Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Rudolf Blaško
Uniwersytet Żyliński w Żylinie

Project: Innovative Open Source Courses for Computer Science

31. 5. 2021

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Spis treści

Innovative Open Source Courses for Computer Science

This teaching material was written as one of the outputs of the project
“Innovative Open Source Courses for Computer Science”,
funded by the Erasmus+ grant no. 2019-1-PL01-KA203-065564.
The project is coordinated by West Pomeranian University of Technology in Szczecin (Poland)
and is implemented in partnership with Mendel University in Brno (Czech Republic)
and University of Žilina (Slovak Republic).
The project implementation timeline is September 2019 to December 2022.

Innovative Open Source Courses for Computer Science

Project was implemented under the Erasmus+.
Project name: "Innovative Open Source courses for Computer Science curriculum"
Project no.: 2019-1-PL01-KA203-065564
Key Action: KA2 – Cooperation for innovation and the exchange of good practices
Action Type: KA203 – Strategic Partnerships for higher education

Consortium: Zachodniopomorski uniwersytet technologiczny w Szczecinie
Mendelova univerzita v Brně
Žilinská univerzita v Žiline

Erasmus+ Disclaimer: This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

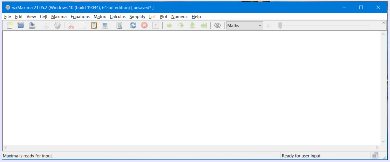
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Wprowadzenie do wxMaxima

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Podstawowe pojęcia

- wxMaxima to interfejs dialogowy do systemu algebry komputerowej Maxima.
- wxMaxima jest rozpowszechniany na licencji GPL.
- Program można skompilować w różnych systemach operacyjnych (Windows, GNU/Linux, MacOS X, ...).
- xMaxima to graficzny interfejs dla Maximy napisany w Tcl/Tk.
- Maxima jest jednym z programów Open Source z otwartym kodem źródłowym.
- Wstępnie skompilowany program dla systemów GNU/Linux i Windows jest dostępny bezpłatnie na stronie SourceForge `https://sourceforge.net/projects/maxima/files/`.
- Po uruchomieniu środowiska wxMaxima na ekranie pojawi się okno z menu u góry.
- Pod menu znajduje się miejsce, w którym możemy wpisać polecenia i gdzie wyświetlane są wyjścia.



Podstawowe pojęcia

- Polecenia wprowadzamy w osobnych liniach (liniach wejściowych).

  Ich realizacja jest zapewniona przez jednoczesne naciśnięcie klawiszy `Shift` a `Enter` lub klikając w menu ikonę (Send the current cell to maxima).

- Wiersze wejściowe są wymienione jako (%i1).

- Linie wyjściowe są wymienione jako (%o1).

- Liczby dla linii wejściowej i odpowiedniej linii wyjściowej są takie same i na ich podstawie możemy odnieść się do treści tych wierszy.

```
(%i1) First input line.
(%o1) First output line.
(%i2) Second input line.
(%o2) Second output line.
```

Podstawowe pojęcia

- Polecenia są wykonywane na nowych oddzielnych liniach (liniach wyjściowych).
- Polecenia w liniach wejściowych mogą być zakończone symbolem ; lub przez symbol $, który wstrzymuje wyświetlanie odpowiedniego wyjścia.

```
(%i1) solve(0=x+2,x);
(%o1) [x = -2]
(%i2) %i1;
(%o2) solve(0 = x + 2, x)
(%i3) %o1;
(%o3) [x = -2]
```

Podstawowe pojęcia

Możemy zapisać wynik w różnych formach, a następnie użyć go w innych programach.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Możemy wypisać (%o3) z poprzedniego okna:

- Skopiuj za pomocą Ctrl C i Ctrl V lub skopiuj jako tekst (można użyć np. do edytora równań MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Skopiuj jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Skopiuj jako MathML, Image, RTF, SVG...

Środowisko wxMaxima posiada rozbudowaną pomoc dla użytkownika, którą można znaleźć w menu `Help`. Pomoc można również otworzyć, naciskając klawisz `F1`.

