Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Laboratoria

Rudolf Blaško
Uniwersytet Żyliński w Żylinie

Project: Innovative Open Source Courses for Computer Science

31. 5. 2021

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Spis treści

Innovative Open Source Courses for Computer Science

This teaching material was written as one of the outputs of the project
"Innovative Open Source Courses for Computer Science",
funded by the Erasmus+ grant no. 2019-1-PL01-KA203-065564.
The project is coordinated by West Pomeranian University of Technology in Szczecin (Poland)
and is implemented in partnership with Mendel University in Brno (Czech Republic)
and University of Žilina (Slovak Republic).
The project implementation timeline is September 2019 to December 2022.

Innovative Open Source Courses for Computer Science

Project was implemented under the Erasmus+.
Project name: "Innovative Open Source courses for Computer Science curriculum"
Project no.: 2019-1-PL01-KA203-065564
Key Action: KA2 – Cooperation for innovation and the exchange of good practices
Action Type: KA203 – Strategic Partnerships for higher education

Consortium: Zachodniopomorski uniwersytet technologiczny w Szczecinie
Mendelova univerzita v Brně
Žilinská univerzita v Žiline

Erasmus+ Disclaimer: This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

01. Wprowadzenie do wxMaxima

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

01. Podstawowe pojęcia

- Polecenia wprowadzamy w osobnych liniach (liniach wejściowych).

  Ich realizacja jest zapewniona przez jednoczesne naciśnięcie klawiszy `Shift` a `Enter` lub klikając w menu ikonę (Send the current cell to maxima).

- Wiersze wejściowe są wymienione jako (%i1).

- Linie wyjściowe są wymienione jako (%o1).

- Liczby dla linii wejściowej i odpowiedniej linii wyjściowej są takie same i na ich podstawie możemy odnieść się do treści tych wierszy.

```
(%i1) First input line.
(%o1) First output line.
(%i2) Second input line.
(%o2) Second output line.
```

01. Podstawowe pojęcia

- Polecenia są wykonywane na nowych oddzielnych liniach (liniach wyjściowych).
- Polecenia w liniach wejściowych mogą być zakończone symbolem ; lub przez symbol $, który wstrzymuje wyświetlanie odpowiedniego wyjścia.

(%i1) `solve(0=x+2,x);`

(%o1) $[x = -2]$

(%i2) `%i1;`

(%o2) $\mathtt{solve}(0 = x + 2, x)$

(%i3) `%o1;`

(%o3) $[x = -2]$

01. Podstawowe pojęcia

- Możemy wprowadzić wiele poleceń w wierszu wprowadzania, ale musimy je oddzielić za pomocą symbols ; lub $.
- Możemy również uporządkować polecenie w kilku liniach wejściowych.

(%i1) `a:2;b:3;solve(a*x+b*x^2=0,x)`

(a) 2

(b) 3

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

(%i2) `a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);`

(%o2) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

(%i3)
```
a:2$
b:3$
solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

01. Podstawowe pojęcia

Możemy zapisać wynik w różnych formach, a następnie użyć go w innych programach.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Możemy wypisać (%o3) z poprzedniego okna:

- Skopiuj za pomocą `Ctrl C` i `Ctrl V` lub skopiuj jako tekst (można użyć np. do edytora równań MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Skopiuj jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Skopiuj jako MathML, Image, RTF, SVG...

Środowisko wxMaxima posiada rozbudowaną pomoc dla użytkownika, którą można znaleźć w menu `Help`. Pomoc można również otworzyć, naciskając klawisz `F1`.

Instrukcje można również znaleźć na stronie internetowej `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

01. Podstawowe pojęcia

Możemy zapisać wynik w różnych formach, a następnie użyć go w innych programach.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Możemy wypisać (%o3) z poprzedniego okna:

- Skopiuj za pomocą `Ctrl C` i `Ctrl V` lub skopiuj jako tekst (można użyć np. do edytora równań MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Skopiuj jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Skopiuj jako MathML, Image, RTF, SVG...

Środowisko wxMaxima posiada rozbudowaną pomoc dla użytkownika, którą można znaleźć w menu `Help`. Pomoc można również otworzyć, naciskając klawisz `F1`.

Instrukcje można również znaleźć na stronie internetowej `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

01. Podstawowe pojęcia

Możemy zapisać wynik w różnych formach, a następnie użyć go w innych programach.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Możemy wypisać (%o3) z poprzedniego okna:

- Skopiuj za pomocą `Ctrl C` i `Ctrl V` lub skopiuj jako tekst (można użyć np. do edytora równań MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Skopiuj jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Skopiuj jako MathML, Image, RTF, SVG...

Środowisko wxMaxima posiada rozbudowaną pomoc dla użytkownika, którą można znaleźć w menu `Help`. Pomoc można również otworzyć, naciskając klawisz `F1`.

Instrukcje można również znaleźć na stronie internetowej `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

02. Podstawowe polecenia

- Za pomocą `apropos` znajdujemy dokładną nazwę polecenia, używając części jego nazwy.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

- Polecenie `describe` drukuje opis wprowadzonego polecenia.

```
(%i1) describe(plot2d)$
      -- Function:  plot2d
      plot2d (<expr><,<range_x><,<options><)
      plot2d (<expr_<>=<expr_<>,<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([parametric,<expr_x><,<expr><_y,<range><],<options><)
      plot2d ([discrete,<points><],<options><)
      plot2d ([contour,<expr><],<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([<type_<>,...,<type_n><],<options><)
      There are 5 types of plots that can be plotted by 'plot2d':
            1.  Explicit functions.  'plot2d' ...
      ...
```

02. Podstawowe polecenia

- Wyrażenia są wprowadzane przy użyciu wspólnych znaków operacji, relacji i funkcji.
- Argumenty funkcji i poleceń podano w nawiasach.
- Należy podać symbol mnożenia `*`!
- Potęgowanie jest określone przez znak `^` lub parę `**`.
- Symbol `:` służy do przypisania wartości po prawej stronie do wyrażenia po lewej stronie.
- Poniższe polecenia rozwiązują równanie $2x + 3x^2 = 0$ z nieznaną zmienną x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Za pomocą polecenia `kill` możemy usunąć z pamięci zmienne wraz ze wszystkimi ich przypisaniami i właściwościami.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Podstawowe polecenia

- Wyrażenia są wprowadzane przy użyciu wspólnych znaków operacji, relacji i funkcji.
- Argumenty funkcji i poleceń podano w nawiasach.
- Należy podać symbol mnożenia `*`!
- Potęgowanie jest określone przez znak `^` lub parę `**`.
- Symbol `:` służy do przypisania wartości po prawej stronie do wyrażenia po lewej stronie.
- Poniższe polecenia rozwiązują równanie $2x + 3x^2 = 0$ z nieznaną zmienną x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Za pomocą polecenia `kill` możemy usunąć z pamięci zmienne wraz ze wszystkimi ich przypisaniami i właściwościami.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Podstawowe polecenia

- Wyrażenia są wprowadzane przy użyciu wspólnych znaków operacji, relacji i funkcji.
- Argumenty funkcji i poleceń podano w nawiasach.
- Należy podać symbol mnożenia `*`!
- Potęgowanie jest określone przez znak `^` lub parę `**`.
- Symbol `:` służy do przypisania wartości po prawej stronie do wyrażenia po lewej stronie.
- Poniższe polecenia rozwiązują równanie $2x + 3x^2 = 0$ z nieznaną zmienną x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Za pomocą polecenia `kill` możemy usunąć z pamięci zmienne wraz ze wszystkimi ich przypisaniami i właściwościami.

```
(%i1) kill(a,b)
       /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Podstawowe polecenia

- W menu $\boxed{\texttt{View}}$ i podmenu $\boxed{\texttt{Display equations}}$ możemy zmienić wyświetl linie wyjściowe do kształtów $\boxed{\texttt{in 2D}}$ (implicitný tvar), $\boxed{\texttt{as 1D ASCII}}$ lub $\boxed{\texttt{as ASCII Art}}$.
- Możesz także zmienić ustawienia wyjścia za pomocą polecenia `set_display`.

(%i1) `x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$`

(%o1) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ `/* in 2D */`

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
(%o1) x/sqrt(x^2+1)     /* as 1D ASCII */
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
              x
(%o2) ----------        /* as ASCII Art */
                 2
      sqrt(x + 1)
```

03. Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

- Maxima może pracować z liczbami rzeczywistymi zapisanymi w formie numerycznej lub symbolicznej.
- Sposób zapisywania liczb rzeczywistych można ustawić w menu `Numeric` za pomocą przełącznika `Numeric Output` między reprezentacją numeryczną a symboliczną.
- Ustawienie zmiennej `numer` określa metodę wyświetlania.
- Domyślnie wyświetlanych jest 16 cyfr (wliczając kropkę dziesiętną).
- Precyzja wyświetlania jest definiowana przez zmienną `fpproc` i wpływa na wyświetlanie za pomocą `bfloat`. Dane wyjściowe `float` zawsze pokazują to samo.
- Domyślnie liczby zespolone są wprowadzane w postaci algebraicznej (`rectform`). Za pomocą polecenia `polarform` możemy przekształcić je w postać trygonometryczną (wykładniczą).

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

03. Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

- Maxima może pracować z liczbami rzeczywistymi zapisanymi w formie numerycznej lub symbolicznej.
- Sposób zapisywania liczb rzeczywistych można ustawić w menu `Numeric` za pomocą przełącznika `Numeric Output` między reprezentacją numeryczną a symboliczną.
- Ustawienie zmiennej `numer` określa metodę wyświetlania.
- Domyślnie wyświetlanych jest 16 cyfr (wliczając kropkę dziesiętną).
- Precyzja wyświetlania jest definiowana przez zmienną `fpproc` i wpływa na wyświetlanie za pomocą `bfloat`. Dane wyjściowe `float` zawsze pokazują to samo.
- Domyślnie liczby zespolone są wprowadzane w postaci algebraicznej (`rectform`). Za pomocą polecenia `polarform` możemy przekształcić je w postać trygonometryczną (wykładniczą).

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

03. Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

- Możemy zwiększać lub zmniejszać dokładność praktycznie w nieskończoność.
- Możemy to zmienić zarówno globalnie, jak i lokalnie tylko dla jednej zmiennej lub polecenia.

```
(%i1) log(2);
(%o1) log(2)
(%i2) log(2),numer;
(%o2) 0.693147180559945З
(%i3) float(log(2));
(%o3) 0.6931471805599453
(%i4) bfloat(log(2));
(%o4) 6.931471805599453b − 1
(%i5) log(2),bfloat;
(%o5) 6.931471805599453b − 1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=34;
(%o6) 6.931471805599453094172321214581766b − 1
(%i7) bfloat(log(2)),fpprec=134;
(%o7) 6.93147180559945[106digits]8552023575813b − 1
```

03. Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

- Stałe numeryczne e, π, i (jednostka urojona) mają przedrostek `%`, tj. `%e`, `%pi`, `%i` . Obowiązuje to nawet wtedy, gdy są one częścią lub wynikiem obliczeń.
- Maxima ma predefiniowane stałe `inf`, `minf` dla rzeczywistej nieskończoności ∞, $-\infty$.
- Maxima ma predefiniowaną stałą `infinity` dla nieskończoności zespolonej.
- Stałe logiczne `true` i `false` reprezentują prawdę i fałsz.

(%i1) `%pi+%i+%e;`

(%o1) $\pi + \%\mathrm{i} + \%\mathrm{e}$

(%i2) `[minf,inf];`

(%o2) $[-\infty, \infty]$

(%i3) `infinity;`

(%o3) *infinity*

04. Przypisania i funkcje

- Maxima zawiera znacznie więcej funkcji niż standardowe języki programowania. To nie tylko same funkcje, ale także różne funkcje je wspierające.
- Używamy operatora `:` do przypisywania wartości lub wyrażeń do zmiennych.
- Funkcje definiujemy za pomocą przypisania `:=`.

(%i1) `f(x):=x^2+2*x+3;`

(%o1) $f(x) := x^2 + 2x + 3$

(%i6) `f(x);f(y);f(x+1);`
`f(-2);f(1);`

(%o2) $x^2 + 2x + 3$

(%o3) $y^2 + 2y + 3$

(%o4) $(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

04. Przypisania i funkcje

Maxima zawiera wiele funkcji elementarnych. Są to na przykład:

- `exp(x)=%e^x`, `log(x)`,
- funkcje trygonometryczne i ich funkcje odwrotne

  `sin(x)` and `asin(x)`, `cos(x)` and `acos(x)`, `tan(x)` and `atan(x)`, `cot(x)` and `acot(x)`,
- funkcje hiperboliczne i ich funkcje odwrotne

  `sinh(x)` and `asinh(x)`, `cosh(x)` and `acosh(x)`, `tanh(x)` and `atanh(x)`, `coth(x)` and `acoth(x)` itp.

Możemy użyć polecenia `print`, aby sformatować instrukcję.

```
(%i3) a:2$ b:log(2),numer$
      print("Logarithm of a number",a,
           " is ",log(a),"=",b)$
      Logarithm of a number 2 is log(2) = 0.693147180559453
```

04. Przypisania i funkcje

Maxima zawiera wiele funkcji elementarnych. Są to na przykład:

- `exp(x)=%e^x`, `log(x)`,
- funkcje trygonometryczne i ich funkcje odwrotne
  `sin(x)` and `asin(x)`, `cos(x)` and `acos(x)`, `tan(x)` and `atan(x)`, `cot(x)` and `acot(x)`,
- funkcje hiperboliczne i ich funkcje odwrotne
  `sinh(x)` and `asinh(x)`, `cosh(x)` and `acosh(x)`, `tanh(x)` and `atanh(x)`, `coth(x)` and `acoth(x)` itp.

Możemy użyć polecenia `print`, aby sformatować instrukcję.

```
(%i3) a:2$ b:log(2),numer$
      print("Logarithm of a number",a,
            " is ",log(a),"=",b)$
      Logarithm of a number 2 is log(2) = 0.6931471805599453
```

04. Przypisania i funkcje

Podstawowe funkcje obejmują również:

```
(%i4)  f(x):=sign(x)$ g(x):=abs(x)$
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       print(g(-3.6),g(-3.2),g(-3),g(0),g(3),g(3.2),g(3.6))$
       neg neg neg zero pos pos pos
       3.6 3.2 3 0 3 3.2 3.6
(%i6)  f(x):=floor(x)$      /* bottom whole of x */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −4 −4 −3 0 3 3 3
(%i8)  f(x):=round(x)$
            /* rounded x to the nearest integer number */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −4 −3 −3 0 3 3 4
(%i10) f(x):=truncate(x)$
            /* removes all digits after the decimal point */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −3 −3 −3 0 3 3 3
(%i12) f(x):=ceiling(x)$    /* upper integer x */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −3 −3 −3 0 3 4 4
```

04. Przypisania i funkcje

- Maxima zawiera również wiele funkcji, które je obsługują.
- Niektóre z nich nie są zaimplementowane bezpośrednio w środowisku wxMaxima, ale w zewnętrznych bibliotekach, które nazywamy pakietami.
- Pakiety te są ładowane do systemu za pomocą polecenia `load`.
- Jako przykład przedstawiamy pakiet `spangl` wspomagający pracę z funkcjami trygonometrycznymi.

```
(%i2) print(tan(%pi/8), ratsimp(tan(%pi/8)),
          trigsimp(tan(%pi/8)))$
```

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

```
(%i3) load(spangl);
```

(%o3) $../share/trigonometry/spangl.mac$

```
(%i4) tan(%pi/8);
```

(%o4) $\sqrt{2}-1$

05. Praca z wyrażeniami

Wiele razy musimy tylko zmienić warunki lokalnie dla konkretnego obliczenia bez globalne zmiany ustawień. W tym celu Maxima ma bardzo efektywne polecenie `ev`.

- Polecenie `ev` umożliwia zdefiniowanie określonego środowiska w ramach jednego polecenia.
- Po wprowadzeniu polecenia `ev(a,b1,b2,...,bn)` obliczane jest wyrażenie `a`, gdy spełnione są warunki `b1`, `b2`, ..., `bn`.
- Warunkami tymi mogą być równania, przypisania, funkcje, przełączniki (ustawienia logiczne).

Przykład pokazuje przykład rozwiązania równania kwadratowego za pomocą polecenia `solve`.

- Zmienne `a`, `b`, `c` po wykonaniu polecenia `ev` nie mają przypisanych wartości.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x = \frac{3}{2}, x = -1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $[x = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}]$

05. Praca z wyrażeniami

Maxima oferuje kilka poleceń upraszczających i modyfikujących różne wyrażenia.

- Podstawowe funkcje można znaleźć w menu `Simplify`.
- Maxima oferuje przykłady dla poszczególnych poleceń przy użyciu polecenia `example`.
- Przyjrzyjmy się niektórym przykładom podanym przez `example(ratsimp)`.

```
(%i2) f(x):=b*(a/b-x)+b*x+a$
          print(f(x),"?",ratsimp(f(x)))$
```

$bx + b(\frac{a}{b} - x) + a \;\; ? \;\; 2a$

```
(%i3) ratsimp(a+1/a);
```

(%o3) $\frac{a^2+1}{a}$

```
(%i4) ev(x^(a+1/a),ratsimp);
```

(%o4) $x^{a+\frac{1}{a}}$

```
(%i5) ev(x^(a+1/a),ratsimpexpons);
```

(%o5) $x^{\frac{a^2+1}{a}}$

05. Praca z wyrażeniami

- Funkcja `expand` rozwija odpowiednie terminy w wyrażeniu.
  Natomiast funkcja `factor` rozkłada wyrażenie.
  Funkcja `gfactor` robi to na tablicy liczb zespolonych.

(%i1) `f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$`
(%i3) `ratsimp(f(x));expand(f(x));`
(%o2) $x^5 + x^4 - 16x - 16$
(%o3) $x^5 + x^4 - 16x - 16$
(%i6) `factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);`
(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$
(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%i)(x+2\%i)$
(%o6) $2^2 5^2$

- Rozkładamy wymierną funkcję ułamkową na ułamki częściowe za pomocą `partfrac`.

(%i1) `partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);`
(%o1) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

05. Praca z wyrażeniami

- Funkcja `expand` rozwija odpowiednie terminy w wyrażeniu.
  Natomiast funkcja `factor` rozkłada wyrażenie.
  Funkcja `gfactor` robi to na tablicy liczb zespolonych.

(%i1) `f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$`
(%i3) `ratsimp(f(x));expand(f(x));`
(%o2) $x^5+x^4-16x-16$
(%o3) $x^5+x^4-16x-16$
(%i6) `factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);`
(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$
(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%i)(x+2\%i)$
(%o6) $2^2 5^2$

- Rozkładamy wymierną funkcję ułamkową na ułamki częściowe za pomocą `partfrac`.

(%i1) `partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);`
(%o1) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$

05. Praca z wyrażeniami

Wyrażenia możemy zastępować za pomocą poleceń `subst(a,b,c)` i `ratsubst(a,b,c)`.

- Wyrażenie `a` zostanie zastąpione wyrażeniem `b`, a następnie podstawione w wyrażeniu `c`.
- Podczas używania polecenia `subst` `b` musi być najprostszą częścią (atom) lub przez pełne podwyrażenie wyrażenia `c`.
- W przykładzie podwyrażenie `x+y` nie jest kompletne (brak `z`).
- Polecenie `ratsubst` również modyfikuje wynikowe wyrażenie.

(%i2) `subst(x+y,a,a^2+b^2); ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);`

(%o1) $(y+x)^2+b^2$

(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$

(%i4) `subst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(a,x+y,x+y+z);`

(%o3) $z+y+x$

(%o4) $z+a$

06. Granice i pochodne

W menu Calculus znajdujemy funkcje do rozwiązywania podstawowych problemów analizy matematycznej (granice, pochodne, całki, sumy szeregów, ...).

Granice obliczamy za pomocą polecenia `limit`.

- Ostatni parametr określa kierunek granic jednostronnych, ma wartości `plus` lub `minus` i jest opcjonalne.

  Jeśli nie określono, Maxima oblicza granicę jako granicę zespoloną.

- Za pomocą polecenia `limit(f(x),x,a)` obliczamy granicę $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

- Za pomocą polecenia `limit(f(x),x,a,plus)` obliczamy granicę $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

```
(%i4) limit(1/x,x,0);      limit(1/x,x,0,plus);
             limit(1/x,x,0,minus); limit(1/x,t,0);
```

(%o1) *infinity*

(%o2) ∞

(%o3) $-\infty$

(%o4) $\frac{1}{x}$

06. Granice i pochodne

Jeśli użyjemy apostrofu ' przed poleceniem, to polecenie nie zostanie wykonane, zostanie tylko wyświetlone.

