (-1; 1)$.
- $[\arcsin y]' = \left.\frac{1}{[\sin x]'}\right|_{x=\arcsin y} = \left.\frac{1}{\cos x}\right|_{x=\arcsin y} = \left.\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\right|_{x=\arcsin y}$
  $= \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ pro $y \in (-1; 1)$.

Derivace reálné funkce

Derivace inverzní funkce.

Funkce $y = f(x)$, $x \in I$ je bijekce, $I \subset R$ je interval, $x_0 \in I$ je vnitřní bod.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je spojitá na } I. \\ \bullet\ f'(x_0) \neq 0 \text{ je konečná.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\bigg|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Funkce $f\colon y = e^x$, $x \in R$ je spojitá a rostoucí, $f'(x) = e^x \neq 0$ pro $x \in R$.

- $f^{-1}\colon x = \ln y$, $y \in (0; \infty)$.
- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[e^x]'}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^x}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ pro $y \in (0; \infty)$.

Funkce $f\colon y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá a rostoucí,

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0 \text{ pro } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

- $f^{-1}\colon x = \arcsin y$, $y \in (-1; 1)$.
- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\Big|_{x=\arcsin y}$
  $= \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ pro $y \in (-1; 1)$.

Derivace reálné funkce

Derivace složené funkce.

Funkce $u = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(u)$, $u \in D(g)$ takové, že $H(f) \subset D(g)$,
složená funkce $y = F(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$.

- $x_0 \in D(f)$, $u_0 = f(x_0)$.
- $f'(x_0)$, $g'(u_0)$ jsou konečné.

$\Rightarrow$ • $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

- $[a^x]' = \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- $[x^a]' = \left[e^{\ln x^a}\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$, $x > 0$, $a \in R$.
- $[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x]$, $x > 0$.
- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in R$.

$x \in D(f)$, $f(x) > 0$, existuje $f'(x)$. $\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot \left[\ln f(x)\right]'$ (Logaritmická derivace funkce f).

Derivace reálné funkce

Derivace složené funkce.

Funkce $u = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(u)$, $u \in D(g)$ takové, že $H(f) \subset D(g)$,
složená funkce $y = F(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$.

- $x_0 \in D(f)$, $u_0 = f(x_0)$.
- $f'(x_0)$, $g'(u_0)$ jsou konečné.

$\Rightarrow$ • $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

- $[a^x]' = \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- $[x^a]' = \left[e^{\ln x^a}\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$, $x > 0$, $a \in R$.
- $[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x]$, $x > 0$.
- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in R$.

$x \in D(f)$, $f(x) > 0$, existuje $f'(x)$. $\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
$\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot \left[\ln f(x)\right]'$ (Logaritmická derivace funkce f).

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

- Často potřebujeme danou funkci f aproximovat jinou jednodušší funkcí g tak, aby rozdíl $|f(x) - g(x)|$ byl co nejmenší.
- Většinou postačí **lokální sbližování** v nějakém okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, konečná $f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0), & x \in R. \\ \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h, & h \in R. \end{array}\right\} \textbf{Diferenciál} \text{ funkce } f \text{ v bodě } x_0.$$

Potom se funkce f nazývá **diferencovatelná** v bodě x_0.

Funkce f: $y = x$, $x \in R$, bod $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$ (konečná).

- $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$ (konečná).

- $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, $h \in R$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, resp. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

- Často potřebujeme danou funkci f aproximovat jinou jednodušší funkcí g tak, aby rozdíl $|f(x) - g(x)|$ byl co nejmenší.
- Většinou postačí **lokální sbližování** v nějakém okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, konečná $f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R. \\ \bullet\ df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h,\ h \in R. \end{array}\right\}$$ **Diferenciál** funkce f v bodě x_0.

Potom se funkce f nazývá **diferencovatelná** v bodě x_0.

Funkce $f\colon y = x$, $x \in R$, bod $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$ (konečná).

- $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$ (konečná).

- $df(x_0) = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot dx$, $h \in R$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $f' = \frac{df}{dx}$.

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Nejlepší lokální lineární sbližování.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in D(f)$.

- Aproximace funkce f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 pomocí tečny d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ je nejlepší ze všech saproximací pomocí lineární funkce (přímky).

Vypočtěte přibližně $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nechť $O(1)$ je taková, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Přesně $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Nejlepší lokální lineární sbližování.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in D(f)$.

- Aproximace funkce f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0
  pomocí tečny d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$
  je nejlepší ze všech saproximací pomocí lineární funkce (přímky).

Vypočtěte přibližně $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nechť $O(1)$ je taková, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Přesně $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Proměnná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.

Aproximace funkce f má smysl pouze pro x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

```
(%i9)  c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
       p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
       h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
       subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c=1.06 \quad f(1.06)=1.0097588$ approx 1.01

Proměnná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.
Aproximace funkce f má smysl pouze pro x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c=0.9 \quad f(0.9)=0.98259319$ approx 0.98333333
$c=1.1 \quad f(1.1)=1.0160119$ approx 1.0166667
$c=1.2 \quad f(1.2)=1.0308533$ approx 1.0333333
$c=1.5 \quad f(1.5)=1.0699132$ approx 1.0833333
$c=2.0 \quad f(2.0)=1.122462$ approx 1.1666667
$c=4 \quad f(4)=1.259921$ approx 1.5
$c=9 \quad f(9)=1.4422496$ approx 2.3333333
$c=30 \quad f(30)=1.7627344$ approx 5.8333333
$c=64 \quad f(64)=2.0$ approx 11.5

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Funkce $y=f(x)$, $x\in D(f)$ je diferencovatelná, pak (pokud existují):

- $y=f'(x)=f^{(1)}(x)$, $x\in A_1\subset D(f)$, $A_1\neq\emptyset$.
  Derivace prvního řádu (první derivace) f na množině A_1.
- $y=[f'(x)]'=f''(x)=f^{(2)}(x)$, $x\in A_2\subset A_1$, $A_2\neq\emptyset$.
  Derivace druhého řádu (druhá derivace) f na množině A_2.
- $y=[f''(x)]'=f'''(x)=f^{(3)}(x)$, $x\in A_3\subset A_2$, $A_3\neq\emptyset$.
  Derivace třetího řádu (třetí derivace) f na množině A_3. $\ldots$
- $y=[f^{(n-1)}(x)]'=f^{(n)}(x)$, $x\in A_n\subset A_{n-1}$, $A_n\neq\emptyset$.
  Derivace n-tého řádu (n-ta derivace) f na množině A_n.

Speciálně: • $y=f(x)=f^{(0)}(x)$, $x\in D(f)$. Nulová derivace (0-ta derivace) f.

n-ta derivace funkce f v bodě $x_0\in D(f)$ (pokud existuje):

- $f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}$, $x\in A_n$, $n\in N$.

Funkce $f^{(n-1)}$ musí být definována v nějakém okolí $O(x_0)$.

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Výpočet $f^{(n)}$, $n \in N$ může být obecně velmi pracný.

Funkce $y = x^k$, $x \in R$, kde $k \in N$.

- $[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, $x \in R$ pro $n = 1, 2, \ldots, k$,
  $[x^k]' = kx^{k-1}$, $[x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $[x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, ..., $[x^k]^{(k)} = k!$.
- $[x^k]^{(n)} = 0$, $x \in R$ pro $n = k+1, k+2, k+3, \ldots$,
  $[x^k]^{(k+1)} = [k!]' = 0$, $[x^k]^{(k+2)} = [x^k]^{(k+3)} = [0]' = 0$, ...