Instrukcje można również znaleźć na stronie internetowej `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Podstawowe pojęcia

Możemy zapisać wynik w różnych formach, a następnie użyć go w innych programach.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Możemy wypisać (%o3) z poprzedniego okna:

- Skopiuj za pomocą `Ctrl C` i `Ctrl V` lub skopiuj jako tekst (można użyć np. do edytora równań MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Skopiuj jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Skopiuj jako MathML, Image, RTF, SVG...

Środowisko wxMaxima posiada rozbudowaną pomoc dla użytkownika, którą można znaleźć w menu `Help`. Pomoc można również otworzyć, naciskając klawisz `F1`.

Instrukcje można również znaleźć na stronie internetowej `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Podstawowe pojęcia

Możemy zapisać wynik w różnych formach, a następnie użyć go w innych programach.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Możemy wypisać (%o3) z poprzedniego okna:

- Skopiuj za pomocą `Ctrl C` i `Ctrl V` lub skopiuj jako tekst (można użyć np. do edytora równań MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Skopiuj jako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Skopiuj jako MathML, Image, RTF, SVG...

Środowisko wxMaxima posiada rozbudowaną pomoc dla użytkownika, którą można znaleźć w menu `Help`. Pomoc można również otworzyć, naciskając klawisz `F1`.

Instrukcje można również znaleźć na stronie internetowej `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Podstawowe polecenia

- Za pomocą `apropos` znajdujemy dokładną nazwę polecenia, używając części jego nazwy.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

- Polecenie `describe` drukuje opis wprowadzonego polecenia.

```
(%i1) describe(plot2d)$
      -- Function:  plot2d
      plot2d (<expr><,<range_x><,<options><)
      plot2d (<expr_<>=<expr_<>,<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([parametric,<expr_x><,<expr><_y,<range><],<options><)
      plot2d ([discrete,<points><],<options><)
      plot2d ([contour,<expr><],<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([<type_<>,...,<type_n><],<options><)
      There are 5 types of plots that can be plotted by 'plot2d':
            1.  Explicit functions.  'plot2d' ...
      ...
```

Podstawowe polecenia

- Wyrażenia są wprowadzane przy użyciu wspólnych znaków operacji, relacji i funkcji.
- Argumenty funkcji i poleceń podano w nawiasach.
- Należy podać symbol mnożenia `*`!
- Potęgowanie jest określone przez znak `^` lub parę `**`.
- Symbol `:` służy do przypisania wartości po prawej stronie do wyrażenia po lewej stronie.
- Poniższe polecenia rozwiązują równanie $2x + 3x^2 = 0$ z nieznaną zmienną x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Za pomocą polecenia `kill` możemy usunąć z pamięci zmienne wraz ze wszystkimi ich przypisaniami i właściwościami.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Podstawowe polecenia

- Wyrażenia są wprowadzane przy użyciu wspólnych znaków operacji, relacji i funkcji.
- Argumenty funkcji i poleceń podano w nawiasach.
- Należy podać symbol mnożenia `*`!
- Potęgowanie jest określone przez znak `^` lub parę `**`.
- Symbol `:` służy do przypisania wartości po prawej stronie do wyrażenia po lewej stronie.
- Poniższe polecenia rozwiązują równanie $2x + 3x^2 = 0$ z nieznaną zmienną x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Za pomocą polecenia `kill` możemy usunąć z pamięci zmienne wraz ze wszystkimi ich przypisaniami i właściwościami.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Podstawowe polecenia

- Wyrażenia są wprowadzane przy użyciu wspólnych znaków operacji, relacji i funkcji.
- Argumenty funkcji i poleceń podano w nawiasach.
- Należy podać symbol mnożenia `*`!
- Potęgowanie jest określone przez znak `^` lub parę `**`.
- Symbol `:` służy do przypisania wartości po prawej stronie do wyrażenia po lewej stronie.
- Poniższe polecenia rozwiązują równanie $2x + 3x^2 = 0$ z nieznaną zmienną x.

```
(%i1)  a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Za pomocą polecenia `kill` możemy usunąć z pamięci zmienne wraz ze wszystkimi ich przypisaniami i właściwościami.

```
(%i1)  kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2)  kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Podstawowe polecenia

- W menu `View` i podmenu `Display equations` możemy zmienić wyświetl linie wyjściowe do kształtów `in 2D` (implicitný tvar), `as 1D ASCII` lub `as ASCII Art`.
- Możesz także zmienić ustawienia wyjścia za pomocą polecenia `set_display`.