```
(%i2) limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
      'limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
```

(%o1) 0

(%o2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-n}{3n+1}\right)^{4n+1}$

```
(%i2) 2+3;  '2+3;
```

(%o1) 5

(%o2) 5

```
(%i4) solve(x+1=0,x);'solve(x+1=0,x);
```

(%o3) $[x = -1]$

(%o4) $solve(x+1=0,x)$

06. Granice i pochodne

Pochodne są obliczane za pomocą polecenia `diff`.

Parametr określający kolejność pochodnych jest opcjonalny.

```
(%i4) f(x):=2*x^4-3*x+sin(x);
      print("f'=",diff(f(x),x),
            "=",diff(f(x),x,1))$
      print("f''=",diff(diff(f(x),x),x),
            "=",diff(f(x),x,2),
            "=",diff(f(x),x,1,x,1))$
      print("f^(10)=",diff(f(x),x,10),
            "=",diff(f(x),x,1,x,9))$
```

(%o1) $f(x) := 2x^4 - 3x + \sin(x)$

$f' = \cos(x) + 8x^3 - 3 = \cos(x) + 8x^3 - 3$

$f'' = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x)$

$f\hat{}(10) = -\sin(x) = -\sin(x)$

06. Granice i pochodne

Pochodne cząstkowe obliczamy za pomocą tego samego polecenia `diff`.

```
(%i3) g(x,y):=x^3*y^2-1;
      print("g'_x=",diff(g(x,y),x),
          ", respectively
            g'_y=",diff(g(x,y),y,1))$
      print( "g''_(xx)=",diff(g(x,y),x,2),
          ", g''_(yx)=",diff(g(x,y),y,1,x,1),
          ", g''_(xy)=",diff(g(x,y),x,1,y,1),
          ", g''_(yy)=",diff(g(x,y),y,1,y,1))$
```

(%o1) $g(x,y) := x^3y^2 - 1$

$g'\_x = 3x^2y^2$, respectively $g'\_y = 2x^3y$

$g''\_(xx) = 6xy^2$, $g''\_(yx) = 6x^2y$, $g''\_(xy) = 6x^2y$, $g''\_(yx) = 2x^3$

06. Granice i pochodne

Obliczamy wielomian Taylora *n*tego stopnia za pomocą polecenia `taylor`.

- To polecenie można znaleźć w menu `Calculus` i podmenu `Get Series...`.
- Obliczamy wielomian Taylora funkcji f stopnia n w środku c za pomocą polecenia `taylor(f(x),x,c,n)`.
- Jego współczynniki obliczamy poleceniem `coeff`.
- Użycie tego polecenia zależy od polecenia `taylor`.

```
(%i1) t1:taylor(sin(x),x,0,5); t2:taylor(sin(x),x,-1,4);
```

(t1) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots$

(t2) $-\sin(1)+\cos(1)(x+1)+\frac{\sin(1)(x+1)^2}{2}-\frac{\cos(1)(x+1)^3}{6}-\frac{\sin(1)(x+1)^4}{24}+\cdots$

```
(%i3) print(coeff(sin(x),x,5)," and ",coeff(t1,x,5),
        " and ",coeff(t2,x,5))$
```

$0 \text{ and } \frac{1}{120} \text{ and } \frac{\cos(1)}{120}$

06. Granice i pochodne

W przykładzie wielomian Taylora danego wielomianu jest obliczany w inny sposób.

Polecenie `taylor` umieszcza trzy kropki na końcu, nawet po zakończeniu programowania.

(%i1) `f(x):=2*x^5-x^4-3*x^3-x+1;`

(%o1) $f(x) := 2x^5 - x^4 + (-3)x^3 - x + 1$

(%i2) `tp1:taylor(f(x),x,-1,5);`

(tp1) $2 + 4(x+1) - 17(x+1)^2 + 21(x+1)^3 - 11(x+1)^4 + 2(x+1)^5 + \cdots$

(%i4) `ratsimp(tp1);expand(tp1);`

(%o3) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%o4) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%i6) `tpx:ratsubst(t,x+1,f(x));subst(x+1,t,tpx);`

(tpx) $2t^5 - 11t^4 + 21t^3 - 17t^2 + 4t + 2$

(tp2) $2(x+1)^5 - 11(x+1)^4 + 21(x+1)^3 - 17(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$

(%i7) `tp1-tp2;`

(%o7) $0 + \cdots$

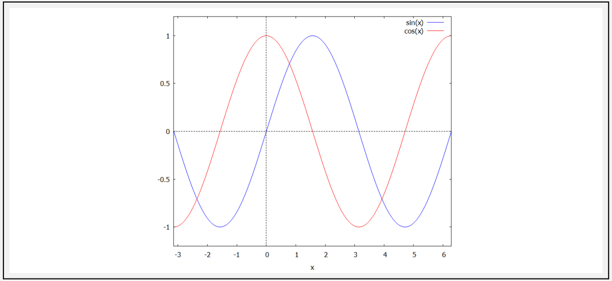
07. Wykresy funkcji

Wykres funkcji możemy narysować na kilka sposobów.

- Najprostszym sposobem jest wybranie z menu opcji `Plot` podmenu `Plot 2d ...`.
- Jeśli wybierzemy `Format=gnuplot`, funkcja zostanie wykreślona poleceniem `plot2d` w nowym oknie za pomocą programu Open Source `Gnuplot`.

  `Gnuplot` jest automatycznie instalowany wraz z Maximą.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
        [plot_format, gnuplot])$
```

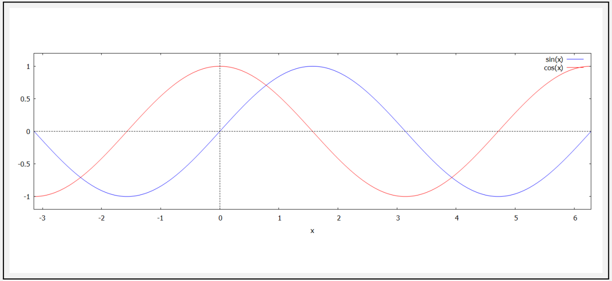


07. Wykresy funkcji

Wykresy funkcji nie są wyświetlane w rzeczywistych proporcjach osi x i y, ale są zoptymalizowane dla ekranu.

- Do poprawnego wyświetlenia możemy wykorzystać m.in. parametr `same_xy`.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
        [plot_format, gnuplot],[same_xy])$
```

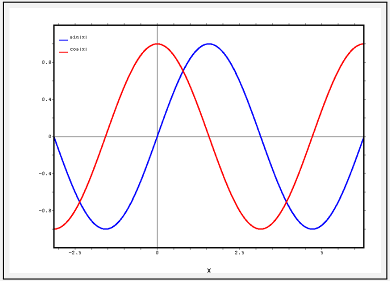


07. Wykresy funkcji

Jeśli wybierzemy `Format=wxmaxima`:

- Maxima rysuje wykres za pomocą polecenia `plot2d` w nowym oknie.
- Obraz możemy zapisać tylko w postscriptum.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, xmaxima])$
```



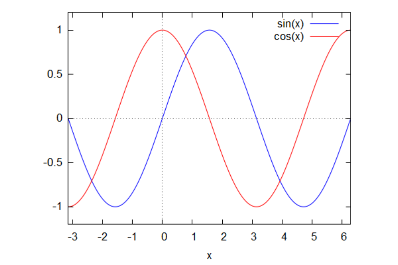
07. Wykresy funkcji

Jeśli wybierzemy `Format=inline`:

- Maxima rysuje wykres za pomocą polecenia `wxplot2d` w swoim środowisku.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
        [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Polecenia `plot2d` i `wxplot2d` mają tę samą składnię i znacznie więcej parametrów.

- Parametry można znaleźć na przykład za pomocą polecenia `describe(plot2d)`.

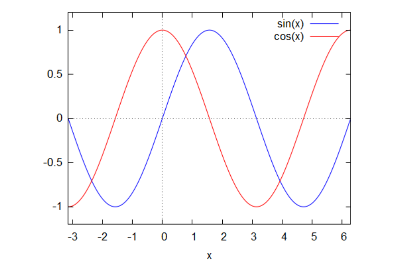
07. Wykresy funkcji

Jeśli wybierzemy `Format=inline`:

- Maxima rysuje wykres za pomocą polecenia `wxplot2d` w swoim środowisku.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
          [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Polecenia `plot2d` i `wxplot2d` mają tę samą składnię i znacznie więcej parametrów.

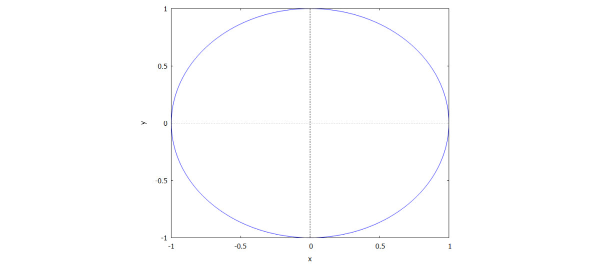
- Parametry można znaleźć na przykład za pomocą polecenia `describe(plot2d)`.

07. Wykresy funkcji

Jeśli chcemy wyświetlić funkcję niejawną, musimy załadować bibliotekę `implicit_plot`.

- W nowszych wersjach (przynajmniej wxMaxima 21.05.2) nie jest to już konieczne.

```
(%i1) load(implicit_plot);
(%o1) ../share/contrib/implicit_plot.lisp
(%i2) implicit_plot(x^2+y^2-1, [x,-1,1], [y,-1,1])$
      implicit_plot is now obsolete.  Using plot2d instead:
      plot2d (y^2+x^2-1=0, [x,-1,1], [y,-1,1])
```



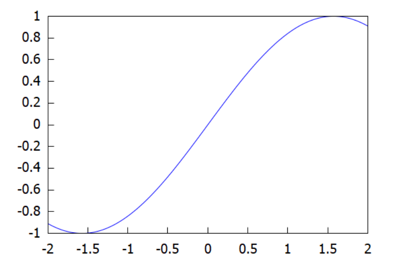
07. Wykresy funkcji

Wykres funkcji możemy narysować na kilka sposobów.

- Lepiej jest użyć poleceń `wxdraw2d` lub `draw2d` i przekieruj wyjście do `Gnuplot`.
- Te polecenia mają nieco inną składnię niż `wxplot2d`, `plot2d`.
  Parametry drukowania są prostsze i bardziej przejrzyste.
- Renderowana funkcja musi znajdować się w poleceniu `explicit`, `parametric` lub `implicit`.

```
(%i1) wxdraw2d(explicit((sin(x)),x,-2,2))$
```

(%o1)

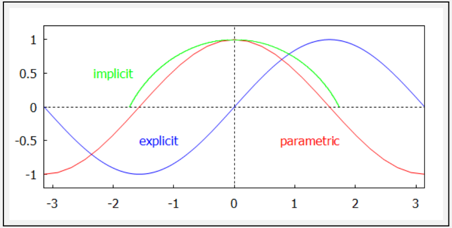


07. Wykresy funkcji

Rysowanie za pomocą poleceń `wxdraw2d` i `draw2d`.

- Do poprawnego wyświetlenia możemy wykorzystać m.in. parametr `proportional_axes`.

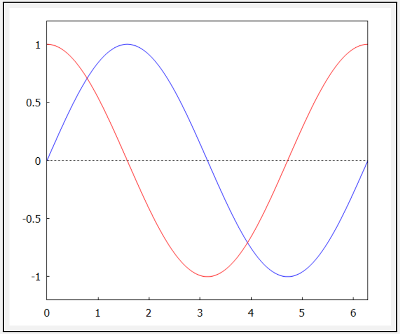
```
(%i1) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
      color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
      label(["explicit",-1.25,-.5]),
      color=red,parametric(t,cos(t),t,-%pi,%pi),
      label(["parametric",1.25,-.5]),
      color=green,implicit(x^2+(y+1)^2-4,x,-2,2,y,0,1),
      label(["implicit",-2,.5]))$
```



07. Wykresy funkcji

- Polecenie `draw2d`.

```
(%i1) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
      color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
      color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

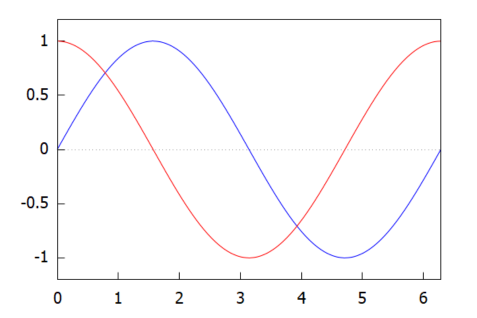


07. Wykresy funkcji

- Polecenie `wxdraw2d`.

(%i1)
```
wxdraw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

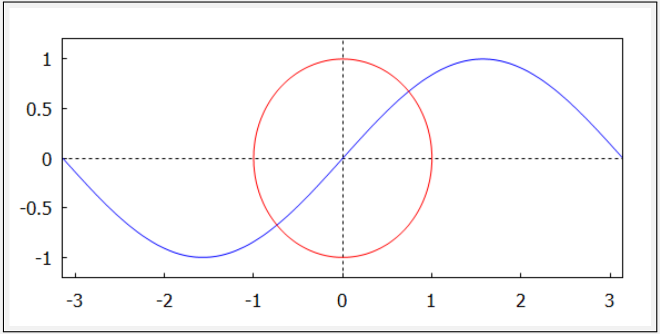
(%o1)



07. Wykresy funkcji

- W ten sam sposób rysujemy krzywą parametryczną lub funkcję.

```
(%i1) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
      color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
      color=red,nticks=300,
      parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))$
```



08. Ciągi i szeregi

Ciągi w Maximie możemy tworzyć na kilka sposobów.

- Ciągi możemy tworzyć na przykład za pomocą polecenia `makelist` lub za pomocą poleceń cyklu `for..do`.
- Polecenie `makelist` tworzy listę, którą możemy wyświetlić zarówno jako całość, jak i według członków.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);
      S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S2[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 7
(%o5) 199
(%i6) S1[12];
      inpart: invalid index 12 of list or matrix.
      -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

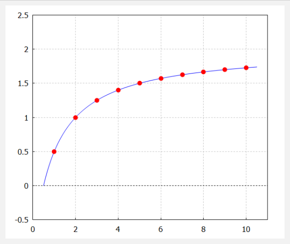
08. Ciągi i szeregi

- Ciąg jest również generowany z jego wzorami, a następnie rysowany przy użyciu `draw2d`.
- Uporządkowane pary są w nawiasach kwadratowych, a następnie pokazane jako punkty na płaszczyźnie.

(%i1) `S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);`

(S1) $[[1,\frac{1}{2}],[2,1],[3,\frac{5}{4}],[4,\frac{7}{5}],[5,\frac{3}{2}],[6,\frac{11}{7}],[7,\frac{13}{8}],[8,\frac{5}{3}],[9,\frac{17}{10}],[10,\frac{19}{11}]]$

(%i2)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
point_type=7,color=red,points(S1))$
```



08. Ciągi i szeregi

- Za pomocą polecenia `for..do` wymieniamy kilka elementów ciągu $\{2n^2 - 1\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 15 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
      1
      7
      17
      31
      49
      71
      97
      127
      161
      199
      241
      287
      337
      391
      449
```

08. Ciągi i szeregi

- Dobrym przykładem użycia polecenia `for..do` jest ciąg Fibonacciego.

```
(%i3)  a0:0$ a1:1$ (for i:1 thru 14
               do (an:a1+a0,print(an),a1:a0,a0:an))$
       1
       1
       2
       3
       5
       8
       13
       21
       34
       55
       89
       144
       233
       377
```

08. Ciągi i szeregi

Sumę szeregu możemy obliczyć poleceniem `sum`.
Możesz znaleźć to polecenie w menu `Calculus` a podmenu `Calculate Sum...`.

- Za pomocą polecenia `sum` obliczamy zarówno sumę skończoną, jak i nieskończoną.

```
(%i1) sum(2*n^2-1,n,1,8);
(%o1) 400
```

- Maxima może obliczyć dokładną sumę niektórych nieskończonych szeregów.

```
(%i2) sum(1/k^2,k,1,inf);
      sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum;
```

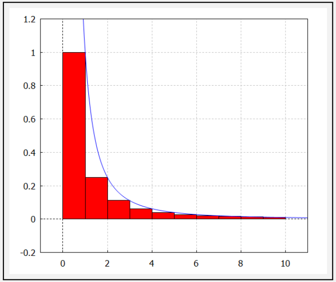
(%o1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

(%o2) $\frac{\pi^2}{6}$

08. Ciągi i szeregi

- Ciąg numeryczny $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ można przedstawić graficznie w następujący sposób.

```
(%i1)  a(n):=1/n^2$
       rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,10)$
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-1,11],yrange=[-0.2,1.2],
       border=true,color=black,fill_color=red,rec,
       color=blue,explicit(a(n),n,0,11))$
```



02. Funkcje rzeczywiste

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

01. Podstawowe pojęcia

- **Relacja binarna (dwuargumentowa)** f między zbiorami $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ to każdy $f \subset A \times B$.
- Jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje co najwyżej jeden $y \in B$ taki, że $[x; y] \in f$, wtedy relacja f nazywa się **funkcja** ze zbioru A do zbioru B, oznaczenie $f\colon AB$.