```
(%i9) f(x,k):=x^k;fn(x,k,n):=diff(f(x,k),x,n)$
      fn(x,k,1);fn(x,k,2);fn(x,k,k);
      fn(x,5,1);fn(x,5,2);fn(x,5,5);fn(x,5,6);
```

(%o1) $f(x,k) := x^k$
(%o3) kx^{k-1}
(%o4) $(k-1)kx^{k-2}$
(%o5) $\frac{d^k}{dx^k}x^k$
(%o6) $5x^4$
(%o7) $20x^3$
(%o8) 120
(%o9) 0

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Funkce $y = e^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[e^x]^{(n)} = e^x$, $x \in R$ pro všechny $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Funkce $y = \sin x$, $x \in R$.

- $[\sin x]' = \cos x$,
  $[\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x$,
  $[\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x$,
  $[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x$,
  $[\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \dots$
- $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)}$ pro $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\sin x]^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,
  $[\sin x]^{(2k-1)} = (-1)^{k+1} \cos x$, $k \in N$.

Funkce $y = \cos x$, $x \in R$.

- $[\cos x]' = -\sin x$,
  $[\cos x]'' = [-\sin x]' = -\cos x$,
  $[\cos x]''' = [-\cos x]'' = \sin x$,
  $[\cos x]^{(4)} = [\sin x]''' = \cos x$,
  $[\cos x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = -\sin x, \dots$
- $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)}$ pro $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\cos x]^{(2k)} = (-1)^k \cos x$,
  $[\cos x]^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x$, $k \in N$.

Leibnizův vzorec.

Funkce f, g mají derivace na množině A až do řádu $n \in N$ (včetně).

- $[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \dots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$.

Diferenciál funkce a derivace vyšších řádů

Funkce $y = e^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[e^x]^{(n)} = e^x$, $x \in R$ pro všechny $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Funkce $y = \sin x$, $x \in R$.

- $[\sin x]' = \cos x$,
  $[\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x$,
  $[\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x$,
  $[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x$,
  $[\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ldots$
- $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)}$ pro $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\sin x]^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,
  $[\sin x]^{(2k-1)} = (-1)^{k+1} \cos x$, $k \in N$.

Funkce $y = \cos x$, $x \in R$.

- $[\cos x]' = -\sin x$,
  $[\cos x]'' = [-\sin x]' = -\cos x$,
  $[\cos x]''' = [-\cos x]'' = \sin x$,
  $[\cos x]^{(4)} = [\sin x]''' = \cos x$,
  $[\cos x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = -\sin x, \ldots$
- $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)}$ pro $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\cos x]^{(2k)} = (-1)^k \cos x$,
  $[\cos x]^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x$, $k \in N$.

Leibnizův vzorec.

Funkce f, g mají derivace na množině A až do řádu $n \in N$ (včetně).

- $[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$.

Aplikace derivace funkce

Věty o střední hodnotě funkce (Rolleho, Lagrangeova) a l'Hospitalovo pravidlo patří mezi nejčastější aplikace derivace v praxi.

Rolleho věta o střední hodnotě.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Funkce } f \text{ je spojitá na } \langle a; b\rangle. \\ \bullet\ f(a) = f(b). \\ \bullet\ f'(x) \in R^* \text{ pro všechny } x \in (a; b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Existuje } c \in (a; b)\colon f'(c) = 0, \quad c = a + \theta(b-a), \text{ kde } \theta \in (0; 1).$$

Lagrangeova věta o střední hodnotě.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Funkce } f \text{ je spojitá na } \langle a; b\rangle. \\ \bullet\ f'(x) \in R^* \text{ pro všechny } x \in (a; b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Existuje } c \in (a; b)\colon f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Označme $b = a + h$, $h \in R$, pro dostatečně malé h můžeme předpokládat $a + \theta h \approx a$.

- $h = b - a$, $c = a + \theta(b-a) = a + \theta h$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(b) - f(a) = f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h) \cdot h$, $h \in R$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h) \cdot h \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a, h)$.

Aplikace derivace funkce

Věty o střední hodnotě funkce (Rolleho, Lagrangeova) a l'Hospitalovo pravidlo patří mezi nejčastější aplikace derivace v praxi.

Rolleho věta o střední hodnotě.

- Funkce f je spojitá na $\langle a; b\rangle$.
- $f(a) = f(b)$.
- $f'(x) \in R^*$ pro všechny $x \in (a; b)$.

$\Rightarrow$

- Existuje $c \in (a; b)$: $f'(c) = 0$,
  $c = a + \theta(b - a)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

Lagrangeova věta o střední hodnotě.

- Funkce f je spojitá na $\langle a; b\rangle$.
- $f'(x) \in R^*$ pro všechny $x \in (a; b)$.

$\Rightarrow$

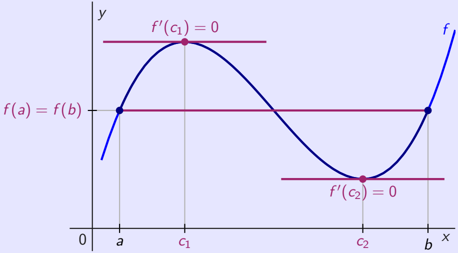
- Existuje $c \in (a; b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

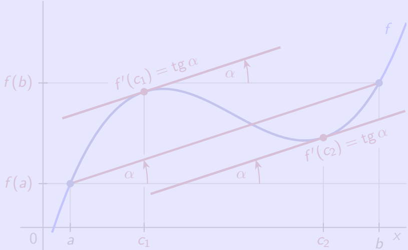
Označme $b = a + h$, $h \in R$, pro dostatečně malé h můžeme předpokládat $a + \theta h \approx a$.

- $h = b - a$, $c = a + \theta(b - a) = a + \theta h$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(b) - f(a) = f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h) \cdot h$, $h \in R$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h) \cdot h \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a, h)$.

Aplikace derivace funkce

Rolleho a Lagrangeova věty zaručují existenci $c \in (a; b)$.
Pomocí nich však takové body neumíme najít a ani nedokážeme určit jejich počet.



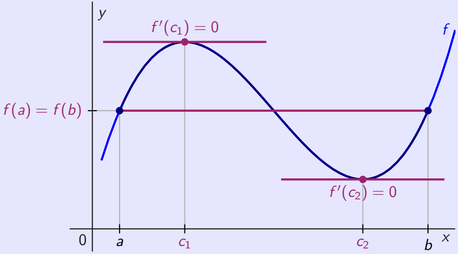


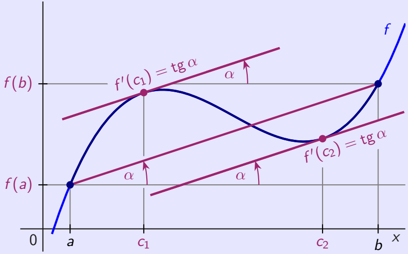
- $f'(c) = 0$
  znamená, že tečna ke grafu funkce f v bodě c je rovnoběžná s osou x.

- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  znamená, že tečna ke grafu funkce f v bodě c je rovnoběžná s přímkou spojující body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, tj. $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$.

Aplikace derivace funkce

Rolleho a Lagrangeova věty zaručují existenci $c \in (a; b)$.
Pomocí nich však takové body neumíme najít a ani nedokážeme určit jejich počet.





- $f'(c) = 0$

  znamená, že tečna ke grafu funkce f v bodě c je rovnoběžná s osou x.

- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

  znamená, že tečna ke grafu funkce f v bodě c je rovnoběžná s přímkou spojující body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, tj. $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$.

Aplikace derivace funkce

Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$ se často počítají pomocí l'Hospitalova pravidla.

L'Hospitalovo pravidlo. Funkce f, g, bod $a \in R^*$, okolí $O(a)$.

- $f'(x) \in R^*$, $g'(x) \in R^*$ pro všechny $x \in O(a)$, $x \neq a$.
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ $[L'H\frac{\infty}{\infty}]$.

  resp. • $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ $[L'H\frac{0}{0}]$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

Z existence $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nevyplývá existence $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- Je velmi důležité ověřit všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla.
- Platnost předpokladu $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$ se ověřuje průběžně během výpočtu.
- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i několikrát za sebou:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}, \ k \in N.$$

Aplikace derivace funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
okolí $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorův polynom stupně n funkce f se středem v bodě x_0 je definován jako

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x \in O(x_0).$$

Pro $x_0 = 0$ se nazývá **Maclaurinův polynom**

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!},\ x \in O(0).$$

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h \in O(0).$$

Zbytek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadřuje chybu aproximace f pomocí $T_n(x)$.

- $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in O(x_0),\ \text{kde } \theta \in (0;1).$$ (Lagrangeův tvar.)

Aplikace derivace funkce

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
okolí $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorův polynom stupně n funkce f se středem v bodě x_0 je definován jako

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Pro $x_0 = 0$ se nazývá **Maclaurinův polynom**

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Zbytek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadřuje chybu aproximace f pomocí $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, kde $\theta \in (0;1)$. (Lagrangeův tvar.)

Aplikace derivace funkce

Nejlepší lokální aproximace pomocí polynomů.

Aproximace f pomocí $T_n(x)$ stupně $n \in N$ ve středu $x_0 \in D(f)$:

- Má lokální charakter v okolí $O(x_0)$.
- Je nejlepší ze všech aproximací pomocí polynomů stupně n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \langle -1; \infty)$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3} \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$.

- $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[3]{1+x} \approx T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x \in O(0)$.

$\approx T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_2(x)$.

$\approx T_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} = 1 + \frac{x}{3}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_1(x)$.

Aplikace derivace funkce

Nejlepší lokální aproximace pomocí polynomů.

Aproximace f pomocí $T_n(x)$ stupně $n \in N$ ve středu $x_0 \in D(f)$:

- Má lokální charakter v okolí $O(x_0)$.
- Je nejlepší ze všech aproximací pomocí polynomů stupně n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \langle -1; \infty)$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$. • $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. • $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3} \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$. • $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[3]{1+x} \approx T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x \in O(0)$.

$\approx T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_2(x)$.

$\approx T_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} = 1 + \frac{x}{3}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_1(x)$.

Aplikace derivace funkce

Vypočítáme Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Ruční derivování je dost pracné.