(%i1) `x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$`

(%o1) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ `/* in 2D */`

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
(%o1) x/sqrt(x^2+1)        /* as 1D ASCII */
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
            x
(%o2) ----------          /* as ASCII Art */
             2
      sqrt(x  + 1)
```

Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

- Maxima może pracować z liczbami rzeczywistymi zapisanymi w formie numerycznej lub symbolicznej.
- Sposób zapisywania liczb rzeczywistych można ustawić w menu `Numeric` za pomocą przełącznika `Numeric Output` między reprezentacją numeryczną a symboliczną.
- Ustawienie zmiennej `numer` określa metodę wyświetlania.
- Domyślnie wyświetlanych jest 16 cyfr (wliczając kropkę dziesiętną).
- Precyzja wyświetlania jest definiowana przez zmienną `fpproc` i wpływa na wyświetlanie za pomocą `bfloat`. Dane wyjściowe `float` zawsze pokazują to samo.
- Domyślnie liczby zespolone są wprowadzane w postaci algebraicznej (`rectform`). Za pomocą polecenia `polarform` możemy przekształcić je w postać trygonometryczną (wykładniczą).

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

- Maxima może pracować z liczbami rzeczywistymi zapisanymi w formie numerycznej lub symbolicznej.
- Sposób zapisywania liczb rzeczywistych można ustawić w menu `Numeric` za pomocą przełącznika `Numeric Output` między reprezentacją numeryczną a symboliczną.
- Ustawienie zmiennej `numer` określa metodę wyświetlania.
- Domyślnie wyświetlanych jest 16 cyfr (wliczając kropkę dziesiętną).
- Precyzja wyświetlania jest definiowana przez zmienną `fpproc` i wpływa na wyświetlanie za pomocą `bfloat`. Dane wyjściowe `float` zawsze pokazują to samo.
- Domyślnie liczby zespolone są wprowadzane w postaci algebraicznej (`rectform`). Za pomocą polecenia `polarform` możemy przekształcić je w postać trygonometryczną (wykładniczą).

```
(%i1) z:1+%i;
```
(z) $i+1$
```
(%i2) polarform(z)+rectform(z);
```
(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Praca z liczbami i podstawowymi stałymi

- Stałe numeryczne e, π, i (jednostka urojona) mają przedrostek `%`, tj. `%e`, `%pi`, `%i` . Obowiązuje to nawet wtedy, gdy są one częścią lub wynikiem obliczeń.
- Maxima ma predefiniowane stałe `inf`, `minf` dla rzeczywistej nieskończoności ∞, $-\infty$.
- Maxima ma predefiniowaną stałą `infinity` dla nieskończoności zespolonej.
- Stałe logiczne `true` i `false` reprezentują prawdę i fałsz.

(%i1) `%pi+%i+%e;`

(%o1) $\pi + \%i + \%e$

(%i2) `[minf,inf];`

(%o2) $[-\infty, \infty]$

(%i3) `infinity;`

(%o3) *infinity*

Przypisania i funkcje

- Maxima zawiera znacznie więcej funkcji niż standardowe języki programowania. To nie tylko same funkcje, ale także różne funkcje je wspierające.
- Używamy operatora `:` do przypisywania wartości lub wyrażeń do zmiennych.
- Funkcje definiujemy za pomocą przypisania `:=`.