  Piszemy $[x; y] \in f$ lub $y = f(x)$.
- $x \in A$ Argument funkcji (zmienna niezależna).
- $y \in B$ Wartość funkcji (zmienna zależna).
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Dziedzina funkcji f (zbiór argumentów).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Przeciwdziedziną funkcji f (zbiór wartości).
- Relacje i funkcje to zbiory uporządkowanych par.
- $f = g$ reprezentuje równoważność $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ i $f(x) = g(x)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in D(f)$.

01. Podstawowe pojęcia

- **Relacja binarna (dwuargumentowa)** f między zbiorami $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ to każdy $f \subset A \times B$.
- Jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje co najwyżej jeden $y \in B$ taki, że $[x; y] \in f$, wtedy relacja f nazywa się **funkcja** ze zbioru A do zbioru B, oznaczenie $f\colon AB$.

  Piszemy $[x; y] \in f$ lub $y = f(x)$.
- $x \in A$ Argument funkcji (zmienna niezależna).
- $y \in B$ Wartość funkcji (zmienna zależna).
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Dziedzina funkcji f (zbiór argumentów).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Przeciwdziedziną funkcji f (zbiór wartości).
- Relacje i funkcje to zbiory uporządkowanych par.
- $f = g$ reprezentuje równoważność $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ i $f(x) = g(x)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in D(f)$.

01. Podstawowe pojęcia

- **Relacja binarna (dwuargumentowa)** f między zbiorami $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ to każdy $f \subset A \times B$.
- Jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje co najwyżej jeden $y \in B$ taki, że $[x; y] \in f$, wtedy relacja f nazywa się **funkcja** ze zbioru A do zbioru B, oznaczenie $f\colon AB$.

  Piszemy $[x; y] \in f$ lub $y = f(x)$.
- $x \in A$ Argument funkcji (zmienna niezależna).
- $y \in B$ Wartość funkcji (zmienna zależna).
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B \colon [x; y] \in f\}$ Dziedzina funkcji f (zbiór argumentów).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f) \colon [x; y] \in f\}$ Przeciwdziedziną funkcji f (zbiór wartości).
- Relacje i funkcje to zbiory uporządkowanych par.
- $f = g$ reprezentuje równoważność $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ i $f(x) = g(x)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in D(f)$.

02. Ciągi (liczb rzeczywistych)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}.$

- Jawny wpis: $a_n = 2n - 1,\ n \in N.$
- Wpis rekurencyjny: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n \in N.$

```
(%i3) a(n):=2*n-1$ S:makelist(a(n),n,1,8);
(S)   [1,3,5,7,9,11,13,15]
(%i4) an:1$ (for n:1 thru 8 do (print(an),an:an+2))$
      1
      3
      5
      7
      9
      11
      13
      15
```

02. Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Jeśli $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ jest ciągiem rosnącym (liczb naturalnych, indeksów), następnie wywoływana jest $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ **podciąg (wybrany ciąg z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podciągi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ to na przykład:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1,3,5,7,9,11,13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3,7,11,15,19,23,27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7,11,15,19,23,27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

02. Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Jeśli $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ jest ciągiem rosnącym (liczb naturalnych, indeksów), następnie wywoływana jest $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ **podciąg (wybrany ciąg z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podciągi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ to na przykład:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

02. Ciągi (liczb rzeczywistych)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$
            Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      print("limit a(n)=",limit(a(n),n,inf))$
      limit a(n)= 0
```

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1) b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$
            Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      print("limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
      limit b(n)= ∞
```

02. Ciągi (liczb rzeczywistych)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

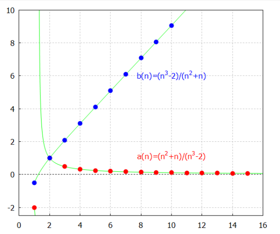
```
(%i1)  a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$
            Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
       print("limit a(n)=",limit(a(n),n,inf))$
       limit a(n)= 0
```

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1)  b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$
            Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
       print("limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
       limit b(n)= ∞
```

02. Ciągi (liczb rzeczywistych)

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$ Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$ Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
          xrange=[0,16],yrange=[-2.5,10],
      color=green,explicit(a(n),n,1,16),point_type=7,
          color=red,points(Sa),
        label(["a(n)=(n^2+n)/(n^3-2)",10,a(10)+1]),
      color=green,explicit(b(n),n,1,16),point_type=7,
          color=blue,points(Sb),
        label(["b(n)=(n^3-2)/(n^2+n)",10,6]))$
```



03. Szeregi liczbowe

Jeśli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym

wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazywa się **(nieskończony ciąg numeryczny)**.

- Szeregi liczbowe są ściśle związane z ciągmi i uogólniają koncepcję dodatki do nieskończonej liczby dodatków. Prostym przykładem są ułamki zwykłe i liczby okresowe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Związek między $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ciągą $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ wyklucza się wzajemnie.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\cdots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, gdzie $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Szeregi liczbowe

Jeśli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym

wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazywa się **(nieskończony ciąg numeryczny)**.

- Szeregi liczbowe są ściśle związane z ciągmi i uogólniają koncepcję dodatki do nieskończonej liczby dodatków. Prostym przykładem są ułamki zwykłe i liczby okresowe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Związek między $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ciągą $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ wyklucza się wzajemnie.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\cdots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, gdzie $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Szeregi liczbowe

Jeśli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym

wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazywa się **(nieskończony ciąg numeryczny)**.

- Szeregi liczbowe są ściśle związane z ciągmi i uogólniają koncepcję dodatki do nieskończonej liczby dodatków. Prostym przykładem są ułamki zwykłe i liczby okresowe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

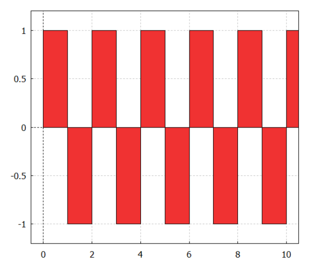
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Związek między $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ciągą $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ wyklucza się wzajemnie.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, gdzie $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Szeregi liczbowe

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

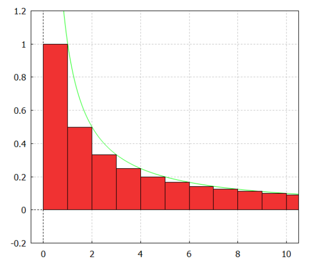
```
(%i1) a(n):=(-1)^(n+1)$
      rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
      border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



03. Szeregi liczbowe

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$

(%i1)
```
a(n):=1/n$
rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.2,1.2],
color=green,explicit(a(n),n,.5,11),
border=true,color=black,fill_color=light_red,rec)$
```



03. Szeregi liczbowe

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4) sum: sum is divergent.

#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);

- W poniższym przykładzie wystarczy zmienić wartość q na początku.

```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

03. Szeregi liczbowe

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

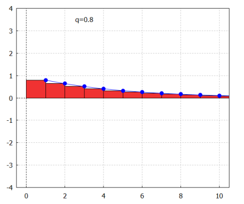
```
(%o4) sum:  sum is divergent.
      #0:  sq(q=2) -- an error.  To debug this try:  debugmode(true);
```

- W poniższym przykładzie wystarczy zmienić wartość q na początku.

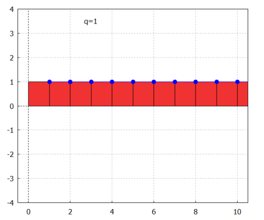
```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

03. Szeregi liczbowe

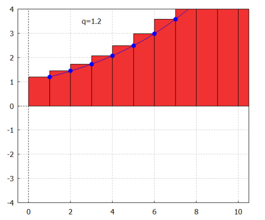
Polecenia wyświetlą następujące wykresy:



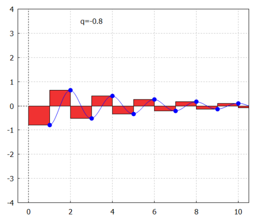
$q = 0.8$



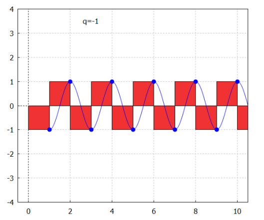
$q = 1$



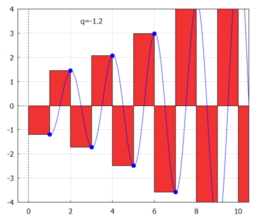
$q = 1.2$



$q = -0.8$



$q = -1$



$q = -1.2$

03. Szeregi liczbowe

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in N$ (**argumenty nieujemne**) zawsze ma sumę $0 \leq s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \infty$.

Kryterium porównania. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$ $\quad\Rightarrow\quad$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\quad\Rightarrow\quad$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

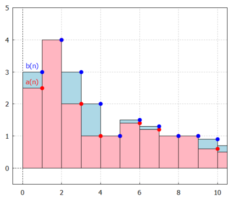
Wersja graniczna. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p$, $0 < p < \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

03. Szeregi liczbowe

(%i1)
```
a:[2.5,4,2,1,1,1.4,1.2,1,1,0.6,0.5]$
pa:makelist([i,a[i]],i,1,11)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a[i]]),i,1,11)$
b:[3.0,4,3,2,1,1.5,1.3,1,1,0.9,0.7]$
pb:makelist([i,b[i]],i,1,11)$
rb:makelist(rectangle([i-1,0],[i,b[i]]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.5,5],
border=true,color=black,fill_color=light_blue,
rb,color=black,fill_color=light_pink,ra,
point_type=7,color=red,points(pa),point_type=7,
color=blue,points(pb),color=red,label(["a(n)",.5,2.7]),
color=blue,label(["b(n)",.5,3.2]))$
```



03. Szeregi liczbowe

Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

03. Szeregi liczbowe

Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1.\ \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1.\ \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

03. Szeregi liczbowe

Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

03. Szeregi liczbowe

Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

03. Szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow \text{dla } a > 0.$$

Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ dla $a > 0.$

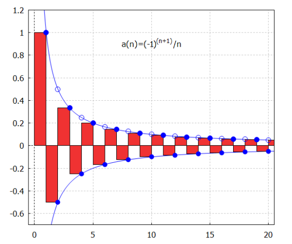
Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ dla $a > 0.$

```
(%i5)  an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
           limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
           limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%o3)  0
(%o4)  0
(%o5)  0
```

03. Szeregi liczbowe

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)/n$ pa:makelist([i,a(i)],i,1,21)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,21)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,20.5],yrange=[-.7,1.2],
color=blue,explicit(abs(a(n)),n,.5,21),
explicit(-abs(a(n)),n,.5,21),
border=true,color=black,fill_color=light_red,ra,
label(["a(n)=(-1)^{(n+1)}/n",10,.9]),
point_type=6,color=blue,points(abs(pa)),point_type=7,
color=blue,points(pa))$
```



04. Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcja zmiennej rzeczywistej.
- $H(f) \subset R$ Funkcja o wartościach rzeczywistych (rzeczywista funkcja).

Jawnie: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (wzór analityczny).

Parametrycznie: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (funkcje pomocnicze φ, ψ).

Niejawnie: • $f\colon F(x, y) = 0$, warunki dla $[x; y]$ (równanie niejawne).

Funkcja $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Na przykład możemy zdefiniować funkcję $f\colon y = |x|$, $x \in R$:

Jawnie:	• $y = \sqrt{x^2}$,	lub	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametrycznie:	• $x = t$, $y = \|t\|$, $t \in R$,	lub	• $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
Niejawnie:	• $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,	lub	• $y - \|x\| = 0$.

04. Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcja zmiennej rzeczywistej.
- $H(f) \subset R$ Funkcja o wartościach rzeczywistych (rzeczywista funkcja).

Jawnie: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (wzór analityczny).

Parametrycznie: • $f\colon\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J,\ J \subset R$ (funkcje pomocnicze φ, ψ).

Niejawnie: • $f\colon\ F(x, y) = 0$, warunki dla $[x; y]$ (równanie niejawne).

Funkcja $f\colon\ y = |x|,\ x \in R$.

Na przykład możemy zdefiniować funkcję $f\colon\ y = |x|,\ x \in R$:

Jawnie: • $y = \sqrt{x^2}$, lub • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametrycznie: • $x = t,\ y = |t|,\ t \in R$, lub • $x = t,\ y = \sqrt{t^2},\ t \in R$.

Niejawnie: • $y^2 - x^2 = 0,\ y \geq 0$, lub • $y - |x| = 0$.

04. Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) H(f)$.

- $D(f) \subset R$ — Funkcja zmiennej rzeczywistej.
- $H(f) \subset R$ — Funkcja o wartościach rzeczywistych (rzeczywista funkcja).

Jawnie: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (wzór analityczny).

Parametrycznie: • $f\colon\ x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (funkcje pomocnicze φ, ψ).

Niejawnie: • $f\colon\ F(x, y) = 0$, warunki dla $[x; y]$ (równanie niejawne).

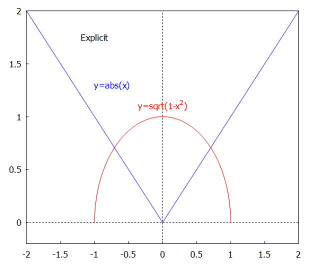
Funkcja $f\colon\ y = |x|$, $x \in R$.

Na przykład możemy zdefiniować funkcję $f\colon\ y = |x|$, $x \in R$:

Jawnie:	• $y = \sqrt{x^2}$,	lub	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametrycznie:	• $x = t$, $y = \|t\|$, $t \in R$,	lub	• $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
Niejawnie:	• $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,	lub	• $y - \|x\| = 0$.

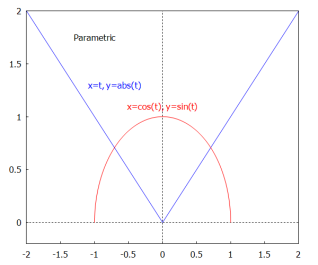
04. Funkcje

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,explicit(abs(x),x,-2,2),
label(["y=abs(x)",-.75,1.3]),
color=red,explicit(sqrt(1-x^2),x,-1,1),
label(["y=sqrt(1-x^2)",0,1.1]),
color=black,label(["Explicit",-1,1.75]))$
```



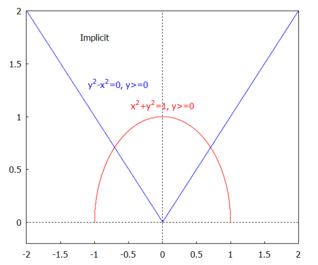
04. Funkcje

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,parametric(t,abs(t),t,-2,2),
label(["x=t, y=abs(t)",-.7,1.3]),
color=red,nticks=100,parametric(cos(t),sin(t),t,0,%pi),
label(["x=cos(t), y=sin(t)",0,1.1]),
color=black,label(["Parametric",-1,1.75]))$
```



04. Funkcje

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,implicit(y^2-x^2,x,-2,2,y,0,2),
label(["y^2-x^2=0, y>=0",-.65,1.3]),
color=red,implicit(x^2+y^2-1,x,-1,1,y,0,1),
label(["x^2+y^2=1, y>=0",0,1.1]),
color=black,label(["Implicit",-1,1.75]))$
```



05. Funkcje elementarne I

Funkcja elementarna nazywa się każdą utworzoną funkcją za pomocą skończonej liczby operacji arytmetycznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie) oraz złożenia (superpozycji) z z podstawowych funkcji elementarnych:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Wielomian stopnia n

$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ nazywa się **funkcją stałą**.
- $f_1\colon\ y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ nazywa się **funkcją liniową**.
- $f_2\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ nazywa się **funkcja kwadratowa**.

05. Funkcje elementarne I

Funkcja elementarna nazywa się każdą utworzoną funkcją za pomocą skończonej liczby operacji arytmetycznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie) oraz złożenia (superpozycji) z z podstawowych funkcji elementarnych:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

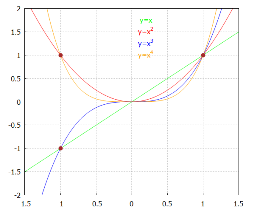
Wielomian stopnia n

$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ nazywa się **funkcją stałą**.
- $f_1\colon\ y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ nazywa się **funkcją liniową**.
- $f_2\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ nazywa się **funkcja kwadratowa**.

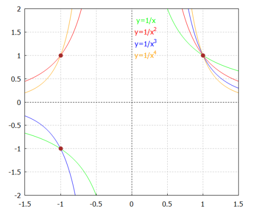
05. Funkcje elementarne I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(x,x,-1.5,1.5),
label(["y=x",.2,1.75]),
color=red,explicit(x^2,x,-1.5,1.5),
label(["y=x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(x^3,x,-1.5,1.5),
label(["y=x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(x^4,x,-1.5,1.5),
label(["y=x^4",.2,1]),color=brown,
point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



05. Funkcje elementarne I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(1/x,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x",.2,1.75]),
color=red,explicit(1/x^2,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(1/x^3,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(1/x^4,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^4",.2,1]),color=brown,
point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



05. Funkcje elementarne I

Funkcja wymierna

$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, gdzie f_n, f_m to wielomiany stopni $n, m \in N \cup \{0\}$.

Funkcja potęgowa

$f\colon\ y = x^r$, gdzie $r \in R$, $r \neq 0$.

Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$

$f\colon\ y = a^x$, $x \in R$.

- Najważniejszą z nich jest $f\colon\ y = \exp x = e^x$ z podstawą e (liczba Eulera).
- Wykres nazywa się **krzywą wykładniczą** i przechodzi przez punkty $[0; 1]$ i $[1; a]$.
- Wykresy funkcji $y = a^x$, $y = a^{-x}$ są symetryczne wzdłuż osi y.

05. Funkcje elementarne I

Funkcja wymierna

$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, gdzie f_n, f_m to wielomiany stopni $n, m \in N \cup \{0\}$.

Funkcja potęgowa

$f\colon\ y = x^r$, gdzie $r \in R$, $r \neq 0$.

Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$

$f\colon\ y = a^x$, $x \in R$.

- Najważniejszą z nich jest $f\colon\ y = \exp x = e^x$ z podstawą e (liczba Eulera).
- Wykres nazywa się **krzywą wykładniczą** i przechodzi przez punkty $[0; 1]$ i $[1; a]$.
- Wykresy funkcji $y = a^x$, $y = a^{-x}$ są symetryczne wzdłuż osi y.

05. Funkcje elementarne I

Funkcja wymierna

$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, gdzie f_n, f_m to wielomiany stopni $n, m \in N \cup \{0\}$.

Funkcja potęgowa

$f\colon\ y = x^r$, gdzie $r \in R,\ r \neq 0$.

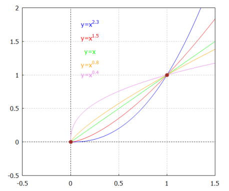
Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$

$f\colon\ y = a^x,\ x \in R$.

- Najważniejszą z nich jest $f\colon\ y = \exp x = \mathrm{e}^x$ z podstawą e (liczba Eulera).
- Wykres nazywa się **krzywą wykładniczą** i przechodzi przez punkty $[0; 1]$ i $[1; a]$.
- Wykresy funkcji $y = a^x$, $y = a^{-x}$ są symetryczne wzdłuż osi y.

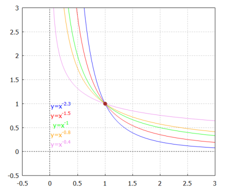
05. Funkcje elementarne I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,1.5],yrange=[-.5,2],
color=blue,explicit(x^2.3,x,0,1.5),
label(["y=x^{2.3}",.2,1.75]),
color=red,explicit(x^1.5,x,0,1.5),
label(["y=x^{1.5}",.2,1.55]),
color=green,explicit(x,x,-0,1.5),
label(["y=x",.2,1.35]),
color=orange,explicit(x^.8,x,0,1.5),
label(["y=x^{0.8}",.2,1.15]),
color=violet,explicit(x^.4,x,0,1.5),
label(["y=x^{0.4}",.2,1]),
color=brown,point_type=7,points([[0,0],[1,1]]))$
```