```
(%i2) f(x):=sqrt(x^2+1)$ print("f(x)=", f(x),
      ", f'(x)=", diff(f(x),x),
      ", f''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,2)),
      ", f'''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,1);
```

$1 + \cdots$

```
(%i4) taylor(f(x),x,0,2);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,3);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i6) taylor(f(x),x,0,4);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$

```
(%i7) taylor(f(x),x,0,18);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \frac{21x^{12}}{1024} + \frac{33x^{14}}{2048} - \frac{429x^{16}}{32768} + \frac{715x^{18}}{65536} + \cdots$

Vyšetřování průběhu funkce

Důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce je určení intervalů, na kterých je tato funkce monotónní.

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkce f je na I

- Rostoucí. $\Leftrightarrow$ pro všechny $x \in I$ platí
- Klesající. $\Leftrightarrow$
- Neklesající. $\Leftrightarrow$
- Nerostoucí. $\Leftrightarrow$
- Konstantní. $\Leftrightarrow$

- $f'(x) > 0$.
- $f'(x) < 0$.
- $f'(x) \geq 0$.
- $f'(x) \leq 0$.
- $f'(x) = 0$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnitřní bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- Funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkce f může mít lokální extrém i v bodě, kde derivace neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenci lokálního extrému funkce f v bodě $x_0 \in D(f)$.

Vyšetřování průběhu funkce

Důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce je určení intervalů, na kterých je tato funkce monotónní.

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkce f je na I

- Rostoucí. $\Leftrightarrow$ pro všechny $x \in I$ platí • $f'(x) > 0$.
- Klesající. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) < 0$.
- Neklesající. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \geq 0$.
- Nerostoucí. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \leq 0$.
- Konstantní. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) = 0$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnitřní bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- Funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkce f může mít lokální extrém i v bodě, kde derivace neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenci lokálního extrému funkce f v bodě $x_0 \in D(f)$.

Vyšetřování průběhu funkce

- Pokud platí $f'(x_0) = 0$, pak se bod $x_0 \in D(f)$ nazývá **stacionární**.

Při hledání lokálních extrémů funkce f musíme prozkoumat:

- Všechny body $x \in D(f)$, pro které platí $f'(x) = 0$.
- Všechny body $x \in D(f)$, ve kterých $f'(x)$ neexistuje.

Při hledání globálních extrémů funkce f musíme dodatečně prozkoumat:

- Všechny hraniční body $x \in D(f)$.

Postačující podmínka existence lokálního extrému.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, pro všechny $x \in O(x_0)$ existuje $f'(x)$.

- $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ pro } x < x_0 \text{ (Rostoucí nalevo).} \\ f'(x) < 0 \text{ pro } x > x_0 \text{ (Klesající napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.
- $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ pro } x < x_0 \text{ (Klesající nalevo).} \\ f'(x) > 0 \text{ pro } x > x_0 \text{ (Rrostoucí napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.
- $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pro $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ není extrém.

Vyšetřování průběhu funkce

- Pokud platí $f'(x_0) = 0$, pak se bod $x_0 \in D(f)$ nazývá **stacionární**.

Při hledání lokálních extrémů funkce f musíme prozkoumat:

- Všechny body $x \in D(f)$, pro které platí $f'(x) = 0$.
- Všechny body $x \in D(f)$, ve kterých $f'(x)$ neexistuje.

Při hledání globálních extrémů funkce f musíme dodatečně prozkoumat:

- Všechny hraniční body $x \in D(f)$.

Postačující podmínka existence lokálního extrému.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, pro všechny $x \in O(x_0)$ existuje $f'(x)$.

- $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ pro } x < x_0 \text{ (Rostoucí nalevo).} \\ f'(x) < 0 \text{ pro } x > x_0 \text{ (Klesající napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.
- $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ pro } x < x_0 \text{ (Klesající nalevo).} \\ f'(x) > 0 \text{ pro } x > x_0 \text{ (Rrostoucí napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.
- $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pro $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ není extrém.

Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování lokálních extrémů funkce můžeme použít i druhou derivaci.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in R - \{0\}$ (konečná nenulová).

Pokud $f'(x_0) = 0$ a
- $f''(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.
- $f''(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $x \in R$.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $x \in R$. • $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = 1$ nebo $x = 3$.

  $f''(1) = -6 < 0. \Rightarrow f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2 > 0$ je ostré lokální maximum.

  $f''(3) = 6 > 0. \Rightarrow f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2 < 0$ je ostré lokální minimum.

Pokud $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, pak funkce f může, ale nemusí mít extrém v bodě x_0.

- Funkce $f(x) = x^3$, $x \in R$ nemá extrém $f(0) = 0$ v bodě $x = 0$.

  $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

  $[x^3 < f(0) = 0$ pro $x < 0$ a $x^3 > f(0) = 0$ pro $x > 0.]$

- Funkce $f(x) = x^4$, $x \in R$ má osté lokální minimum $f(0) = 0$ v bodě $x = 0$.

  $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'(0) = f''(0) = 0$. $[x^4 > f(0) = 0$ pro všechny $x \neq 0.]$

Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování lokálních extrémů funkce můžeme použít i druhou derivaci.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in R - \{0\}$ (konečná nenulová).

Pokud $f'(x_0) = 0$ a
- $f''(x_0) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.
- $f''(x_0) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $x \in R$.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $x \in R$. • $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $x = 1$ nebo $x = 3$.
  $f''(1) = -6 < 0$. $\Rightarrow$ $f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2 > 0$ je ostré lokální maximum.
  $f''(3) = 6 > 0$. $\Rightarrow$ $f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2 < 0$ je ostré lokální minimum.

Pokud $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, pak funkce f může, ale nemusí mít extrém v bodě x_0.