```
(%i1) f(x):=x^2+2*x+3;
```

(%o1) $f(x) := x^2 + 2x + 3$

```
(%i6) f(x);f(y);f(x+1);
          f(-2);f(1);
```

(%o2) $x^2 + 2x + 3$

(%o3) $y^2 + 2y + 3$

(%o4) $(x+1)^2 + 2(x+1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

Praca z wyrażeniami

Wiele razy musimy tylko zmienić warunki lokalnie dla konkretnego obliczenia bez globalne zmiany ustawień. W tym celu Maxima ma bardzo efektywne polecenie `ev`.

- Polecenie `ev` umożliwia zdefiniowanie określonego środowiska w ramach jednego polecenia.
- Po wprowadzeniu polecenia `ev(a,b1,b2,...,bn)` obliczane jest wyrażenie `a`, gdy spełnione są warunki `b1`, `b2`, . . . , `bn`.
- Warunkami tymi mogą być równania, przypisania, funkcje, przełączniki (ustawienia logiczne).

Przykład pokazuje przykład rozwiązania równania kwadratowego za pomocą polecenia `solve`.

- Zmienne `a`, `b`, `c` po wykonaniu polecenia `ev` nie mają przypisanych wartości.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x=\frac{3}{2}, x=-1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $[x=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}]$

Praca z wyrażeniami

Wyrażenia możemy zastępować za pomocą poleceń `subst(a,b,c)` i `ratsubst(a,b,c)`.

- Wyrażenie `a` zostanie zastąpione wyrażeniem `b`, a następnie podstawione w wyrażeniu `c`.
- Podczas używania polecenia `subst` `b` musi być najprostszą częścią (atom) lub przez pełne podwyrażenie wyrażenia `c`.
- W przykładzie podwyrażenie `x+y` nie jest kompletne (brak `z`).
- Polecenie `ratsubst` również modyfikuje wynikowe wyrażenie.

```
(%i2) subst(x+y,a,a^2+b^2); ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);
```

(%o1) $(y+x)^2+b^2$

(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$

```
(%i4) subst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(a,x+y,x+y+z);
```

(%o3) $z+y+x$

(%o4) $z+a$

Granice i pochodne

W menu `Calculus` znajdujemy funkcje do rozwiązywania podstawowych problemów analizy matematycznej (granice, pochodne, całki, sumy szeregów, . . .).

Granice obliczamy za pomocą polecenia `limit`.

- Ostatni parametr określa kierunek granic jednostronnych, ma wartości `plus` lub `minus` i jest opcjonalne.

  Jeśli nie określono, Maxima oblicza granicę jako granicę zespoloną.
- Za pomocą polecenia `limit(f(x),x,a)` obliczamy granicę $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- Za pomocą polecenia `limit(f(x),x,a,plus)` obliczamy granicę $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

```
(%i4) limit(1/x,x,0);      limit(1/x,x,0,plus);
           limit(1/x,x,0,minus); limit(1/x,t,0);
```

(%o1) *infinity*

(%o2) ∞

(%o3) $-\infty$

(%o4) $\frac{1}{x}$

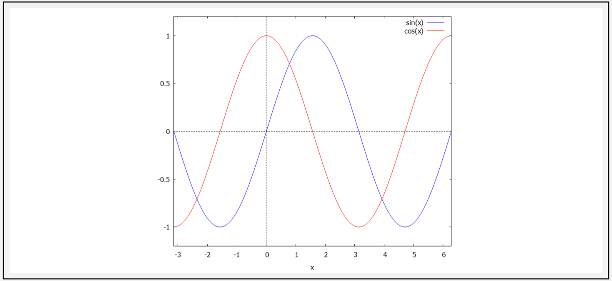
Wykresy funkcji

Wykres funkcji możemy narysować na kilka sposobów.

- Najprostszym sposobem jest wybranie z menu opcji `Plot` podmenu `Plot 2d ...`.
- Jeśli wybierzemy `Format=gnuplot`, funkcja zostanie wykreślona poleceniem `plot2d` w nowym oknie za pomocą programu Open Source `Gnuplot`.

  `Gnuplot` jest automatycznie instalowany wraz z Maximą.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, gnuplot])$
```

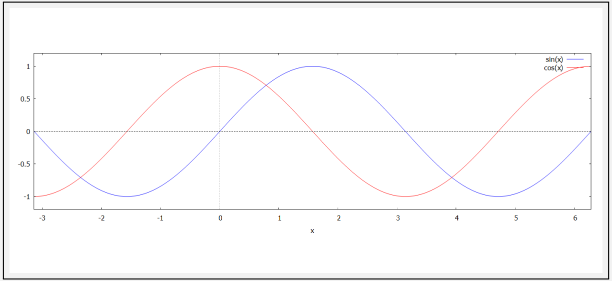


Wykresy funkcji

Wykresy funkcji nie są wyświetlane w rzeczywistych proporcjach osi x i y, ale są zoptymalizowane dla ekranu.