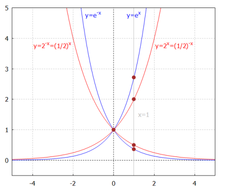
05. Funkcje elementarne I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,3],yrange=[-.5,3],
color=blue,explicit(x^-2.3,x,0,3),
label(["y=x^{-2.3}",.2,.95]),
color=red,explicit(x^-1.5,x,0,3),
label(["y=x^{-1.5}",.2,.75]),
color=green,explicit(x^-1,x,-0,3),
label(["y=x^{-1}",.2,.55]),
color=orange,explicit(x^-.8,x,0,3),
label(["y=x^{-0.8}",.2,.35]),
color=violet,explicit(x^-.4,x,0,3),
label(["y=x^{-0.4}",.2,.15]),
color=brown,point_type=7,points([[1,1]]))$
```



05. Funkcje elementarne I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-.5,5],
color=blue,explicit(%e^x,x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.75]),
explicit(%e^(-x),x,-5,5),
label(["y=e^{-x}",-1,4.75]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x=(1/2)^{-x}",3,3.75]),
explicit(2^(-x),x,-5,5),
label(["y=2^{-x}=(1/2)^x",-3,3.75]),
color=grey,parametric(1,t,t,-.5,5),
label(["x=1",1.5,1.5]),color=brown,point_type=7,
points([[0,1],[1,1/2],[1,2],[1,1/%e],[1,%e]]))$
```



05. Funkcje elementarne I

```
(%i1) exp(x)+%e^x;exp(1);
```

(%o1) $2\%e^x$

(%o2) $\%e$

```
(%i5) log(x);log(2);log(%e);
```

(%o3) $\log(x)$

(%o4) $\log(2)$

(%o5) 1

```
(%i8) log_2(x):=log(x)/log(2);log_2(2);log_2(%e);
```

(%o6) $\log\_2(x) := \frac{\log(x)}{\log(2)}$

(%o7) 1

(%o8) $\frac{1}{\log(2)}$

05. Funkcje elementarne I

Funkcja logarytmiczna o podstawie $a > 0,\ a \neq 1$

$$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty).$$

- Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$, $x \in \langle 0; \infty)$ jest odwrotna funkcji wykładniczej $y = a^x$, $x \in R$ o tej samej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Dla $a > 0$, $a \neq 1$ zachodzi: $x = a^{\log_a x}$ dla $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ dla $x \in R$.
- Wykres nazywa się krzywa logarytmiczna i przechodzi przez punkty $[1; 0]$ i $[a; 1]$.
- Wykresy funkcji $y = \log_a x$ i $y = \log_{a^{-1}} x$ są symetryczne wzdłuż osi x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Logarytm dziesiętny, oznaczenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = e$. $\Rightarrow$ logarytm naturalny, oznaczenie $\ln x = \log_e x$.
  `exp(x)=%e^x` i `log(x)` (logarytm naturalny) mają podstawę e.
- Jeśli chcemy obliczyć logarytm o innej podstawie, np. $\log_2 x$, musimy użyć następującej konstrukcji $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

05. Funkcje elementarne I

Funkcja logarytmiczna o podstawie $a > 0,\ a \neq 1$

$$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in (0; \infty).$$

- Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ jest odwrotna funkcji wykładniczej $y = a^x$, $x \in R$ o tej samej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ $(y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y)$.
- Dla $a > 0$, $a \neq 1$ zachodzi: $x = a^{\log_a x}$ dla $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ dla $x \in R$.
- Wykres nazywa się krzywa logarytmiczna i przechodzi przez punkty $[1; 0]$ i $[a; 1]$.
- Wykresy funkcji $y = \log_a x$ i $y = \log_{a^{-1}} x$ są symetryczne wzdłuż osi x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Logarytm dziesiętny, oznaczenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ logarytm naturalny, oznaczenie $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` i `log(x)` (logarytm naturalny) mają podstawę e.
- Jeśli chcemy obliczyć logarytm o innej podstawie, np. $\log_2 x$, musimy użyć następującej konstrukcji $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

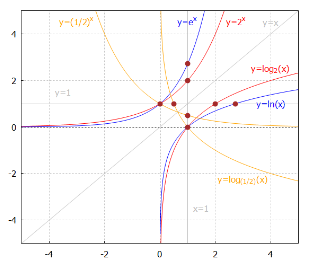
05. Funkcje elementarne I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(exp(x),x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.5]),
explicit(log(x),x,.01,5),label(["y=ln(x)",4,1]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x",2.75,4.5]),
explicit(log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_2(x)",4,2.5]),
color=orange,explicit((1/2)^x,x,-5,5),
label(["y=(1/2)^x",-3,4.5]),
explicit(-log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/2)}(x)",3,-2.25]),
color=grey,parametric(t,t,t,-5,5),label(["y=x",4,4.5]),
parametric(1,t,t,-5,5),label(["x=1",1.5,-3.5]),
parametric(t,1,t,-5,5),label(["y=1",-3.5,1.5]),
color=brown,point_type=7,points([[1,0],[0,1],
[1,2],[2,1],[1,1/2],[1/2,1],[1,%e],[%e,1]]))$
```

05. Funkcje elementarne I

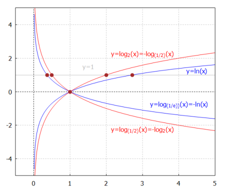
- Wykresy funkcji wykładniczych i logarytmicznych z poprzedniej strony.

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(exp(x),x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.5]),
explicit(log(x),x,.01,5),label(["y=ln(x)",4,1]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x",2.75,...
```
the command continues (previous page)



05. Funkcje elementarne I

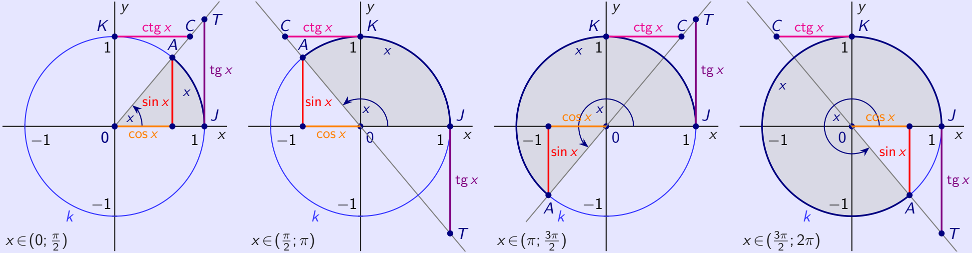
(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(log(x),x,.01,5),
oznaczenie(["y=ln(x)",4.5,1.25]),
explicit(-log(x),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/e))}(x)=-ln(x)",4,-.75]),
color=red,explicit(log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_2(x)=-log_{(1/2)}(x)",3,2.25]),
explicit(-log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/2)}(x)=-log_2(x)",3,-2.25]),
color=grey,parametric(t,1,t,-.5,5),
label(["y=1",1.5,1.5]),color=brown,point_type=7,
points([[1,0],[1/2,1],[2,1],[1/%e,1],[%e,1]]))$
```



06. Funkcje elementarne II

Funkcje trygonometryczne to:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1\rangle$.
- **Cosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1\rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\} \to R$.
- **Cotangens** $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{k\pi, k \in Z\} \to R$.



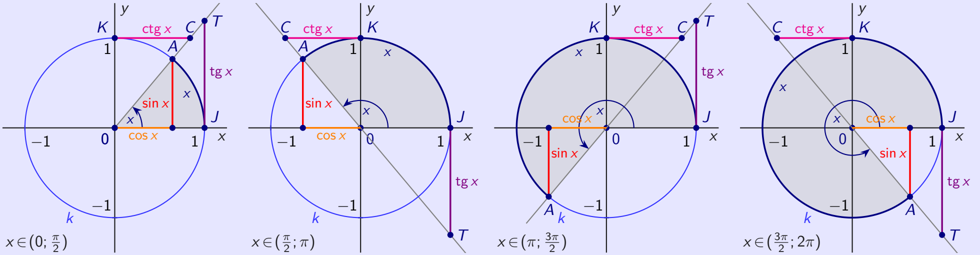
$x \in (0; \frac{\pi}{2})$ $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ $x \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$ $x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

- Liczba π nazywa się **Ludolfa**. Jego wartość to około $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π. Okrąg z przerwąrom $r = 1$ ma obwód 2π.

06. Funkcje elementarne II

Funkcje trygonometryczne to:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Cosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\} \to R$.
- **Cotangens** $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{k\pi, k \in Z\} \to R$.



- Liczba π nazywa się **Ludolfa**. Jego wartość to około $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π. Okrąg z przerwąrom $r = 1$ ma obwód 2π.

06. Funkcje elementarne II

- W Maximie funkcje trygonometryczne mają postać `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty funkcji trygonometrycznych muszą być podane w radianach.
- Jeśli chcemy używać stopni, musimy najpierw zamienić je na radiany.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
      ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

```
rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125
```

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Aby uprościć pracę z funkcjami trygonometrycznymi, możemy użyć poleceń `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` i pakiety `atrig1`, `ntrig` lub `spangl`, które obejmują dodatkowe wsparcie dla pracy z funkcjami trygonometrycznymi.
- Ładujemy pakiety do systemu za pomocą polecenia `load`.

06. Funkcje elementarne II

- W Maximie funkcje trygonometryczne mają postać `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty funkcji trygonometrycznych muszą być podane w radianach.
- Jeśli chcemy używać stopni, musimy najpierw zamienić je na radiany.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
      ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

```
rat:  replaced 0.125 by 1/8 = 0.125
```

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Aby uprościć pracę z funkcjami trygonometrycznymi, możemy użyć poleceń `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` i pakiety `atrig1`, `ntrig` lub `spangl`, które obejmują dodatkowe wsparcie dla pracy z funkcjami trygonometrycznymi.
- Ładujemy pakiety do systemu za pomocą polecenia `load`.

06. Funkcje elementarne II

(%i1) `tan(%pi/4);tan(%pi/6);tan(%pi/8);`

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i4) `ratsimp(tan(%pi/8));`

(%o4) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i5) `trigsimp(tan(%pi/8));`

(%o5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

(%i6) `load(spangl);`

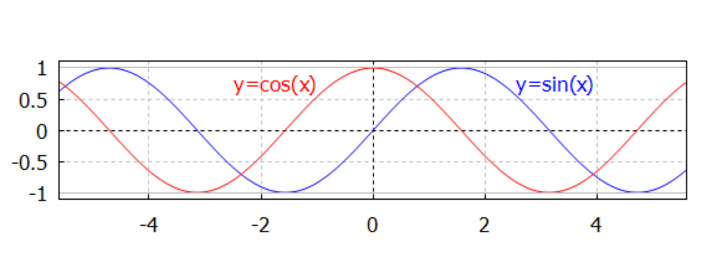
(%o6) *../share/trigonometry/spangl.mac*

(%i7) `tan(%pi/8);`

(%o7) $\sqrt{2}-1$

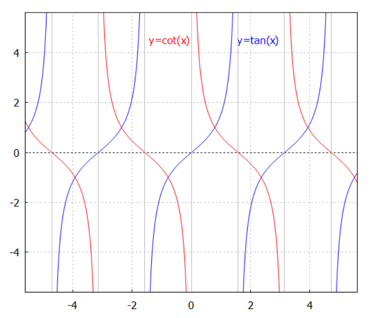
06. Funkcje elementarne II

(%i1)
```
draw2d(proportional_axes=xy,grid=true,
xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],yrange=[-1.1,1.1],
color=blue,explicit(sin(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=sin(x)",3.25,.75]),
color=red,explicit(cos(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=cos(x)",-1.75,.75]),
color=grey,parametric(t,1,t,-3*%pi,3*%pi),
parametric(t,-1,t,-3*%pi,3*%pi))$
```



06. Funkcje elementarne II

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],
      yrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],
      color=blue,explicit(tan(x),x,-3*%pi,3*%pi),
      label(["y=tan(x)",2.25,4.5]),
      color=red,explicit(cot(x),x,-3*%pi,3*%pi),
      label(["y=cot(x)",-.75,4.5]),
      color=grey,    /* asymptotes */
      parametric(0,t,t,-6,6),
      parametric(%pi/2,t,t,-6,6),
      parametric(-%pi/2,t,t,-6,6),
      parametric(%pi,t,t,-6,6),
      parametric(-%pi,t,t,-6,6),
      parametric(3*%pi/2,t,t,-6,6),
      parametric(-3*%pi/2,t,t,-6,6))$
```



06. Funkcje elementarne II

Wzory sumowania dla sinusów i cosinusów. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Funkcje cyklometryczne są funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych:

- **Arcus sinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- **Arcus cosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arcus tangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arcus cotangens** $y = \operatorname{arcctg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Nie ma funkcji odwrotnych dla funkcji trygonometrycznych, ponieważ nie są one iniekcyjne. Funkcje należy odpowiednio zawęzić.

06. Funkcje elementarne II

Wzory sumowania dla sinusów i cosinusów. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2\sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Funkcje cyklometryczne są funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych:

- **Arcus sinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1\rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.
- **Arcus cosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle$.
- **Arcus tangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- **Arcus cotangens** $y = \operatorname{arcctg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Nie ma funkcji odwrotnych dla funkcji trygonometrycznych, ponieważ nie są one iniekcyjne. Funkcje należy odpowiednio zawęzić.

06. Funkcje elementarne II

- Funkcje cyklometryczne mają postać `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`.
- W tym miejscu możemy wspomnieć o funkcji `atan2(x,y)` zdefiniowanej relacją arctg $\frac{x}{y}$.

(%i4) `asin(1);asin(1),numer;`
`acos(1);acos(1),numer;`

(%o1) $\frac{\pi}{2}$

(%o2) 1.570796326794897

(%o1) 0

(%o2) 0.0

(%i7) `atan2(2,4);atan(1/2);atan(1/2),numer;`

(%o5) $\mathtt{atan}(\frac{1}{2})$

(%o6) $\mathtt{atan}(\frac{1}{2})$

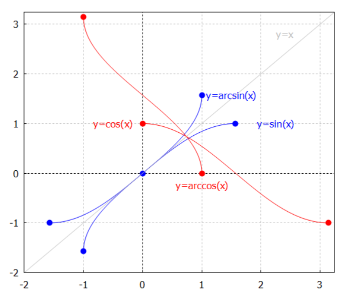
(%o7) 0.463647609000806

Wzory sumowania dla funkcji cyklometrycznych.

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in R$.

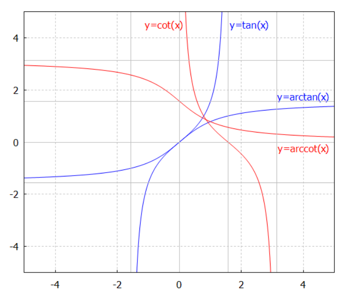
06. Funkcje elementarne II

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,%pi+.1],yrange=[-2,%pi+.1],
color=blue,explicit(sin(x),x,-%pi/2,%pi/2),
label(["y=sin(x)",2.25,1]),explicit(asin(x),x,-1,1),
label(["y=arcsin(x)",1.5,%pi/2]),
point_type=7, points([[0,0],[1,%pi/2],
[-1,-%pi/2],[%pi/2,1],[-%pi/2,-1]]),
color=red,explicit(cos(x),x,0,%pi),
label(["y=cos(x)",-.5,1]),
explicit(acos(x),x,-1,1),
label(["y=arccos(x)",1,-.25]),
point_type=7,
points([[0,1],[1,0],
[%pi,-1],[-1,%pi]]),
color=grey,
parametric(t,t,t,-5,5),
label(["y=x",2.4,2.8]))$
```



06. Funkcje elementarne II

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(tan(x),x,-%pi/2+.01,%pi/2-.01),
label(["y=tan(x)",2.25,4.5]),explicit(atan(x),x,-5,5),
label(["y=arctan(x)",4,1.75]),color=grey,
parametric(t,-%pi/2,t,-5,5),parametric(t,%pi/2,t,-5,5),
parametric(-%pi/2,t,t,-5,5),parametric(%pi/2,t,t,-5,5),
color=red,explicit(cot(x),x,.01,%pi-.01),
label(["y=cot(x)",-.5,4.5]),
explicit(%pi/2-atan(x),x,-5,5),
label(["y=arccot(x)",4,-.25]),
color=grey,
parametric(t,0,t,-5,5),
parametric(t,%pi,t,-5,5),
parametric(0,t,t,-5,5),
parametric(%pi,t,t,-5,5))$
```



06. Funkcje elementarne II

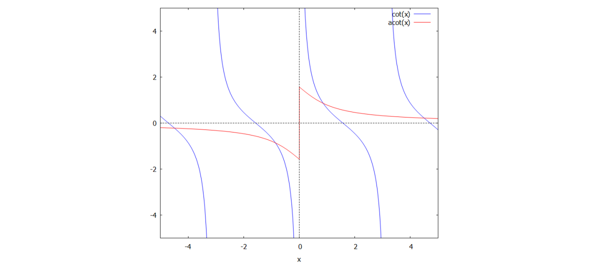
- Musimy uważać na nieprecyzyjną interpretację funkcji arcus costangens.