- Funkce $f(x) = x^3$, $x \in R$ nemá extrém $f(0) = 0$ v bodě $x = 0$.
  $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'(0) = f''(0) = 0$.
  [$x^3 < f(0) = 0$ pro $x < 0$ a $x^3 > f(0) = 0$ pro $x > 0$.]
- Funkce $f(x) = x^4$, $x \in R$ má osté lokální minimum $f(0) = 0$ v bodě $x = 0$.
  $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'(0) = f''(0) = 0$. [$x^4 > f(0) = 0$ pro všechny $x \neq 0$.]

Vyšetřování průběhu funkce

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• Konvexní.	$\Leftrightarrow$	f' je na I	• Neklesající.
	• Konkávní.	$\Leftrightarrow$		• Nerostoucí.
	• Ostře konvexní.	$\Leftrightarrow$		• Rostoucí.
	• Ostře konkávní.	$\Leftrightarrow$		• Klesající.

Funkce f je spojitá na intervalu I, pro všechny $x \in I$ existuje $f''(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• Konvexní.	$\Leftrightarrow$	pro všechny $x \in I$ platí	• $f''(x) > 0$.
	• Konkávní.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) < 0$.
	• Ostře konvexní.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \geq 0$.
	• Ostře konkávní.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \leq 0$.

Při vyšetřování konvexnosti a konkávnosti funkce f musíme prozkoumat:

- Všechny body $x \in D(f)$, kde je funkce f spojitá a pro které existuje $f''(x) = 0$.
- Všechny body $x \in D(f)$, kde je funkce f spojitá a ve kterých $f''(x)$ neexistuje.

Vyšetřování průběhu funkce

Nutná podmínka pro existenci inflexního bodu.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnitřní bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- x_0 je inflexní bod funkce f. $\Rightarrow$ • $f''(x_0) = 0$.

- Funkce f může mít inflexi v bodě, kde druhá derivace neexistuje.

Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému.

Funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$, pro všechny $x \in O(x_0)$ existuje $f''(x)$.

- $f''(x) > 0$ pro $x < x_0$ (Konvexní nalevo). $f''(x) < 0$ pro $x > x_0$ (Konkávní napravo). $\Rightarrow$ • x_0 je inflexní bod f.
- $f''(x) < 0$ pro $x < x_0$ (Konkávní nalevo). $f''(x) > 0$ pro $x > x_0$ (Konvexní napravo). $\Rightarrow$ • x_0 je inflexní bod f.
- $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$ pro $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • x_0 není inflexní bod f.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \in R$.

- $f'''(x_0) \neq 0$ (nenulová). $\Rightarrow$ • x_0 je inflexní bod f.

Vyšetřování průběhu funkce

Předchozí výsledky můžeme zobecnit.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k-1$, $k \in N$ (liché) .
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ f je rostoucí v bodě x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ f je klesající v bodě x_0.

  $f(x_0)$ není extrém.
- $n = 2k$, $k \in N$ (sudé).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ $f(x_0)$ je ostré lokální minimum.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ $f(x_0)$ je ostré lokální maximum.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k+1$, $k \in N$ (liché) .
  - x_0 je inflexní bod funkce f.
- $n = 2k$, $k \in N$ (sudé).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ f je ostře konvexní v bodě x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ f je ostře konkávní v bodě x_0.

Průběh funkce

Vyšetřit prieběh funkce f znamená určit:

- Definiční obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Sudost, lichost, periodicita, případně jiné speciální vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodech nespojitosti, hraničních bodech a v bodech $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na kterých je f kladná a záporná.
- f', stacionární body, lokální a globální extrémy, intervaly, na kterých f roste, klesá a je konstantní.
- f'', inflexní body, intervaly, na kterých je f konvexní a konkávní.
- Asymptoty bez směrnice a asymptoty se směrnicí.
- Obor hodnot $H(f)$ a nastínit graf funkce.

  Graf nám obvykle poskytne nejnázornější představu o průběhu funkce. Při jeho konstrukci využíváme všech zjištěných údajů.

  Mnohokrát jsou ale nedostatečné, proto je musíme doplnit vhodně zvolenými funkčními hodnotami.

Neurčitý integrál

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

Základní pojmy

- Zavedení pojmu derivace jsme motivovali úkolem určit okamžitou rychlost hmotného bodu, který se pohybuje po přímce.
- Problém můžeme obrátit a hledat dráhu hmotného bodu za předpokladu, že známe jeho okamžitou rychlost v daném čase.

Funkce $f(x)$, $x \in I$ je definována na otevřeném intervalu $I \subset R$.
Funkce $F(x)$, $x \in I$ se nazývá **primitivní funkce** k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud pro všechny $x \in I$ existuje derivace $F'(x)$ a pro všechny $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ v intervalu I, $c \in R$ (konstanta).

$\Rightarrow$ • Funkce $G(x) = F(x) + c$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I.

- Z definice vyplývá, že primitivní funkce F je spojitá na intervalu I.

Funkce $F(x)$, $G(x)$ jsou primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I.

$\Rightarrow$ • Funkce $(F - G)(x) = F(x) - G(x)$ je konstantní na intervalu I.

Základní pojmy

- Zavedení pojmu derivace jsme motivovali úkolem určit okamžitou rychlost hmotného bodu, který se pohybuje po přímce.
- Problém můžeme obrátit a hledat dráhu hmotného bodu za předpokladu, že známe jeho okamžitou rychlost v daném čase.

Funkce $f(x)$, $x \in I$ je definována na otevřeném intervalu $I \subset R$.
Funkce $F(x)$, $x \in I$ se nazývá **primitivní funkce** k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud pro všechny $x \in I$ existuje derivace $F'(x)$ a pro všechny $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ v intervalu I, $c \in R$ (konstanta).

$\Rightarrow$ • Funkce $G(x) = F(x) + c$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I.

- Z definice vyplývá, že primitivní funkce F je spojitá na intervalu I.

Funkce $F(x)$, $G(x)$ jsou primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I.

$\Rightarrow$ • Funkce $(F - G)(x) = F(x) - G(x)$ je konstantní na intervalu I.

Základní pojmy

Všechny primitivní funkce k dané funkci $f(x)$, $x \in I$ na intervalu I se liší od sebe pouze konstantou a tvoří množinu $\{F(x)+c, c \in R\}$, přičemž F je libovolná primitivní funkce. Tato množina se nazývá **neurčitý integrál funkce f na intervalu I** a označuje se

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x)+c, x \in I, c \in R\} = F(x)+c,\ x \in I,\ c \in R.$

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervalu I.

$\Rightarrow$
- Existuje $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

K integrování se používá příkaz `integrate`.