(%i4)
```
acot(-1)$
print("acot(-1)=",acot(-1),"is bad")$
%pi/2-atan(-1)$
print("acot(-1)=",%pi/2-atan(-1),"is ok")$
```

$acot(-1) = -\frac{\pi}{4}$ *is bad*

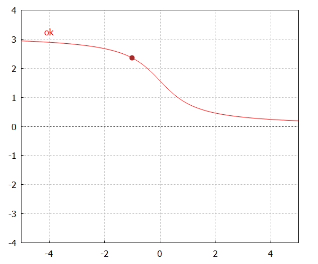
$acot(-1) = -\frac{3\pi}{4}$ *is ok*

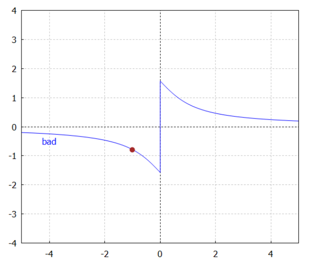
(%i5)
```
plot2d([cot(x),acot(x)],[x,-5,5],[y,-5,5])$
```



06. Funkcje elementarne II

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],color=red,
      explicit(%pi/2-atan(x),x,-5,5),label(["ok",-4,3.25]),
      color=brown,point_type=7,
      points([[-1,%pi/2-atan(-1)]]))$
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],color=blue,
      explicit(acot(x),x,-5,5),label(["bad",-4,-.5]),
      color=brown,point_type=7,points([[-1,acot(-1)]]))$
```





06. Funkcje elementarne II

Funkcje hiperboliczne to:

- **Sinus hiperboliczny** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $\quad R \to R$.
- **Cosinus hiperboliczny** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $\quad R \to \langle 1; \infty)$.
- **Tangens hiperboliczny** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $\quad R \to (-1; 1)$.
- **Cotangens hiperboliczny** $y = \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $\quad R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Funkcje hiperboliczne mają podobne właściwości do funkcji trygonometrycznych.

wzory sumowania dla sinusów i cosinusów hiperbolicznych. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

06. Funkcje elementarne II

Funkcje hiperboliczne to:

- **Sinus hiperboliczny** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\, e^x}$: $\quad R \to R$.
- **Cosinus hiperboliczny** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\, e^x}$: $\quad R \to \langle 1; \infty)$.
- **Tangens hiperboliczny** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $\quad R \to (-1; 1)$.
- **Cotangens hiperboliczny** $y = \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $\quad R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Funkcje hiperboliczne mają podobne właściwości do funkcji trygonometrycznych.

wzory sumowania dla sinusów i cosinusów hiperbolicznych. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

06. Funkcje elementarne II

Formuła Moivre'a. $x \in R,\ n \in N.$

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$

- Funkcje hiperboliczne są `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` i do nich odwrotne funkcje hiperbolometryczne są `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

```
(%i4) sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1) sinh(x)
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 1.313035285499331
(%i8) asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5) asinh(x)
(%o6) 0
(%o7) 0
(%o8) 1.01844096363052
```

06. Funkcje elementarne II

Funkcje hiperbolometryczne (funkcje hiperboliczne odwrotne) są funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych:

- **Area sinus hiperboliczny**

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right): \quad R \to R.$$

- **Area cosinus hiperboliczny**

$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right): \quad \langle 1; \infty) \to \langle 0; \infty).$$

- **Area tangens hiperboliczny**

$$y = \operatorname{artgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1+x}{1-x}: \quad (-1; 1) \to R.$$

- **Area cotangens hiperboliczny**

$$y = \operatorname{arctgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{x+1}{x-1}: \quad R - \langle -1; 1\rangle \to R - \{0\}.$$

```
(%i3)  ash(x):=log(x+sqrt(x^2+1))$
       a:2$ asinh(a)-ash(a),numer;
(%o3)  0.0
```

07. Granica funkcji

- Badając funkcję, należy scharakteryzować jej lokalne właściwości w różnych przedziałach i wokół ważnych punktów.
- Funkcja f może nie być zdefiniowana w punkcie, wokół którego ją badamy.

Punkt $a \in R^*$ jest nazywany **punktem skupienia** zbioru $A \subset R$,
jeśli dla każdego Otoczenia $O(a)$ istnieje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Następująca definicja wykorzystująca ciągi nazywana jest definicja Heinego.

Funkcja f **ma granicę równą** $b \in R^*$ w punkcie $a \in R^*$, oznaczenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.
- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ obowiązuje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Jeśli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, wtedy istnieje (co najmniej jeden) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ trzyma.

07. Granica funkcji

- Badając funkcję, należy scharakteryzować jej lokalne właściwości w różnych przedziałach i wokół ważnych punktów.
- Funkcja f może nie być zdefiniowana w punkcie, wokół którego ją badamy.

Punkt $a \in R^*$ jest nazywany **punktem skupienia** zbioru $A \subset R$, jeśli dla każdego Otoczenia $O(a)$ istnieje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Następująca definicja wykorzystująca ciągi nazywana jest definicja Heinego.

Funkcja f ma granicę równą $b \in R^*$ w punkcie $a \in R^*$, oznaczenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.
- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ obowiązuje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Jeśli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, wtedy istnieje (co najmniej jeden) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$ i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ trzyma.

07. Granica funkcji

$a \in R^*$ jest punktem skupienia zbiorów $D(f)$ i $D(g)$, otoczenie $O(a)$.

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$:
- $f(x) = g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ jeśli istnieją.
- $f(x) \leq g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ jeśli istnieją..

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$:
- $f(x) < g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ jeśli istnieją..

Zdanie o dwóch policjantach.

$a \in R^*$ jest punktem skupienia zbiorów $D(f)$, $D(g)$ i $D(h)$, otoczenie $O(a)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in O(a),\ x \neq a\colon\ h(x) \leq f(x) \leq g(x). \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b, \text{ gdzie } b \in R^*. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Istnieje } \lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- ∞ jest punktem skupienia dziedziny $D(f) = R - \{0\}$ funkcje $f\colon\ y = \frac{\sin x}{x}$.
- $x > 0. \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

07. Granica funkcji

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o1) 0
```

```
(%i1) f(x):=sin(x)/x$ for i:1 thru 10 do
          (x:100^i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

100 $-0.0050636564110975 88$

$$
\begin{array}{ll}
100 & -0.005063656411097588 \\
10000 & -3.056143888882521 \cdot 10^{-5} \\
1000000 & -3.499935021712929 \cdot 10^{-7} \\
100000000 & 9.31639027109726 \cdot 10^{-9} \\
10000000000 & -4.875060250875107 \cdot 10^{-11} \\
1000000000000 & -6.112387023768895 \cdot 10^{-13} \\
100000000000000 & -2.094083074964523 \cdot 10^{-15} \\
10000000000000000 & 7.796880066069787 \cdot 10^{-17} \\
1000000000000000000 & -9.929693207404051 \cdot 10^{-19} \\
100000000000000000000 & -6.452512852657808 \cdot 10^{-21}
\end{array}
$$

07. Granica funkcji

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- 0 jest punktem skupienia dziedziny $D(f) = R - \{0\}$ funkcje $f\colon\ y = \frac{\sin x}{x}$.
- $0 < x < \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.
- $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. $\Rightarrow \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0$. $\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x} = 1$.
- $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. $\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,0);
(%o1) 1
(%i2) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o2) 0
(%i3) limit(sin(x)/x,x,minf);
(%o3) 0
```

07. Granica funkcji

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)=1.$

```
(%i2) limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0);limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1) und            /* undefined */
(%o2) 1
```

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}\cdot\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2}{x^2+4}=\frac{3\cdot 0+2}{0+4}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$

```
(%i3) limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
      limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
      limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
(%o1) 1
(%o2) 1/2
(%o3) 1/2
```

07. Granica funkcji

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)=1.$

```
(%i2) limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0);limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1) und             /* undefined */
(%o2) 1
```

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}\cdot\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2}{x^2+4}=\frac{3\cdot 0+2}{0+4}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$

```
(%i3) limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
      limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
      limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
(%o1) 1
(%o2) 1/2
(%o3) 1/2
```

07. Granica funkcji

- $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+x\cdot\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}.$$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}=\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}=1+1=2.$$

```
(%i3)  limit(x/(sqrt(1+x)-sqrt(1-x)),x,0);
       limit((1-sqrt(1-x))/x,x,0);
       limit((\sqrt(x^2-1)+sqrt(x^2+1))/x,x,inf);
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) 2

07. Granica funkcji

- $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\begin{bmatrix}\text{Subst.} & x=z^{12}\\ x\to 1, & z\to 1\end{bmatrix}=\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^3-1}$$
$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1}=\frac{1+1+1+1}{1+1+1}=\frac{4}{3}.$$

```
(%i1) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
(%o1) 4/3
```

Jeśli użyjemy podstawienia $x=z^{12}$, możemy uprościć granicę.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$
      g(z):=subst(z^12,x,f(x))$
      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
(%o1) lim_{z->1} (z^4-1)/(z^2·|z|-1)          /* z is positive, z=|z| */
(%o2) 4/3
```

07. Granica funkcji

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\begin{bmatrix}\text{Subst.} & x=z^{12}\\ x\to 1, & z\to 1\end{bmatrix}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^3-1}$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1}=\frac{1+1+1+1}{1+1+1}=\frac{4}{3}.$$

(%i1) `limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);`

(%o1) $\frac{4}{3}$

Jeśli użyjemy podstawienia $x=z^{12}$, możemy uprościć granicę.

(%i2)
```
f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$
g(z):=subst(z^12,x,f(x))$
'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
```

(%o1) $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^2\cdot|z|-1}$ `/* z is positive, z=|z| */`

(%o2) $\frac{4}{3}$

07. Granica funkcji

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1-\infty^{-2}}+2^0=\frac{5}{1-0}+1=6.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^a=e^a$ pre $a\in R$.

```
(%i4) limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(2/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(-2/log(x)),x,0,plus);
```

(%o1) 6
(%o2) e^a
(%o3) e^2
(%o4) e^{-2}

W ostatnim przykładzie obliczyliśmy granicę wyrażenia 0^0 (tak zwane wyrażenie nieokreślone).

Wśród **wyrażeń nieokreślonych** (liczymy je za pomocą granic) są:

- $\infty-\infty$, • $\pm\infty\cdot 0$, • $\frac{0}{0}$, • $\frac{1}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, • 0^0, • $0^{\pm\infty}$, • $1^{\pm\infty}$, • $(\pm\infty)^0$.

07. Granica funkcji

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1-\infty^{-2}}+2^0=\frac{5}{1-0}+1=6.$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^a=e^a$ pre $a\in R$.

```
(%i4) limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(2/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(-2/log(x)),x,0,plus);
```

(%o1) 6
(%o2) e^a
(%o3) e^2
(%o4) e^{-2}

W ostatnim przykładzie obliczyliśmy granicę wyrażenia 0^0 (tak zwane wyrażenie nieokreślone).

Wśród **wyrażeń nieokreślonych** (liczymy je za pomocą granic) są:

- $\infty-\infty$, • $\pm\infty\cdot 0$, • $\frac{0}{0}$, • $\frac{1}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, • 0^0, • $0^{\pm\infty}$, • $1^{\pm\infty}$, • $(\pm\infty)^0$.

07. Granica funkcji

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2)-\ln x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \ln e^2 = 2.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix}\text{Subst.} & z=tx\\ x\to 0, & z\to 0\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{\frac{z}{t}}{\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\ln(1+z)}$
  $= \frac{1}{t}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{t}$ dla $t\in R,\ t\neq 0.$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } z=3x+1\\ x\to\infty, \quad z\to\infty\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}}$
  $= \lim\limits_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[e^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

```
(%i3)  limit(x*(log(x+2)-log(x)),x,inf);
       limit(x/log(1+t*x),x,0);
       limit(((3*x-2)/(3*x+1))^x,x,inf);
```

(%o1) 2
(%o2) $\frac{1}{t}$
(%o3) e^{-1}

07. Granica funkcji

Podczas badania funkcji f ważne jest zbadanie jej właściwości w innych niż punkty własne:

- Dla $x \to \pm\infty$.
- W otoczeniu $O(a)$ punktów $a \in R$ gdzie $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in R$.

- Prosta linia $x = a$ nazywa się **asymptotą pionową** wykresu f, jeśli $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ (asymptota lewostronna) lub $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (asymptota prawostronna) (co najmniej jedna z granic jest nieskończona).
- Prosta linia $y = kx + q$ nazywa się **asymptota ukośna** wykresu f,

  jeśli $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ lub $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

Specjalnie asymptota $y = q$ nazywa się **asymptotą poziomą**,

tj. $k = 0$ i $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = q$ lub $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = q$.

07. Granica funkcji

Podczas badania funkcji f ważne jest zbadanie jej właściwości w innych niż punkty własne:

- Dla $x \to \pm\infty$.
- W otoczeniu $O(a)$ punktów $a \in R$ gdzie $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in R$.

- Prosta linia $x = a$ nazywa się **asymptotą pionową** wykresu f, jeśli $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ (asymptota lewostronna) lub $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ (asymptota prawostronna) (co najmniej jedna z granic jest nieskończona).
- Prosta linia $y = kx + q$ nazywa się **asymptota ukośna** wykresu f,

  jeśli $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ lub $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Specjalnie asymptota $y = q$ nazywa się **asymptotą poziomą**,

tj. $k = 0$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = q$ lub $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = q$.

07. Granica funkcji

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, gdzie $D(f)$ jest zbiorem nieograniczonym.

- Prosta linia $y = kx + q$ jest asymptotą asymptota wykresu f.

$\Leftrightarrow$ • Istnieje $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkcja $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Prosta linia $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ jest asymptotą ukośną z nachyleniem $\frac{1}{4}$.

07. Granica funkcji

Funkcja $y=f(x)$, $x\in D(f)$, gdzie $D(f)$ jest zbiorem nieograniczonym.

- Prosta linia $y=kx+q$ jest asymptotą asymptota wykresu f.

$\Leftrightarrow$ • Istnieje $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=q$, $k,q\in R$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(kx+q)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{q}{x}\right]=0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+q)]=\lim_{x\to\infty}[(f(x)-kx)-q]=0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=q.$$

Funkcja $f(x)=\frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x\in R$.

- $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x+1}{8x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8}=\frac{2+0+0}{8}=\frac{1}{4}$.
- $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2+x+1}{8x}-\frac{x}{4}\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2+x+1}{8x}-\frac{2x^2}{8x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{8x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right]=\frac{1}{8}.$$

- Prosta linia $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{8}$ jest asymptotą ukośną z nachyleniem $\frac{1}{4}$.

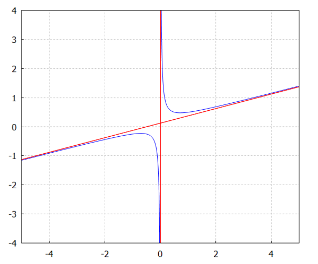
07. Granica funkcji

(%i10)
```
f(x):=(2*x^2+x+1)/(8*x); km:limit(f(x)/x,x,minf)$
kp:limit(f(x)/x,x,inf)$
qm:limit(f(x)-km*x,x,minf)$ qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf)$
dm(x):=km*x+qm$ dp(x):=kp*x+qp$ dm(x);dp(x);
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],
color=blue,explicit(f(x),x,-8,0),
explicit(f(x),x,0,8),
color=red,parametric(0,t,t,-5,5),
explicit(dm(x),x,-8,8),
explicit(dp(x),x,-8,8))$
```

(%o1) $f(x) := \frac{2x^2+x+1}{8x}$

(%o8) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$

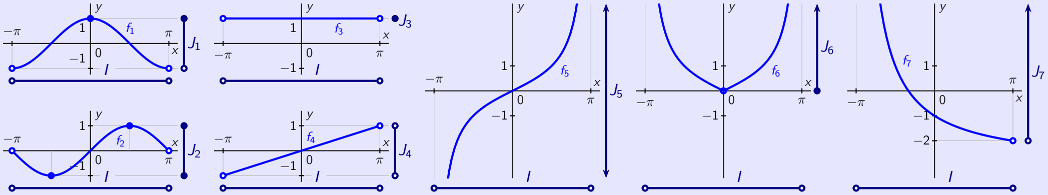
(%o9) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$



08. Ciągłość funkcji

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $I \subset R$, wtedy zbiór $f(I)$ jest przedziałem.

- $I = \langle a; b\rangle$ to przedział domknięty. $\Rightarrow$ • $f(I)$ jest przedziałem domkniętym.
- I nie jest przedziałem domkniętym. $\Rightarrow$ • $f(I)$ może być przedziałem dowolnego typu.



- $f_1(x) = \cos x$: $(-\pi;\pi) \to J_1 = (-1;1\rangle$.
- $f_2(x) = \sin x$: $(-\pi;\pi) \to J_2 = \langle -1;1\rangle$.
- $f_3(x) = 1$: $(-\pi;\pi) \to J_3 = \{1\}$.
- $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi;\pi) \to J_4 = (-1;1)$.
- $f_5(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$: $(-\pi;\pi) \to J_5 = (-\infty;\infty)$.
- $f_6(x) = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$: $(-\pi;\pi) \to J_6 = \langle 0;\infty)$.
- $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$: $(-\pi;\pi) \to J_7 = (-2;\infty)$.

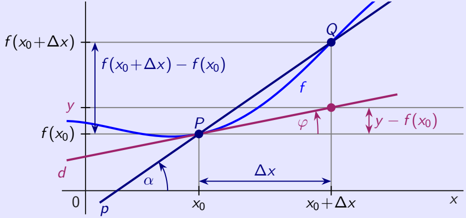
03. Rachunek różniczkowy

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest ciągła.

- Punkty $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leżą na wykresie f.
- Prosta linia PQ ma nachylenie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Styczna linia k f w punkcie P ma postać d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  gdzie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ to jego nachylenie.



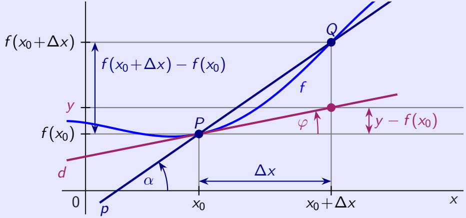
- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0+\Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ zmierza do stycznej).
- Linia styczna ma nachylenie $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometryczne znaczenie pochodnej funkcji w punkcie.
– Nachylenie linii stycznej do wykresu f w punkcie.

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest ciągła.

- Punkty $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leżą na wykresie f.
- Prosta linia PQ ma nachylenie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Styczna linia k f w punkcie P ma postać d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  gdzie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ to jego nachylenie.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ zmierza do stycznej).

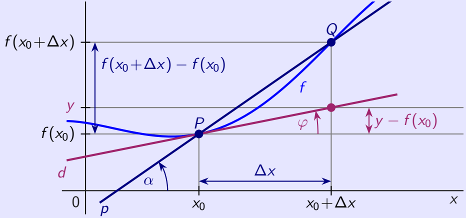
- Linia styczna ma nachylenie $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometryczne znaczenie pochodnej funkcji w punkcie.
– Nachylenie linii stycznej do wykresu f w punkcie.

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest ciągła.