```
(%i1) 'integrate(1/(1+x^2),x)
```

(%o1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Základní pojmy

(%i1) `f(x):=1/(1-x^2); integrate(f(x),x);`

(%o1) $\frac{1}{1-x^2}$

(%o2) $\frac{\log(x+1)}{2} - \frac{\log(x-1)}{2}$

- Derivování a integrování jsou inverzní operace na intervalu I.

Funkce F je primitivní k funkci f na intervalu I, $c \in R$.

pro všechny $x \in I$ platí:

- $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$
- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$

(%i1) `integrate(1/(1+x^2),x);`

(%o1) $\operatorname{atan} x$

(%i2) `diff(%,x);`

(%o2) $\frac{1}{x^2+1}$

Základní pojmy

Neurčité integrály základních elementárních funkcí. (1. část)

- $\displaystyle\int dx = \int 1\,dx = x + c$ pro $x \in R$.
- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ pro $a \neq -1,\ x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ pro $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$ pro $f(x) \neq 0$.
- $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R$.
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ pro $a > 0,\ a \neq 1,\ x \in R$.
- $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R$.
- $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R\ x \neq \frac{k\pi}{a},\ k \in Z$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a},\ k \in Z$.
- $\displaystyle\int \sinh ax\,dx = \frac{\cosh ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R$.
- $\displaystyle\int \cosh ax\,dx = \frac{\sinh ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c$ pro $a \neq 0,\ x \in R$.

Základní pojmy

Neurčité integrály základních elementárních funkcí. (2. část)

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a} + c_2,$ pro $a \neq 0,\ x \in R.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$ pro $a \neq 0,\ x \in R - \{a\}.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + c_1 = -\arccos\frac{x}{|a|} + c_2,$ pro $a > 0,\ x \in (-a; a).$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c,$ pro $a > 0,\ x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty).$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c,$ pro $a > 0,\ x \in R.$

- V tabulkách jsou uvedeny základní vzorce pro integrování.
- Tyto vzorce úzce souvisí se vzorci pro derivace elementárních funkcí.
- Pro praktické účely je třeba si je zapamatovat.

Metody integrování

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c,\ x\in R.$ (tabulkový integrál).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2+1),x);
(%o1) asinh x
```

- Oba výsledky jsou správné, protože argument sinus hyperbolický je definován jako $y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R$ (viz elementární funkce).

Metoda rozkladu.

Funkce F, G jsou primitivní k funkcím f, g na intervalu I, $a, b\in R$, $|a|+|b|>0$.

$\Rightarrow$ $aF+bG$ je primitivní k funkci $af+bg$ na intervalu I a platí:

- $\int [af(x)+bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x)+bG(x)+c,\ x\in I,\ c\in R.$

- V praxi píšeme přímo $\int [af(x)+bg(x)]\,dx = aF(x)+bG(x)+c.$

Metody integrování

Metoda per partes.

Funkce u, v mají spojité derivace u', v' na intervalu I.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$

• $[uv]' = u'v + uv'$. $\Rightarrow$ • $uv = \displaystyle\int [uv]' = \int u'v + \int uv'$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v$.

- Metodu per partes můžeme použít několikrát za sebou, ale musíme dávat pozor, abychom se opětovným použitím nevrátili k původnímu integrálu.
- Metoda per partes se používá poměrně často. Je vhodná k integrování funkcí

$$P(x)\, \mathrm{e}^{ax}, \quad P(x) \cos ax, \quad P(x) \sin ax, \quad P(x) \ln Q(x), \quad P(x) \operatorname{arctg} Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou reálné polynomy, $a \in R$, $a \neq 0$.

- $\displaystyle\int \ln x\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = 1 & v & = x \end{array}\right] = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

Metody integrování

Metoda substituce.

Funkce F je primitivní k funkci f na intervalu I,

$x = \varphi(t)$ má derivaci na intervalu J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow F\big(\varphi(t)\big)$ je primitivní k funkci $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J a platí:

- $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c,\ t \in J,\ c \in R.$

I, J jsou intervaly, $x = \varphi(t) : J \to I$ má derivaci $\varphi'(t) \neq 0$ na J,

funkce $F(t)$ je primitivní k $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I a platí:

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- V prvním případě nemusíme použít inverzní substituci,
  ale v druhém případě musíme použít inverzní substituci $t = \varphi^{-1}(x)$.

Metody integrování

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

  (Rovnice s integrálem jako neznámým parametrem.)

  $\displaystyle\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x + 2c. \Rightarrow$

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x > 0,\ c \in R.$

$f(x)$ má na intervalu I primitivní funkci $F(x)$, reálné číslo $a, b \in R$, $a \neq 0$.

- $\displaystyle\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{r} \text{Subst.}\ x = at+b \\ dx = a\,dt \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c.$

- $\displaystyle\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{r} \text{Subst.}\ x = t+b \\ dx = dt \end{array}\right] = \int f(x)\,dx = F(x) + c = F(t+b) + c$ pro $a = 1$.

- $\displaystyle\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{r} \text{Subst.}\ x = -t \\ dx = -dt \end{array}\right] = -\int f(x)\,dx = -F(x) + c = -F(-t) + c$ pro $a = -1$.

Metody integrování

Při integraci se často kombinují různé metody a často se musí použít několikrát za sebou.

Pokud použijeme různé metody integrace, můžeme vypočítat různé primitivní funkce.
(Správnost řešení si můžeme ověřit např. derivováním.)

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\, dt, \quad (\sin t)' = \cos t > 0 \text{ pro } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$
$$= \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt = t + c = \arcsin x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\, dt, \quad -(\cos t)' = \sin t > 0 \text{ pro } t \in (0; \pi) \\ t = \arccos x & t \in (0; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right]$$
$$= \int \frac{-\sin t\, dt}{\sin t} = -\int dt = -t + c = -\arccos x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.$$

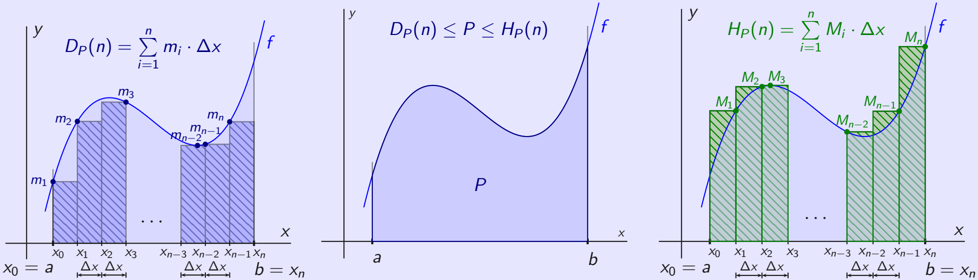
Obě řešení jsou správná, protože pro všechny $x \in \langle -1; 1 \rangle$ platí:
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t.j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.
(Všechny primitivní funkce k dané funkci na intervalu se liší o konstantu.)

Určitý integrál

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

Základní pojmy

- V této části se budeme zabývat **určitým integrálem** funkce, což na rozdíl od neurčitého integrálu není funkce, ale konkrétní hodnota (číslo nebo $\pm\infty$).
- Určitý integrál můžeme definovat několika způsoby.
- Definujeme jej pomocí integrálních součtů a nazveme **Riemannův (určitý) integrál**.



Křivočarý lichoběžník P určený nezápornou funkcí f na intervalu $\langle a; b\rangle$ a jeho aproximace pomocí součtů D_P a H_P

Základní pojmy

Funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je kladná spojitá, body $a, b \in R$, $a < b$.

Určete plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2,\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

- Rozdělme $\langle a; b\rangle$ pomocí bodů $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $n \in N$ na n podintervalů $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, $\langle x_2; x_3\rangle$, ..., $\langle x_{n-2}; x_{n-1}\rangle$, $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ stejné délky $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$.
- $m_i = \min\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pro množinu P pak platí:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x = D_P(n) \leq P \leq H_P(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x.$$

- Pokud zmenšíme Δx (zvětšíme n), odhady D_P, H_P se zlepší (nezhorší se).
- Pro $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$, tj. $n \to \infty$ bude platit (Viz následující slajd.)

$$\text{(zdola)} \qquad D_P(n) \to P \leftarrow H_P(n) \qquad \text{(shora)}.$$

Základní pojmy

Interval $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný, funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničena.

- **Dělení intervalu** $\langle a; b\rangle$ se nazývá každá konečná množina bodů
$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \;\; n \in N,$$
pro které $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Body x_0, x_1, ..., x_n se nazývají **dělící body** (jednoznačně určují dělení D).
- Délky intervalů $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ označujeme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Délku nejdelšího z těchto intervalů nazýváme **norma dělení** D a označujeme $\mu(D)$, tj. $\mu(D) = \max\{\Delta x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.
- Pro součet délek intervalů d_1, d_2, ..., d_n platí
$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = x_n - x_0 = b - a.$$
- Množinu všech dělení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D,\ D \text{ je dělení } \langle a; b\rangle\}$.
- $m_i = \inf\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $\quad M_i = \sup\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- **Dolní** $S_D(f, D)$ a **horní Riemannův integrální součet** $S_H(f, D)$ funkce f při dělení D se nazývají čísla $S_D(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$ a $S_H(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$.