- Punkty $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leżą na wykresie f.
- Prosta linia PQ ma nachylenie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Styczna linia k f w punkcie P ma postać d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  gdzie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ to jego nachylenie.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ zmierza do stycznej).

- Linia styczna ma nachylenie $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometryczne znaczenie pochodnej funkcji w punkcie.

– Nachylenie linii stycznej do wykresu f w punkcie.

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ ma **pochodną w punkcie** $x_0 \in D(f)$,
oznaczenie $f'(x_0)$, lub $y'(x_0)$ lub $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, lub $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ przy użyciu różniczek,

jeśli istnieje • $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$

$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ f'(x_0) \in R. & \text{Właściwa (skończona)} \\ \bullet\ f'(x_0) = \infty \text{ lub } f'(x_0) = -\infty. & \text{Niewłaściwa (nieskończona)} \end{array}\right\}$ pochodna f w punkcie x_0.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_o \in D(f)$.

• Istnieje $f'(x_0) \in R$ (skończona). $\Rightarrow$ • f jest ciągła w punkcie x_0.

Ciągłość funkcji f w punkcie x_0 nie gwarantuje istnienia $f'(x_0)$.

Funkcja $f\colon\ y = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

• Ale to nie istnieje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ ma **pochodną w punkcie** $x_0 \in D(f)$,

oznaczenie $f'(x_0)$, lub $y'(x_0)$ lub $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, lub $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ przy użyciu różniczek,

jeśli istnieje • $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

- $f'(x_0) \in R$. Właściwa (skończona)
- $f'(x_0) = \infty$ lub $f'(x_0) = -\infty$. Niewłaściwa (nieskończona)

} pochodna f w punkcie x_0.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_o \in D(f)$.

- Istnieje $f'(x_0) \in R$ (skończona). $\Rightarrow$ • f jest ciągła w punkcie x_0.

Ciągłość funkcji f w punkcie x_0 nie gwarantuje istnienia $f'(x_0)$.

Funkcja f: $y = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

- Ale to nie istnieje $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

$f'(x_0)$ reprezentuje geometrycznie .

- $f'(x_0) \in R$. Styczna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ z nachyleniem $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ i f jest ciągła w punkcie x_0.
  Styczna d: $x = x_0$ bez nachylenia (pionowa).

Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

$f'(x_0)$ reprezentuje geometrycznie .

- $f'(x_0) \in R$. Styczna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ z nachyleniem $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ i f jest ciągła w punkcie x_0.
  Styczna d: $x = x_0$ bez nachylenia (pionowa).

Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

W poprzednim przykładzie obliczyliśmy pochodną $f'(x)$ ale nie udało nam się go odpowiednio uprościć. Użyjemy polecenia `subst`.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `fp:subst(a,sqrt(x^2+1),f1(x));`

(fp) $\frac{\frac{x}{a}+1}{x+a}$

(%i5) `ratsimp(fp);`

(%o5) $\frac{1}{a}$

(%i6) `subst(sqrt(x^2+1),a,ratsimp(fp));`

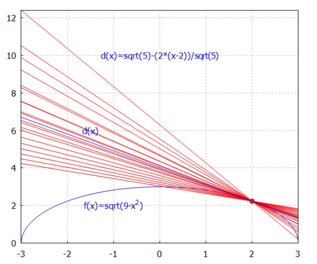
(%o6) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

01. Pochodna funkcji rzeczywistej

Wyznaczamy styczną w punkcie 2 do półokręgu $y = \sqrt{9 - x^2}$.

(%i8)
```
f(x):=sqrt(9-x^2)$ p(a,b):=(f(b)-f(a))/(b-a)$
s(x,a,b):=p(a,b)*(x-a)+f(a)$
S:makelist(explicit(s(x,2,-.15+.25*i),x,-3,3),i,1,20)$
f1(x):=diff(f(x),x,1)$
d(x):=f(2)+subst(2,x,f1(x))*(x-2)$
print("Secant d(x)=",d(x)," in point 2 is a blue")$
draw2d(grid=true,xaxis=true,
color=blue,explicit(f(x),x,-3,3),color=red,S,
color=blue,explicit(d(x),x,-3,3),
point_type=7,color=brown,
points([[2,f(2)]]),
color=blue,label(["d(x)",-1.5,6]),
label(["f(x)=sqrt(9-x^2)",-1,2]),
label([concat("d(x)=",
      string(d(x))),0,10]))$
```

Secant $d(x) = \sqrt{5} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{5}}$ in point 2 is a blue

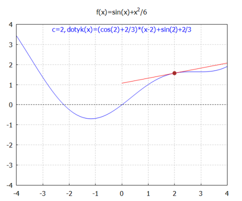


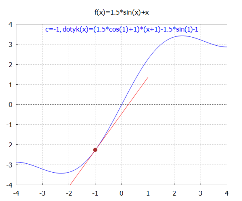
01. Pochodna funkcji rzeczywistej

Konstruujemy styczną do wykresu funkcji f w punkcie c.

```
(%i6) c:2$ f(x):=x^2/6+sin(x)$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      d(x):=f(c)+subst(c,x,f1(x))*(x-c)$
      print("Secant y=d(x)=",d(x)," in point",c)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,xrange=[-4,4],
      yrange=[-4,4],color=blue,explicit(f(x),x,-4,4),
      color=red,explicit(d(x),x,c-2,c+2),
      point_type=7,color=brown,points([[c,f(c)]]),
      color=blue,title=concat("f(x)=",string(f(x))),
      label([concat("c=",string(c),",
          d(x)=",string(d(x))),0,3.75]))$
```

Secant $y = d(x) = (\cos(2) + \frac{2}{3})(x - 2) + \sin(2) + \frac{2}{3}$ in point 2





02. Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Najlepsze lokalne przybliżenie liniowe.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D(f)$.

- Aproksymacja funkcji f w otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 za pomocą stycznej $d\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ jest najlepszą ze wszystkich przybliżeń przy użyciu funkcji liniowej (linia prosta).

Oblicz przybliżoną liczbę $\sqrt[6]{1,06}$.

- Zaznaczmy $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Niech $O(1)$ będzie takie, że $1,06 \in O(1)$.

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1)\cdot(x-1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}.$$

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01.$$

Dokładnie $\sqrt[6]{1.06} = 1,0097588$, błąd obliczeń $< 0,00025$.

02. Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Najlepsze lokalne przybliżenie liniowe.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D(f)$.

- Aproksymacja funkcji f w otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 za pomocą stycznej $d\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ jest najlepszą ze wszystkich przybliżeń przy użyciu funkcji liniowej (linia prosta).

Oblicz przybliżoną liczbę $\sqrt[6]{1,06}$.

- Zaznaczmy $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Niech $O(1)$ będzie takie, że $1,06 \in O(1)$.

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1)\cdot(x-1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}.$$

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01.$$

Dokładnie $\sqrt[6]{1.06} = 1,0097588$, błąd obliczeń $< 0,00025$.

02. Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Zmienna `fpprintprec:8` ustawia wyjście na 8 cyfr.
Aproksymacja funkcji f ma sens tylko dla x blisko punktu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

02. Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Zmienna `fpprintprec:8` ustawia wyjście na 8 cyfr.
Aproksymacja funkcji f ma sens tylko dla x blisko punktu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

02. Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Oblicz przybliżoną liczbę $\sqrt[6]{1.06}$ (inne rozwiązanie).

- Zaznaczmy $f(x) = \sqrt[6]{x+1} = (x+1)^{1/6}$, $x > -1$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0) = f(0) = 1$.
- $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.
- Niech $O(0)$ będzie takie, że $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x+1} = f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot (x-0) = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(0.06) \approx \frac{0.06+6}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Zmienimy pierwsze polecenia `c:.06`, `f(x):=(x+1)^(1/6)`, `s:0` w poprzednim przykładzie.

```
(%i9) c:.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$ s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x}{6} + 1$

$c = 0.06 \quad f(0.06) = 1.0097588$ approx 1.01

02. Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Oblicz przybliżoną liczbę $\sqrt[6]{1.06}$ (inne rozwiązanie).

- Zaznaczmy $f(x) = \sqrt[6]{x+1} = (x+1)^{1/6}$, $x > -1$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0) = f(0) = 1$.
- $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.
- Niech $O(0)$ będzie takie, że $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x+1} = f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot (x-0) = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(0.06) \approx \frac{0.06+6}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Zmienimy pierwsze polecenia `c:.06`, `f(x):=(x+1)^(1/6)`, `s:0` w poprzednim przykładzie.

```
(%i9) c:.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$ s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x}{6} + 1$

$c = 0.06$ $f(0.06) = 1.0097588$ approx 1.01

02. Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Obliczanie $f^{(n)}$, $n \in N$ może być ogólnie bardzo pracochłonne.

Funkcja $y = x^k$, $x \in R$, gdzie $k \in N$.

- $[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, $x \in R$ dla $n = 1, 2, \ldots, k$,
  $[x^k]' = kx^{k-1}$, $[x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $[x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $\ldots$, $[x^k]^{(k)} = k!$.
- $[x^k]^{(n)} = 0$, $x \in R$ dla $n = k+1, k+2, k+3, \ldots$,
  $[x^k]^{(k+1)} = [k!]' = 0$, $[x^k]^{(k+2)} = [x^k]^{(k+3)} = [0]' = 0$, $\ldots$

```
(%i9) f(x,k):=x^k;fn(x,k,n):=diff(f(x,k),x,n)$
      fn(x,k,1);fn(x,k,2);fn(x,k,k);
      fn(x,5,1);fn(x,5,2);fn(x,5,5);fn(x,5,6);
```

(%o1) $f(x,k) := x^k$

(%o3) kx^{k-1}

(%o4) $(k-1)kx^{k-2}$

(%o5) $\frac{d^k}{dx^k}x^k$

(%o6) $5x^4$

(%o7) $20x^3$

(%o8) 120

(%o9) 0

03. Aplikacje pochodnej funkcji

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12.$

- $f(x) = x^3 - 8$, $x \in R$, $g(x) = x - 2$, $x \in R$. $O(2)$ można wybrać dowolnie, np. $O(2) = R$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'(x) = 3x^2,\ g'(x) = 1 \text{ dla } x \in R - \{2\}. \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12. \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2} (x^3-8) = \lim\limits_{x\to 2} (x-2) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12.$$

```
(%i9) f(x):=(x^3-8)/(x-2)$
      fc(x):=num(f(x))$ fc(x);fm(x):=denom(f(x))$ fm(x);
      'limit(f(x),x,2); limit(f(x),x,2);
      'limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o3) $x^3 - 8$

(%o5) $x - 2$

(%o6) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

(%o7) 12

(%o8) $3 \lim\limits_{x\to 2} x^2$

(%o9) 12

03. Aplikacje pochodnej funkcji

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

```
(%i4) f(x):=log(x)/x$
      fc(x):=num(f(x))$
      fm(x):=denom(f(x))$
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,inf);
(%o4) 0
```

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = [L'H\tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$$
$$= [L'H\tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$$
$$= [L'H\tfrac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = [L'H\tfrac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$= [L'H\tfrac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \cdots$$

Nie możemy użyć reguły L'Hospitala.

03. Aplikacje pochodnej funkcji

Function $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
otoczenie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (skończone).

Wielomian Taylora stopnia n funkcji f w środku x_0 jest zdefiniowany jako

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!},\ x \in O(x_0).$$

Dla $x_0 = 0$ nazywa się to **wielomian Maclaurina**

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!},\ x \in O(0).$$

Oznaczmy $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $$T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!},\ h \in O(0).$$

Reszta $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ wyraża błąd aproksymacji f używając $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, gdzie $\theta \in (0; 1)$. (forma Lagrange'a).

03. Aplikacje pochodnej funkcji

Function $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
otoczenie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (skończone).

Wielomian Taylora stopnia n funkcji f w środku x_0 jest zdefiniowany jako

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Dla $x_0 = 0$ nazywa się to **wielomian Maclaurina**

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Oznaczmy $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Reszta $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ wyraża błąd aproksymacji f używając $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, gdzie $\theta \in (0; 1)$. (forma Lagrange'a).

03. Aplikacje pochodnej funkcji

Obliczamy wielomian Taylora $T_n(x)$ funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Ręczne różniczkowanie jest dość pracochłonne.

```
(%i2) f(x):=sqrt(x^2+1)$ print("f(x)=", f(x),
      ", f'(x)=", diff(f(x),x),
      ", f''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,2)),
      ", f'''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,1);
```

$1 + \cdots$

```
(%i4) taylor(f(x),x,0,2);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,3);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i6) taylor(f(x),x,0,4);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$

```
(%i7) taylor(f(x),x,0,18);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \frac{21x^{12}}{1024} + \frac{33x^{14}}{2048} - \frac{429x^{16}}{32768} + \frac{715x^{18}}{65536} + \cdots$

03. Aplikacje pochodnej funkcji

Obliczamy wielomian Taylora $T_n(x)$ funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Wielomian `tp1` jest dziewiątego stopnia (praktycznie ósmego stopnia), dlatego wyjściem polecenia `coeff(tp1,x,10))` jest liczba 0. preto výstup príkazu `coeff(tp1,x,10))` je číslo 0.
- Wielomian `tp2` jest dziesiątego stopnia a wyjście polecenia `coeff(tp2,x,10))` to rzeczywisty współczynnik $c_{10} = 7/256$.

```
(%i1) f(x):=sqrt(x^2+1)$
(%i2) tp1:taylor(f(x),x,0,9);
```

(tp1) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\cdots$

```
(%i3) print("c_3=",coeff(tp1,x,3),
        ", c_4=",coeff(tp1,x,4),
        ", c_10=",coeff(tp1,x,10))$
```

c_3= 0, c_4= $-\frac{1}{8}$, c_10= 0

```
(%i4) tp2:taylor(f(x),x,0,10);
```

(tp2) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\frac{7x^{10}}{256}+\cdots$

```
(%i5) print("c_3=",coeff(tp2,x,3),
        ", c_4=",coeff(tp2,x,4),
        ", c_10=",coeff(tp2,x,10))$
```

c_3= 0, c_4= $-\frac{1}{8}$, c_10= $\frac{7}{256}$

03. Aplikacje pochodnej funkcji

$f(x) = \ln x$, $x \in (0;\infty)$, $x_0 = 1$, $f(1) = 0$, $n \in N$.

- $f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $x > 0$.
- $f^{(2)}(x) = -x^{-2}$, $x > 0$.
- $f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $x > 0$.
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4}$, $x > 0$.
  ...
- $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$, $x > 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

- $f^{(1)}(1) = 1 = 0!$.
- $f^{(2)}(1) = -1 = -1!$.
- $f^{(3)}(1) = 2 \cdot 1 = 2!$.
- $f^{(4)}(1) = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -3!$.
- $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

$\Rightarrow$ • $T_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(x-1)^k}{k}$, $x \in O(1)$.

(%i1) `taylor(log(x),x,1,5);`

(%o1) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots$

(%i2) `taylor(log(x),x,1,8);`

(%o2) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \cdots$

03. Aplikacje pochodnej funkcji

Czasami wygodniej jest wyrazić $f(x) = \ln x$ w postaci wielomianu Maclaurina.

- $f(x) = \ln x,\ x \in (0; \infty),\ x_0 = 1.$
  $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (x-1)^k}{k},\ x \in O(1),\ n \in N.$
- $x = t + 1,\ f(x) = f(t+1) = \ln(t+1),\ t \in (-1; \infty).$
  $T_n(x) = T_n(t+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (t+1-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot t^k}{k},\ x \in O(1),\ t \in O(0),\ n \in N.$
- Wielomian Maclaurina funkcji $f(x) = \ln(x+1)$ stopnia $n \in N$:
  $T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},\ x \in O(0).$

(%i1) `taylor(log(x+1),x,0,8);`

(%o1) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \cdots$

(%i2) `taylor(log(x),x,1,8);`

(%o2) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \cdots$

(%i3) `taylor(log(x+1),x,1,8);`

(%o3) $\log(2) + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{24} - \frac{(x-1)^4}{64} + \frac{(x-1)^5}{160} - \frac{(x-1)^6}{384} + \frac{(x-1)^7}{896} - \frac{(x-1)^8}{2048} + \cdots$

03. Aplikacje pochodnej funkcji

Funkcje $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ możemy użyć **wielomianu Maclaurina** do przybliżenia dla wszystkich $x \in R$. Niezbędną dokładność osiągamy przy odpowiednio dużym stopniu n.

- $f(x) = e^x$, $x \in R$.
  $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$, $x \in R$, $n \in N$.
- $f(x) = \sin x$, $x \in R$.
  $T_{2k+1}(x) = 0 + \frac{x}{1!} + 0 + \frac{-x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, $x \in R$, $n \in N$.
- $f(x) = \cos x$, $x \in R$
  $T_{2k}(x) = 1 + 0 + \frac{-x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$, $x \in R$, $n \in N$.

(%i1) `taylor(exp(x),x,0,10);`

(%o1) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

(%i2) `taylor(sin(x),x,0,10);`

(%o2) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \cdots$

(%i3) `taylor(cos(x),x,0,10);`

(%o3) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

03. Aplikacje pochodnej funkcji

Znajdujemy wielomian Maclaurina stopnia $n \in N$ funkcji $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

- Jeśli oznaczymy $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$, $t = x^2$, wtedy $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} = g(x^2) = g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \geq 0$.
- Dla wielomianu Maclaurina $P_n(t)$ funkcji $g(t)$, $t \geq 0$ a wielomian Maclaurina $T_{2n}(x)$ funkcji $f(x)$, $x \in R$ obowiązuje:

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x^2)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = T_{2n}(x).$$

Wielomian Maclaurina stopnia funkcji $2n$ $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$ ma postać

- $T_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$, $x \in R$.

(%i1) `taylor(exp(x^2),x,0,10);`

(%o1) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \cdots$

(%i3) `subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,5));`
`subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,10));`

(%o2) $\frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

(%o3) $\frac{x^{20}}{3628800} + \frac{x^{18}}{362880} + \frac{x^{16}}{40320} + \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

04. Badanie zachowania funkcji

Ważną częścią badania zachowania funkcji jest wyznaczenie przedziałów, na którym ta funkcja jest monotoniczna.

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f'(x) \in R$ (skończona).

Funkcja f jest na I		Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje
• rosnąca.	$\Leftrightarrow$	• $f'(x) > 0$.
• malejąca.	$\Leftrightarrow$	• $f'(x) < 0$.
• niemalejąca.	$\Leftrightarrow$	• $f'(x) \geq 0$.
• nierosnąca.	$\Leftrightarrow$	• $f'(x) \leq 0$.
• stała.	$\Leftrightarrow$	• $f'(x) = 0$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ jest punktem wewnętrznym $D(f)$, istnieje $f'(x_0)$.

- Funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkcja f może mieć ekstremum lokalne również w punkcie, gdzie pochodna nie istnieje.
- $f'(x_0) = 0$ nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego funkcji f w punkcie $x_0 \in D(f)$.

04. Badanie zachowania funkcji

Ważną częścią badania zachowania funkcji jest wyznaczenie przedziałów, na którym ta funkcja jest monotoniczna.

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f'(x) \in R$ (skończona).

Funkcja f jest na I	• rosnąca.	$\Leftrightarrow$	Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje	• $f'(x) > 0$.
	• malejąca.	$\Leftrightarrow$		• $f'(x) < 0$.
	• niemalejąca.	$\Leftrightarrow$		• $f'(x) \geq 0$.
	• nierosnąca.	$\Leftrightarrow$		• $f'(x) \leq 0$.
	• stała.	$\Leftrightarrow$		• $f'(x) = 0$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ jest punktem wewnętrznym $D(f)$, istnieje $f'(x_0)$.

- Funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkcja f może mieć ekstremum lokalne również w punkcie, gdzie pochodna nie istnieje.
- $f'(x_0) = 0$ nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego funkcji f w punkcie $x_0 \in D(f)$.

04. Badanie zachowania funkcji

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f'(x) \in R$ (skończona).

f jest na I	• wypukła.	$\Leftrightarrow$	f' jest na I	• niemalejąca.
	• wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• nierosnąca.
	• ściśle wypukła.	$\Leftrightarrow$		• rosnąca.
	• ściśle wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• malejąca.

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f''(x) \in R$ (skończona).

f jest na I	• wypukła.	$\Leftrightarrow$	Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje	• $f''(x) > 0$.
	• wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) < 0$.
	• ściśle wypukła.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \geq 0$.
	• ściśle wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \leq 0$.

Badając wypukłość i wklęsłość funkcji f, musimy zbadać:

- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, gdzie funkcja f jest ciągła i dla której istnieje $f''(x) = 0$.
- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, gdzie funkcja f jest ciągła i gdzie $f''(x)$ nie istnieje.

04. Badanie zachowania funkcji

Możemy uogólnić poprzednie wyniki.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k-1$, $k \in N$ (nieparzysta).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f rosnąca w punkcie x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f malejąca w punkcie x_0.

  $\Big\}$ $f(x_0)$ nie jest ekstremum.
- $n = 2k$, $k \in N$ (parzysta).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ to właściwe minimum lokalne.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ to właściwe maksimum lokalne.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k+1$, $k \in N$ (nieparzysta).
  - x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.
- $n = 2k$, $k \in N$ (párne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f jest ściśle wypukła w punkcie x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f jest ściśle wklęsła w punkcie x_0.

04. Zachowanie funkcji

Zbadanie zachowania funkcji f oznacza wyznaczenie:

- Dziedzina $D(f)$, punkty i przedziały ciągłości i nieciągłości.
- Parzystość, nieparzystość, okresowość lub inne specjalne właściwości.
- Granice jednostronne w punktach nieciągłości, punktach granicznych i punktach $\pm\infty$.
- Punkty zerowe, przedziały, w których f jest dodatnie i ujemne.
- f', punkty stacjonarne, ekstrema lokalne i globalne, przedziały, w których f rośnie, maleje i jest stała.
- f'', punkty przegięcia, przedziały, w których f jest wypukła i wklęsła.
- Asymptoty (pionowa, ukośna z nachyleniem, pozioma).
- Przeciwdziedziną $H(f)$ i naszkicuj wykres funkcji.

  Wykres zwykle daje nam najlepsze wyobrażenie o zachowaniu funkcji. Podczas jego budowy wykorzystujemy wszystkie znalezione dane.

  Ale często są one niewystarczające, więc musimy je uzupełniać odpowiednio dobrane wartości użytkowe.

04. Zachowanie funkcji

Zachowanie funkcji $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{8x-16}{x^2}$.