Základní pojmy

- Čísla
  $$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\},\ \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$$
  nazýváme **dolní** a **horní Riemannův (určitý) integrál** funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$ (od a po b).
- Tato čísla **vždy existují** a platí
  $$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a),$$
  přičemž $m = \inf\{f(x),\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x),\ x \in \langle a; b\rangle\}$.
- Platí-li rovnost mezi dolním a horním Riemannovým integrálem, pak tuto hodnotu
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$
  nazýváme **Riemannův (určitý) integrál funkce** f **na intervalu** $\langle a; b\rangle$.

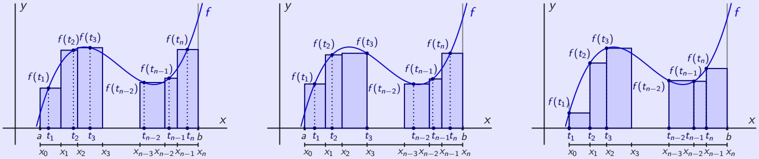
  Funkci f nazýváme **riemannovsky integrovatelná** na $\langle a; b\rangle$ a označujeme $f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Základní pojmy

Integrační proměnná nemá vliv a místo x můžeme napsat libovolný symbol.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi)\,d\varphi.$$

- **Riemannův (integrální) součet** funkce f při dělení D a volbě bodů T, přičemž $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} = \{t_i,\ t_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}_{i=1}^n$ nazýváme číslo
$$S_T(f, D) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i.$$
- Funkce f má nekonečně mnoho integrálních součtů pro dané dělení D.
  Je-li $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ spojitá, pak nabývá svých extrémů na $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
  $S_D(f, D)$, $S_H(f, D)$ představují Riemannovy integrální součty pro nějakou volbu bodů T.



Integrální součty funkce f při dělení D a různých volbách bodů T

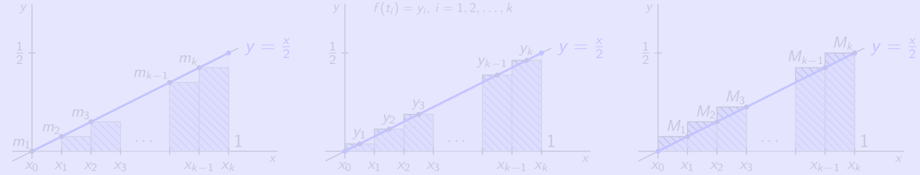
Základní pojmy

- Při vyšetřování riemannovsky integrovatelné funkce f na $\langle a;b\rangle$, nepotřebujeme každé dělení $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí se omezit na **normální posloupnosti dělení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. pro které platí $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Potom pro každou volbu bodů T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_H(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (další strana).

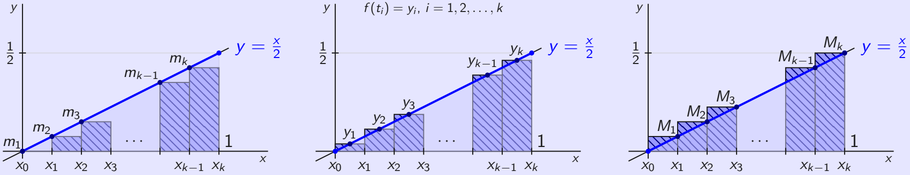
Základní pojmy

- Při vyšetřování riemannovsky integrovatelné funkce f na $\langle a; b\rangle$, nepotřebujeme každé dělení $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí se omezit na **normální posloupnosti dělení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. pro které platí $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

  Potom pro každou volbu bodů T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



$S_D(f, D_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k\cdot k} = \frac{k-1}{4k}$ $\quad$ $S_T(f, D_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k\cdot k} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $S_H(f, D_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{i}{2k\cdot k} = \frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}$ (další strana).

Základní pojmy

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}$. Funkce $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0;1\rangle$ je rostoucí, spojitá, $f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

- Normální posloupnost dělení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, přičemž $D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}$ pro $k \in N$.
- Pro $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$.

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2} = \frac{\frac{(0+k-1)k}{2}}{2k^2} = \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4k}.$$

$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k^2} = \frac{\frac{(1+k)k}{2}}{2k^2} = \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4}.$$

- zvolme $T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ jako středy intervalů $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tj. $t_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{k} + \frac{i}{2}\right) = \frac{2i-1}{2k}$, pak $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$ a platí

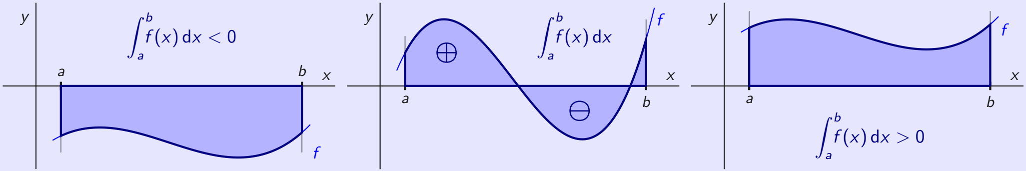
$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2} = \frac{\frac{(1+2k-1)k}{2}}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Základní vlastnosti

- Geometricky představuje Riemannův určitý integrál na intervalu $\langle a; b\rangle$ plochu křivočarého lichoběžníku určenou funkcí f a intervalem $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (tj. pro f záporné) je tato oblast záporná.



Funkce $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

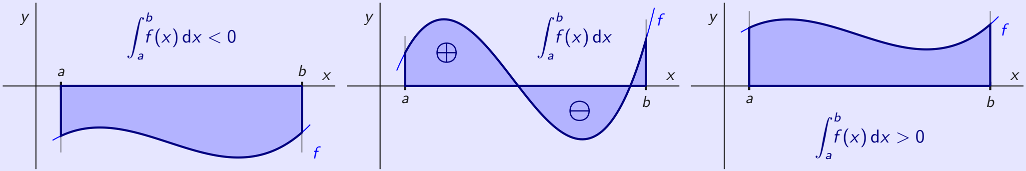
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Pokud $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, pak i $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Základní vlastnosti

- Geometricky představuje Riemannův určitý integrál na intervalu $\langle a; b\rangle$ plochu křivočarého lichoběžníku určenou funkcí f a intervalem $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (tj. pro f záporné) je tato oblast záporná.



Funkce $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$
- $\displaystyle\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Pokud $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, pak i $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Základní vlastnosti

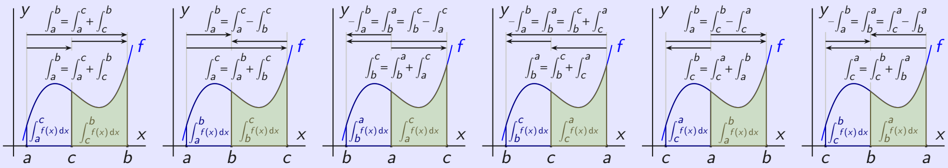
Funkce $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

- $f(x) \geq 0$ pro všechny $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- $g(x) \geq f(x)$ pro všechny $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Additivnost integrálu.

Funkce $f \in R_{\langle I;\text{jméno}\rangle}$, $I \subset R$ je ohraničený interval, body $a, b, c \in I$ jsou libovolné.

$\Rightarrow$ • $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$a < c < b$ $\quad$ $a < b < c$ $\quad$ $b < a < c$ $\quad$ $b < c < a$ $\quad$ $c < a < b$ $\quad$ $c < b < a$

Aditivnost Riemanova integrálu můžeme ilustrovat na vektorech.

Metody integrování

Výpočet Riemanova integrálu (Newton-Leibnizův vzorec).

Funkce $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkce F je primitivní k funkci f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

• $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$

• $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$

• $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Metody integrování

Výpočet Riemanova integrálu (Newton-Leibnizův vzorec).

Funkce $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkce F je primitivní k funkci f na $\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Metody integrování

- Určité integrály se obecně počítají pomocí neurčitých integrálů.
- Metodu per partes a substituční metody můžeme upravit a přímo pomocí nich vypočítat určitý integrál.

  Po substituci se nemusíme vracet k původním proměnným.

Metoda per partes.

$u, u', v, v' \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x\cos x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = \Big[-4\pi^2\cdot 1 + 0^2\cdot 1\Big] + \Big[2x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x\,dx$$

$$= -4\pi^2 + \Big[4\pi\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0\Big] - \Big[-2\cos x\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 - \Big[-2\cdot 1 + 2\cdot 1\Big] = -4\pi^2.$$

Metody integrování

Metoda substituce. $y=f(x)\colon I\to R,\ x=\varphi(t)\colon J\to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J)\subset I$,
I je interval s hranicemi a,b, J je interval s hranicemi α,β, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí

- $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

(Můžeme použít oběma směry.)

- $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pro všechny } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2}t\sin(t^2+1)\,dt=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;0\rangle & x\in\langle 1;2\rangle & t=2\ \ \mapsto x=5 \\ dx=2\,dt & t\in\langle 0;2\rangle & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=2 \end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_2^5\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5=\frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big]=\frac{\cos 2-\cos 5}{2}.$$

Metody integrování

Metoda substituce. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicemi a, b, J je interval s hranicemi α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Můžeme použít oběma směry.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|c|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ pro všechny } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2t\right] dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|c|c|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Metody integrování

Metoda substituce. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicemi a, b, J je interval s hranicemi α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Můžeme použít oběma směry.)

- $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ pro všechny } t \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big[1+\cos 2t\big]\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1;0\rangle & x \in \langle 1;2\rangle & t = 2 \ \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0;2\rangle & x \in \langle 1;5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Integrování sudých a lichých funkcí

Funkce $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je sudá nebo lichá, přičemž $a < b$.

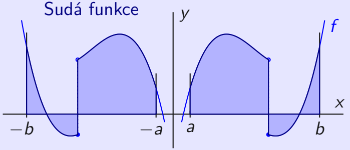
$\Rightarrow f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí:

- $$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = -x & x = b \mapsto t = -b \\ dt = -dx & x = a \mapsto t = -a \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

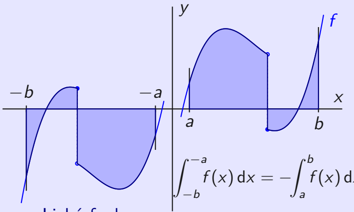
---

f je sudá. $\Rightarrow$ • $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$$

f je lichá. $\Rightarrow$ • $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} \left[-f(x)\right]dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$$



$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Lichá funkce

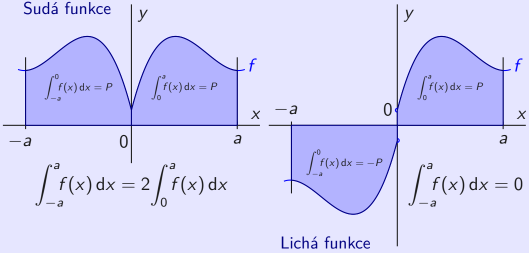
Integrování sudých a lichých funkcí

Funkce $f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, přičemž $a > 0$.

f je lichá. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-(-a)} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$

f je sudá. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c}\sin|x| \text{ je spojitá} \\ \text{a párna na } \langle -\pi;\pi\rangle\end{array}\right]$$
$$= 2\int_0^{\pi} \sin|x|\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$
$$= 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 4.$$



- $$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{integrand je spojitá} \\ \text{a lichá funkce na } \langle -1;1\rangle\end{array}\right] = 0.$$

Integrování sudých a lichých funkcí

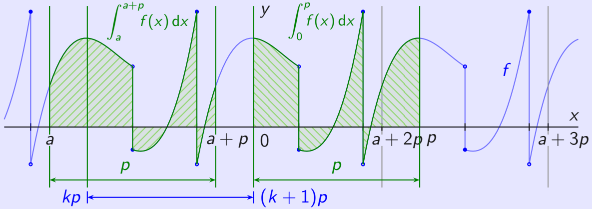
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je periodická s periodou $p > 0$, $f(x) = f(x+kp)$ pro všechny $x \in \langle a;b\rangle$, $k \in Z$.

Dosadíme-li $x = \varphi(t) = t - kp$, pak $t = x + kp$, $t \in \langle a+kp; b+kp\rangle$,
$dt = dx$, $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ a platí:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \begin{bmatrix} x = b \mapsto t = b+kp \\ x = a \mapsto t = a+kp \end{bmatrix} = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t+kp)\,dt = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t)\,dt = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$

Funkce $y = f(x)$ je periodická s periodou $p > 0$, reálný bod $a \in R$, pak platí:

- $f \in R_{\langle 0;p\rangle} \Leftrightarrow$ • $f \in R_{\langle a;a+p\rangle}$ a (pokud existují) • $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx = \int_a^{a+p} f(x)\,dx.$



Děkuji za pozornost.

Matematická analýza podporována programem wxMaxima

beerb@frcatel.fri.uniza.sk