```
(%i1) f(x):=(8*x-16)/x^2;
```
(%o1) $f(x) := \frac{8x-16}{x^2}$

- $D(f) = R - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

  Za pomocą polecenia `denom` (denominator) dowiadujemy się, kiedy mianownik wynosi zero.

```
(%i3) fm:denom(f(x));solve(fm=0,x);
```
(fm) x^2

(%o3) $[x = 0]$

- f nie jest okresowa, f nie jest parzysta, f nie jest nieparzysta.
- f jest ciągła w przedziałach $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, jest nieciągła w punkcie 0.

04. Zachowanie funkcji

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right) = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0.$

```
(%i5) limit(f(x),x,minf);limit(f(x),x,inf);
(%o4) 0
(%o5) 0
```

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty.$

```
(%i7) limit(f(x),x,0,minus);limit(f(x),x,0,plus);
(%o6) -∞
(%o7) -∞
```

- Punkt $x = 0$ jest nieusuwalnym punktem nieciągłości II. rodzaju.
- $x = 0$ jest asymptotą pionową.

04. Zachowanie funkcji

- $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = 0. \Leftrightarrow 8x - 16 = 0. \Leftrightarrow x = 2.$
  Za pomocą polecenia `num` (numerator) sprawdzamy, kiedy licznik wynosi zero.

```
(%i9)  fc:num(f(x));solve(fc=0,x);
(fc)   8x − 16
(%o9)  [x = 2]
```

- $f(2) = 0.$
- f nie jest zdefiniowane w punkcie $x = 0.$
- Funkcja f nie zmienia znaku przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$.
- Wystarczy wybrać dowolne punkty z podanych przedziałów i zweryfikować ich wartości (np. -1, 1, 3).

```
(%i13) f(2);f(-1);f(1);f(3);
(%o10) 0
(%o11) −24
(%o12) −8
(%o13) 8/9
```

04. Zachowanie funkcji

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f(-1) = -24 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 2)$, $f(1) = -8 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$.
- $3 \in (2; \infty)$, $f(3) = \frac{8}{9} > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x) > 0$ dla $x \in (2; \infty)$.

- $f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x-8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i15) f1(x):=diff(f(x),x,1)$
       ratsimp(f1(x));
```
(%o15) $-\frac{8x-32}{x^3}$

- $f'(x) = \frac{32-8x}{x^3} = 0. \Leftrightarrow 32 - 8x = 0. \Leftrightarrow x = 4.$

```
(%i16) solve(f1(x)=0,x);
```
(%o16) $[x = 4]$

04. Zachowanie funkcji

- f' jest nieciągła w punkcie 0.

(%i18) `f1m:denom(ratsimp(f1(x)));solve(f1m=0,x);`
(f1m) x^3
(%o18) $[x = 0]$

- $f'(4) = 0$.
- f' nie jest zdefiniowane w punkcie $x = 0$.
- Funkcja f' nie zmienia znaku przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$, $(4; \infty)$.
- Wystarczy wybrać dowolne punkty z podanych przedziałów i zweryfikować ich wartości (np. -1, 1, 5).

(%i22) `subst(4,x,f1(x));`
`subst(-1,x,f1(x));subst(1,x,f1(x));subst(5,x,f1(x));`
(%o19) 0
(%o20) -40
(%o21) 24
(%o22) $-\frac{8}{125}$

04. Zachowanie funkcji

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f'(-1) = -40 < 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) < 0$, f jest malejąca dla $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 4)$, $f'(1) = 24 > 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) > 0$, f jest rosnąca dla $x \in (0; 4)$.
- $5 \in (4; \infty)$, $f'(5) = -\frac{8}{125} < 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) < 0$, f jest malejąca dla $x \in (4; \infty)$.

- f ma lokalne maksimum w punkcie $x = 4$, a także globalne maksimum $f(4) = 1$.

```
(%i23) f(4);
(%o23) 1
```

- f nie ma ani lokalnego, ani globalnego minimum.
- $f''(x) = \left[\frac{32-8x}{x^3}\right]' = \frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6} = \frac{16x^3-96x^2}{x^6} = \frac{16x-96}{x^4}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i25) f2(x):=diff(f(x),x,2)$ ratsimp(f2(x));
```

(%o25) $\frac{16x-96}{x^4}$

04. Zachowanie funkcji

- $f''(x) = \frac{16x-96}{x^4} = 0. \Leftrightarrow 16x - 96 = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

```
(%i26) solve(f2(x)=0,x);
(%o26) [x = 6]
```

- f'' jest nieciągła w punkcie 0.

```
(%i28) f2m:denom(ratsimp(f2(x)));solve(f2m=0,x);
(f2m)  x^4
(%o28) [x = 0]
```

- $f''(6) = 0.$
- f'' nie jest zdefiniowana w punkcie $x = 0$.
- Funkcja f'' nie zmienia znaku przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; \infty)$.
- Wystarczy wybrać dowolne punkty z podanych przedziałów i zweryfikować ich wartości (np. -1, 1, 7).

04. Zachowanie funkcji

```
(%i32) subst(6,x,f2(x));
       subst(-1,x,f2(x));subst(1,x,f2(x));subst(7,x,f2(x));
```
(%o29) 0
(%o30) -112
(%o31) -80
(%o32) $\frac{16}{2401}$

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f''(-1) = -112 < 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) < 0$, f jest wklęsła dla $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 6)$, $f''(1) = -80 < 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) < 0$, f jest wklęsła dla $x \in (0; 6)$.
- $7 \in (6; \infty)$, $f''(7) = \frac{16}{2401} > 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) > 0$, f jest wypukła dla $x \in (6; \infty)$.

- $x = 6$ jest punktem przegięcia funkcji f.

```
(%i33) f(6);
```
(%o33) $\frac{8}{9}$

04. Zachowanie funkcji

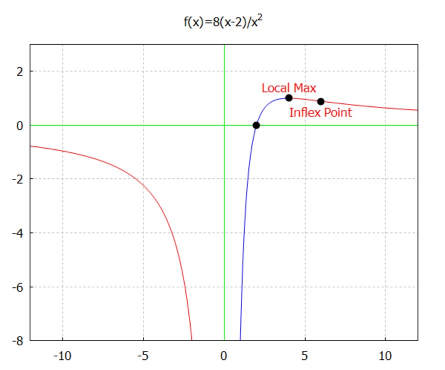
- $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = 0 - 0 = 0.$
- $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$
- $y = kx + q = 0 \cdot x + 0 = 0$, tj. $y = 0$ jest asymptotą ukośna z nachyleniem (pozioma).

```
(%i35) km:limit(f(x)/x,x,minf);
       qm:limit(f(x)-km*x,x,minf);
(km)   0
(qm)   0
(%i37) kp:limit(f(x)/x,x,inf);
       qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf);
(kp)   0
(qp)   0
```

- $H(f) = (-\infty; 1\rangle.$

04. Zachowanie funkcji

(%i38)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-12,12],yrange=[-8,3],title="f(x)=8(x-2)/x^2",
color=blue,explicit(f(x),x,0,4),
color=red,explicit(f(x),x,-12,0),explicit(f(x),x,4,12),
label(["Inflex Point",6,f(6)-.4],
["Local Max",4,f(4)+.4]),
color=green,
parametric(0,t,t,-8,3),
parametric(t,0,t,-12,12),
color=black,point_type=7,
points([[4,f(4)],
[6,f(6)],
[2,f(2)]]))$
```



04. Całka nieoznaczona

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Podstawowe pojęcia

Wszystkie funkcje pierwotne dla danej funkcji $f(x)$, $x \in I$ na interwale I różnią się od siebie o stałą i tworzą zbiór $\{F(x) + c, c \in R\}$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną.
Ten zbiór nazywa się **całka nieoznaczona funkcji** f **na przedziale** I i jest oznaczony

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

$f(x)$, $x \in I$ jest ciągła w przedziale I.

$\Rightarrow$ • Istnieje $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Polecenie `integrate` służy do całkowania.

```
(%i1) 'integrate(1/(1+x^2),x)
```

(%o1) $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Podstawowe pojęcia

```
(%i1) f(x):=1/(1-x^2); integrate(f(x),x);
```

(%o1) $\frac{1}{1-x^2}$

(%o2) $\frac{\log(x+1)}{2} - \frac{\log(x-1)}{2}$

- Różniczkowanie i całkowanie to operacje odwrotne na przedziale I.

Funkcja F jest pierwotna funkcji f na przedziale I, $c \in R$.

Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje:

- $\left[\int f(x)\,dx\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$
- $\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c.$

```
(%i1) integrate(1/(1+x^2),x);
```

(%o1) $\operatorname{atan} x$

```
(%i2) diff(%,x);
```

(%o2) $\frac{1}{x^2+1}$

Podstawowe pojęcia

- $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi, \; k \in Z\}, \; c \in R.$
- $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c,$
  $x \in R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in Z\}, \; c \in R.$
- $\int \sqrt[5]{x^3} \, dx = \int x^{\frac{3}{5}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + c, \; x \geq 0, \; c \in R.$

```
(%i1) integrate(cot(x),x);
```
(%o1) $\log(\sin x)$
```
(%i2) integrate(tan(x),x);
```
(%o2) $\log(\sec x)$
```
(%i3) trigsimp(%);
```
(%o3) $-\log(\cos x)$
```
(%i4) integrate((x^3)^(1/5),x);
```
(%o4) $\frac{5x^{5/8}}{8}$

Podstawowe pojęcia

- $$\int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c = \frac{x\cdot x}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{dla } x \geq 0, \\ \displaystyle\int (-x)\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c = \frac{x\cdot(-x)}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{x\,|x|}{2} + c,\ x \in R,\ c \in R.$

```
(%i1) integrate(abs(x),x);
```
(%o1) $\frac{x\,|x|}{2}$

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c,\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).$ (całka z tabeli).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2-1),x);
```
(%o1) $\log\left(2\sqrt{x^2-1} + 2x\right)$

02. Metody całkowania

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c,\ x \in R.$ (całka z tabeli).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2+1),x);
(%o1) asinh x
```

- Oba wyniki są poprawne, ponieważ area sinus hiperboliczny jest zdefiniowany jako $y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in R$ (patrz funkcje elementarne).

Metoda rozkładu.

Funkcje F, G są pierwotne funkcji f, g na przedziale I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$.

$\Rightarrow$ $aF + bG$ jest pierwotna funkcji $af + bg$ na przedziale I i obowiązuje:

- $\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx = aF(x) + bG(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- W praktyce piszemy bezpośrednio $\int [af(x) + bg(x)]\, dx = aF(x) + bG(x) + c.$

02. Metody całkowania

- $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right] dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c,$$ $$x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$
- $$\int \frac{(x-1)^2}{x}\, dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x}\, dx = \int \left[x - 2 + \frac{1}{x}\right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$$
- $$\int \left[2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right] dx = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3 \operatorname{arctg} x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

(%i1) `integrate(1/(sin(x)^2*cos(x)^2),x);`

(%o1) $\tan x - \frac{1}{\tan x}$

(%i2) `integrate((x-1)^2/x,x);`

(%o2) $\log x + \frac{x^2-4x}{2}$

(%i3) `integrate(2*cos(x)+x^3+3/(x^2+1),x);`

(%o3) $2\sin x + 3\,\mathrm{atan}\, x + \frac{x^4}{4}$

02. Metody całkowania

Całkowanie przez części.

Funkcje u, v mają ciągłe pochodne u', v' na przedziale I.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$

• $[uv]' = u'v + uv'$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle uv = \int [uv]' = \int u'v + \int uv'$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v.$

- Metodę całkowania przez części możemy zastosować kilka razy pod rząd, ale musimy uważać, aby nie powrócić do pierwotnej całki przez ponowne użycie.
- Metodę jest stosowana dość często. Nadaje się do integracji funkcji

$$P(x)\,\mathrm{e}^{ax}, \quad P(x)\cos ax, \quad P(x)\sin ax, \quad P(x)\ln Q(x), \quad P(x)\operatorname{arctg} Q(x),$$

gdzie $P(x)$, $Q(x)$ to wielomiany rzeczywiste, $a \in R$, $a \neq 0$.

- $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

02. Metody całkowania

- $$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$
- $$\int x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c,$$
$$x \in R,\ c \in R.$$
- $$\int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

(%i1) `u:x; v:integrate(cos(x),x);`

(u) x

(v) $\sin x$

(%i3) `u*v-integrate(v,x);`

(%o3) $x \sin x + \cos x$

(%i4) `integrate(x*cos(x),x);`

(%o4) $x \sin x + \cos x$

02. Metody całkowania

- $I_n = \int x^n e^x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - nI_{n-1}, \; n \in N.$

$\Rightarrow$
- $I_0 = \int x^0 e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c,$
- $I_1 = x e^x - II_0 = x e^x - e^x + c,$
- $I_2 = x^2 e^x - 2II_1 = x^2 e^x - 2\left[x e^x - e^x \right] + c = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c,$
- $I_3 = x^3 e^x - 3II_2 = x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x \right] + c = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 e^x + c.$

```
(%i1) I(n,x):=integrate(x^n*exp(x),x)$
      I(0,x); I(1,x); I(2,x); I(3,x); I(4,x); I(5,x);
```

(%o2) e^x

(%o3) $(x - 1) e^x$

(%o4) $(x^2 - 2x + 2) e^x$

(%o5) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x$

(%o6) $(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) e^x$

(%o7) $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 - 120x + 120) e^x$

02. Metody całkowania

Całkowanie przez podstawienie.

Funkcja F jest pierwotna funkcji f na przedziale I,

$x = \varphi(t)$ ma pochodną na przedziale J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi(t)\big)$ jest pierwotna funkcji $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J i obowiązuje:

- $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c,\ t \in J,\ c \in R.$

I, J to przedziały, $x = \varphi(t) : J \to I$ ma pochodną $\varphi'(t) \neq 0$ na J,

Funkcja $F(t)$ jest pierwotna funkcji $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ jest pierwotna funkcji $f(x)$ na przedziale I i obowiązuje:

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- W pierwszym przypadku nie musimy stosować podstawienia odwrotnego, ale w drugim przypadku musimy użyć podstawienia odwrotnego $t = \varphi^{-1}(x)$.

02. Metody całkowania

- $\displaystyle\int \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in R \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & x \in \langle -1; 1\rangle \end{array}\right] = \int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c,\ t \in R,\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } t = f(x) \\ \mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c,\ x \in D(f),\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = f(t) \\ \mathrm{d}x = f'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c = \ln|f(t)| + c,\ t \in D(f),\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 + 1 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 1\right| + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^6+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 & x \in R \\ \mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x & t \in R \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + c,\ x \in R,\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^6-1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 & x \in R - \{\pm 1\} \\ \mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x & t \in R - \{\pm 1\} \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|,$

  $x \in R - \{\pm 1\},\ c \in R.$

02. Metody całkowania

- $\int e^{5x}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } 5x = t & x \in R \\ 5\,dx = dt & t \in R \end{array} \right]$

$$= \int e^{t}\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int e^{t}\,dt = \frac{1}{5}\,e^{t} + c = \frac{1}{5}\,e^{5x} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Wykonanie podstawienia t w wxMaxima oznacza:

- Wybieramy podstawienie i używamy `diff`, aby utworzyć różnicę dt (oznaczenie `del(t)`), to wyrażamy dx za pomocą dt za pomocą polecenia `solve`.
- Wynik równania wyrażamy za pomocą `%[1]` i zamieniamy `del(x)` używając `del(t)` w całce.
- Używamy `subst` do przekształcenia całej całki za pomocą zmiennej t a następnie obliczamy całkę pamiętając, że oczekiwany jest tylko współczynnik `del(t)`.
- Podstawiamy wartość x za t w wynikowej całce.

02. Metody całkowania

```
(%i1) INTEGRAND:(%e^(5*x))*diff(x);
```
(%o1) $e^{5x}\,\mathrm{del}(x)$

```
(%i2) solve(diff(t)=diff(5*x),del(x));
```
(%o2) $[\mathrm{del}(x) = \frac{\mathrm{del}(t)}{5}]$

```
(%i3) %[1];
```
(%o3) $\mathrm{del}(x) = \frac{\mathrm{del}(t)}{5}$

```
(%i5) subst(rhs(%),del(x),INTEGRAND)$ subst(t,5*x,%);
```
(%o5) $\frac{e^{t}\,\mathrm{del}(t)}{5}$

```
(%i6) integrate(coeff(%,del(t)),t);
```
(%o6) $\frac{e^{t}}{5}$

```
(%i7) subst(5*x,u,%);
```
(%o7) $\frac{e^{5x}}{5}$

```
(%i8) integrate(%e^(5*x),x);
```
(%o8) $\frac{e^{5x}}{5}$

02. Metody całkowania

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t=\ln x & x\in(0;\infty) \\ & dt=\frac{dx}{x} & t\in R \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=\frac{1}{x} & v=\ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

(Równanie z całką jako nieznanym parametrem.)

$\displaystyle\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x + 2c. \Rightarrow$ • $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x>0,\ c\in R.$

$f(x)$ ma na przedziale I funkcję pierwotną $F(x)$, liczbę rzeczywistą $a,b\in R$, $a\neq 0$.

- $\displaystyle\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{rr} \text{Subst.} & x=at+b \\ & dx=a\,dt \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a}+c = \frac{F(at+b)}{a}+c.$

- $\displaystyle\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{rr} \text{Subst.} & x=t+b \\ & dx=dt \end{array}\right] = \int f(x)\,dx = F(x)+c = F(t+b)+c$ dla $a=1$.

- $\displaystyle\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{rr} \text{Subst.} & x=-t \\ & dx=-dt \end{array}\right] = -\int f(x)\,dx = -F(x)+c = -F(-t)+c$ dla $a=-1$.

05. Całka oznaczona

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

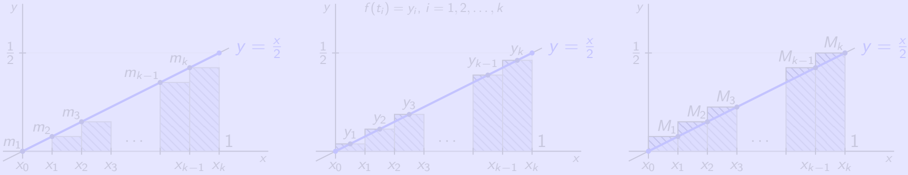
01. Podstawowe pojęcia

- Badając funkcję całkowalną Riemanna f na $\langle a;b\rangle$, nie potrzebujemy każdego podziału $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Po prostu ogranicz się do **normalnych ciągów podzialow** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. dla których obowiązuje $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Następnie dla każdego wyboru punktów T obowiązuje

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad$ $S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad$ $S_G(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (następna strona).

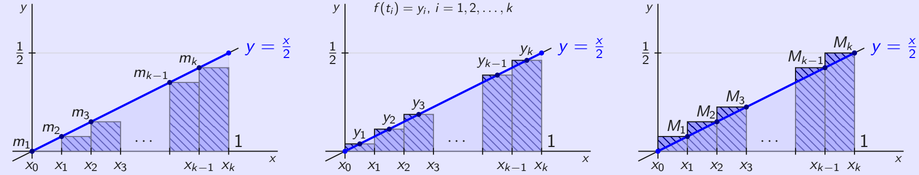
01. Podstawowe pojęcia

- Badając funkcję całkowalną Riemanna f na $\langle a; b\rangle$, nie potrzebujemy każdego podziału $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Po prostu ogranicz się do **normalnych ciągów podzialow** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. dla których obowiązuje $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Następnie dla każdego wyboru punktów T obowiązuje

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_G(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (następna strona).

01. Podstawowe pojęcia

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}$. Funkcja $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0;1\rangle$ jest rosnąca ciągła, $f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

- Normalny ciąg podzialow $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, podczas gdy $D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}$ dla $k \in N$.
- Dla $i = 1, 2, \ldots, k$ obowiązuje $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$.

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2} = \frac{\frac{(0+k-1)k}{2}}{2k^2} = \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4k}.$$

$$S_G(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k^2} = \frac{\frac{(1+k)k}{2}}{2k^2} = \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_G(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4}.$$

- wybierzmy $T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ jako środki przedziałów $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$,
  tj. $t_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{k} + \frac{i}{2}\right) = \frac{2i-1}{2k}$, następnie $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$ i obowiązuje

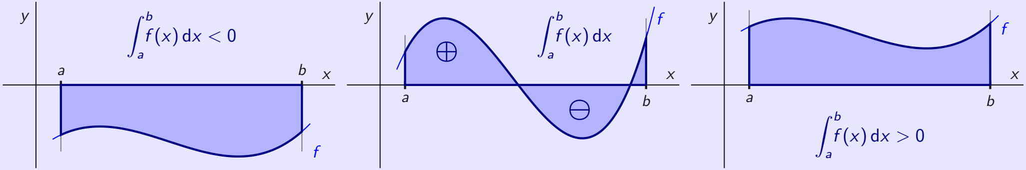
$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2} = \frac{\frac{(1+2k-1)k}{2}}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

02. Podstawowe właściwości

- Geometrycznie reprezentuje całkę oznaczoną Riemanna na przedziale $\langle a; b\rangle$ pole trapezu krzywoliniowego określone funkcją f na przedzial $\langle a; b\rangle$.

  Poniżej osi x (tj. dla ujemnej wartości f) ten obszar jest ujemny.



Funkcje $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, liczba $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ i obowiązuje:

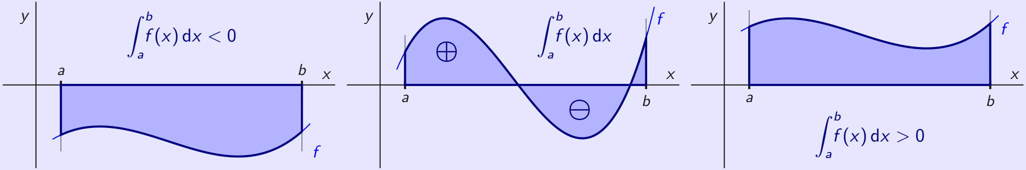
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Jeśli $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, lub $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, następnie także $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

02. Podstawowe właściwości

- Geometrycznie reprezentuje całkę oznaczoną Riemanna na przedziale $\langle a; b\rangle$ pole trapezu krzywoliniowego określone funkcją f na przedzial $\langle a; b\rangle$.

  Poniżej osi x (tj. dla ujemnej wartości f) ten obszar jest ujemny.



Funkcje $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, liczba $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ i obowiązuje:

- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Jeśli $\inf\{g(x), x\in\langle a; b\rangle\} > 0$, lub $\sup\{g(x), x\in\langle a; b\rangle\} < 0$, następnie także $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

02. Podstawowe właściwości

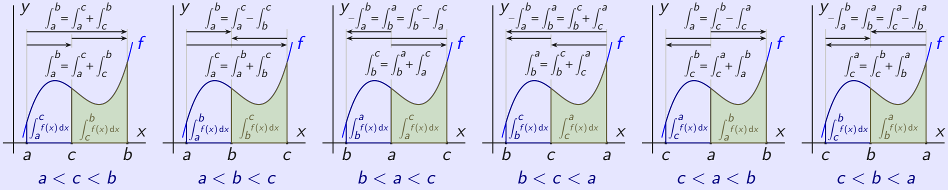
Funkcje $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

- $f(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- $g(x) \geq f(x)$ dla wszystkich $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$.

ywność całki.

Funkcja $f \in R_I$, $I \subset R$ jest przedziałem ograniczonym, punkty $a, b, c \in I$ są dowolne.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.



Możemy zilustrować addytywność całki Riemanna na wektorach.

03. Metody całkowania

Obliczanie całki Riemanna (wzór Newtona-Leibniza).

Funkcja $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcja F jest pierwotna funkcji f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

```
(%i1) integrate(f(x),x,-1,1);
```

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

03. Metody całkowania

Obliczanie całki Riemanna (wzór Newtona-Leibniza).

Funkcja $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcja F jest pierwotna funkcji f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

03. Metody całkowania

```
(%i2) f(x):=x^2$ F:integrate(f(x),x);
```

(F) $\frac{x^3}{3}$

```
(%i3) integrate(f(x),x,-1,1);
```

(%o3) $\frac{2}{3}$

```
(%i4) subst(1,x,F)-subst(-1,x,F);
```

(%o4) $\frac{2}{3}$

```
(%i5) float(subst(1,x,F)-subst(-1,x,F));
```

(%o5) 0.6666666666666666

```
(%i6) float(integrate(f(x),x,-1,1));
```

(%o6) 0.6666666666666666

```
(%i7) bfloat(integrate(f(x),x,-1,1));
```

(%o7) $6.666666666666667b-1$

03. Metody całkowania

(%i2) `f(x):=cos(x)*sin(x)$ F:integrate(f(x),x);`

(F) $-\frac{\cos x^2}{2}$

(%i3) `integrate(f(x),x,1,2);`

(%o3) $\frac{\cos 1^2}{2}-\frac{\cos 2^2}{2}$

(%i4) `subst(2,x,F)-subst(1,x,F);`

(%o4) $\frac{\cos 1^2}{2}-\frac{\cos 2^2}{2}$

(%i5) `float(integrate(f(x),x,1,2));`

(%o5) 0.0593741960791174l

(%i6) `float(subst(2,x,F)-subst(1,x,F));`

(%o6) 0.0593741960791174l

(%i7) `bfloat(subst(2,x,F)-subst(1,x,F));`

(%o7) $5.937419607911738b-2$

03. Metody całkowania

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0 \quad (?!?).$
- Funkcja $\frac{1}{x}$ nie jest zdefiniowana w punkcie 0.
- Funkcja $\frac{1}{x}$ nie jest ograniczona na przedziałach $\langle -1; 0)$ i $(0; 1\rangle$.
- W tym sensie nie możemy obliczyć całki.

```
(%i2) f(x):=1/x$ F:integrate(f(x),x);
```
(F) $-\log x$

```
(%i3) integrate(f(x),x,-1,1);
      Principal Value
```
(%o3) 0

```
(%i4) subst(1,x,F)-subst(-1,x,F);
```
(%o4) $-\log(-1)$

03. Metody całkowania

- Całki oznaczone są generalnie obliczane przy użyciu całek nieoznaczonych.
- Możemy modyfikować metodę przez części i metody podstawienia i bezpośrednio z nich obliczyć całkę oznaczoną.

  Po podstawieniu nie musimy wracać do oryginalnych zmiennych.

Metoda przez części.

$u, u', v, v' \in R_{\langle a;b\rangle}.\ \Rightarrow\ \bullet\ \displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x\cos x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = \Big[-4\pi^2\cdot 1 + 0^2\cdot 1\Big] + \Big[2x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x\,dx$$

$$= -4\pi^2 + \Big[4\pi\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0\Big] - \Big[-2\cos x\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 - \Big[-2\cdot 1 + 2\cdot 1\Big] = -4\pi^2.$$

03. Metody całkowania

Metoda podstawienia. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f jest ciągłe na I, φ' jest ciągła na J, $\varphi(J) \subset I$,
I to przedział z granicami a, b, J to przedział z granicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ i obowiązuje • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Można używać w obu kierunkach.)

- $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|c|r|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ dla wszystkich } t\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|c|c|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;0\rangle & x\in\langle 1;2\rangle & t=2 \mapsto x=5 \\ dx=2\,dt & t\in\langle 0;2\rangle & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big] = \frac{\cos 2-\cos 5}{2}.$$

03. Metody całkowania

Metoda podstawienia. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f jest ciągłe na I, φ' jest ciągła na J, $\varphi(J) \subset I$,
I to przedział z granicami a, b, J to przedział z granicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ i obowiązuje • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Można używać w obu kierunkach.)

- $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ dla wszystkich } t \in \langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2} + 0 - \Big(-\frac{\pi}{2} + 0\Big)\Big] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1;0\rangle & x \in \langle 1;2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0;2\rangle & x \in \langle 1;5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

03. Metody całkowania

Metoda podstawienia. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f jest ciągłe na I, φ' jest ciągła na J, $\varphi(J) \subset I$,
I to przedział z granicami a, b, J to przedział z granicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ i obowiązuje • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Można używać w obu kierunkach.)

- $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|c|r|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ dla wszystkich } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big[1+\cos 2t\big]\,dt = \frac{1}{2}\Big[t+\frac{\sin 2t}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}+0-\big(-\frac{\pi}{2}+0\big)\Big] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|c|c|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;0\rangle & x\in\langle 1;2\rangle & t=2 \mapsto x=5 \\ dx=2\,dt & t\in\langle 0;2\rangle & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big] = \frac{\cos 2-\cos 5}{2}.$$

04. Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

$a \in R,\ m, n \in N,\ m \neq n.$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4n}\right] = \left[\pi - 0 - 0 + 0\right] = \pi.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left[\frac{2\pi}{2} + \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4n}\right] = \left[\pi + 0 - 0 - 0\right] = \pi.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{\sin(m-n)2\pi}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)2\pi}{2(m+n)} - \frac{\sin 0}{2(m-n)} + \frac{\sin 0}{2(m+n)}\right] = 0.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

04. Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

(%i1) `f(x,n):=sin(n*x)^2;`

(%o1) $f(x,n) : \sin(nx)^2$

(%i2) `integrate(f(x,n),x,0,2*%pi);`

(%o2) $-\frac{\sin(4\pi n)-4\pi n}{4n}$

(%i3) `integrate(f(x,n),x,a+0,a+2*%pi);`

(%o3) $\frac{\sin(2an)-2an}{4n}-\frac{\sin((2a+4\pi)n)+(-2a-4\pi)n}{4n}$

(%i4) `ratsimp(%o3);`

(%o4) $-\frac{\sin((2a+4\pi)n)-\sin(2an)-4\pi n}{4n}$

(%i5) `integrate(f(x,4),x,0,2*%pi);`

(%o5) π

(%i6) `integrate(f(x,4),x,a+0,a+2*%pi);`

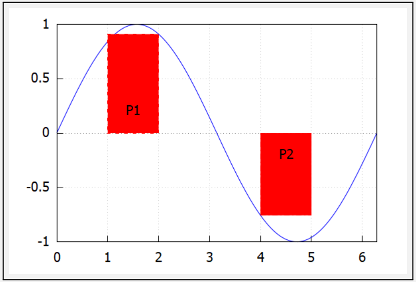
(%o6) $\frac{\sin(8a)-8a}{16}-\frac{\sin(8a)-8a-16\pi}{16}$

(%i7) `ratsimp(%);`

(%o8) π

04. Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

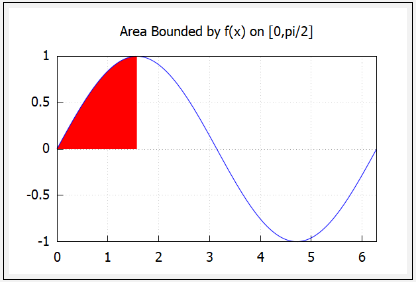
(%i1)
```
f(x):=sin(x)$
wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
color=blue, explicit(f(x),x,0,2*%pi),border=false,
rectangle([1,0],[2,f(2)]),color=black,
label(["P1",1.5,0.2]),
rectangle([4,f(4)],[5,0]),color=black,
label(["P2",4.5,-0.2]));
```



04. Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

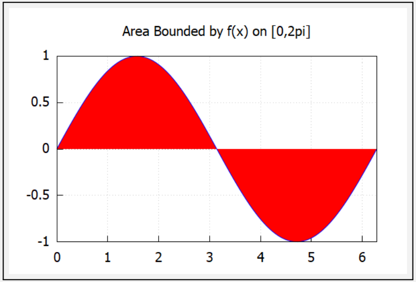
- Przypomnijmy, że $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ określa pole ograniczone przez $f(x)$ i oś x.

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$
wxdraw2d(grid=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
xaxis=true,yaxis=true,
title="Area Bounded by f(x) on [0,pi/2]",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(0,x,0,%pi/2),filled_func=false,
color=blue,explicit(f(x),x,0,2*%pi));
```



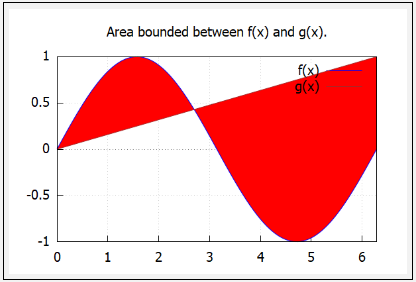
04. Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

```
(%i1) f(x):=sin(x)$
      wxdraw2d(grid=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
      xaxis=true,yaxis=true,
      title="Area Bounded by f(x) on [0,2pi]",
      fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
      explicit(0,x,0,2*%pi),filled_func=false,
      color=blue,explicit(f(x),x,0,2*%pi));
```



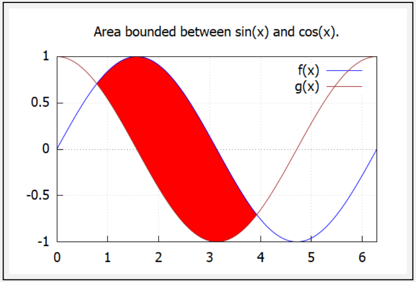
04. Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$ g(x):=x/(2*%pi)$
wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
title="Area bounded between f(x) and g(x).",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(g(x),x,0,2*%pi),
filled_func=false,color=blue,key="f(x)",
explicit(f(x),x,0,2*%pi),color=brown,key="g(x)",
explicit(g(x),x,0,2*%pi));
```



04. Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

```
(%i1) f(x):=sin(x)$ g(x):=cos(x)$
      wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
      title="Area bounded between sin(x) and cos(x).",
      fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
      explicit(g(x),x,%pi/4,5*%pi/4),
      filled_func=false,color=blue,key="f(x)",
      explicit(f(x),x,0,2*%pi),color=brown,key="g(x)",
      explicit(g(x),x,0,2*%pi));
```



Dziękujemy za uwagę.

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

beerb@frcatel.fri.uniza.sk