- Do poprawnego wyświetlenia możemy wykorzystać m.in. parametr `same_xy`.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, gnuplot],[same_xy])$
```

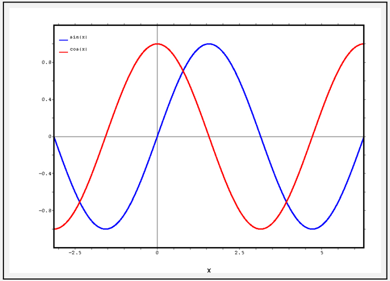


Wykresy funkcji

Jeśli wybierzemy `Format=wxmaxima`:

- Maxima rysuje wykres za pomocą polecenia `plot2d` w nowym oknie.
- Obraz możemy zapisać tylko w postscriptum.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
        [plot_format, xmaxima])$
```



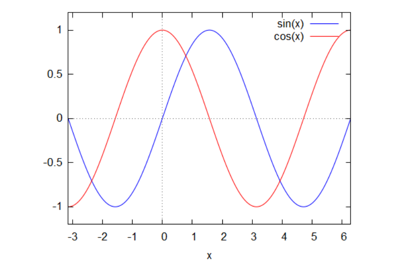
Wykresy funkcji

Jeśli wybierzemy `Format=inline`:

- Maxima rysuje wykres za pomocą polecenia `wxplot2d` w swoim środowisku.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
          [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Polecenia `plot2d` i `wxplot2d` mają tę samą składnię i znacznie więcej parametrów.

- Parametry można znaleźć na przykład za pomocą polecenia `describe(plot2d)`.

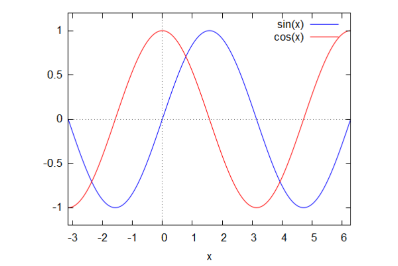
Wykresy funkcji

Jeśli wybierzemy `Format=inline`:

- Maxima rysuje wykres za pomocą polecenia `wxplot2d` w swoim środowisku.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
            [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Polecenia `plot2d` i `wxplot2d` mają tę samą składnię i znacznie więcej parametrów.

- Parametry można znaleźć na przykład za pomocą polecenia `describe(plot2d)`.

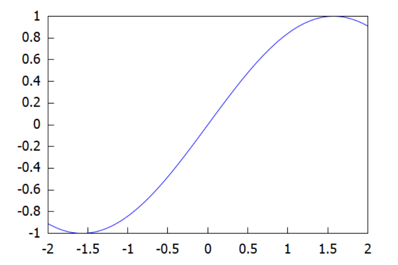
Wykresy funkcji

Wykres funkcji możemy narysować na kilka sposobów.

- Lepiej jest użyć poleceń `wxdraw2d` lub `draw2d` i przekieruj wyjście do `Gnuplot`.
- Te polecenia mają nieco inną składnię niż `wxplot2d`, `plot2d`.
  Parametry drukowania są prostsze i bardziej przejrzyste.
- Renderowana funkcja musi znajdować się w poleceniu `explicit`, `parametric` lub `implicit`.

```
(%i1) wxdraw2d(explicit((sin(x)),x,-2,2))$
```

(%o1)



Ciągi i szeregi

Ciągi w Maximie możemy tworzyć na kilka sposobów.

- Ciągi możemy tworzyć na przykład za pomocą polecenia `makelist` lub za pomocą poleceń cyklu `for..do`.
- Polecenie `makelist` tworzy listę, którą możemy wyświetlić zarówno jako całość, jak i według członków.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);
      S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S2[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 7
(%o5) 199
(%i6) S1[12];
      inpart: invalid index 12 of list or matrix.
      -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

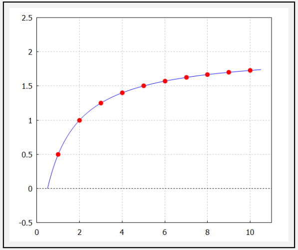
Ciągi i szeregi

- Ciąg jest również generowany z jego wzorami, a następnie rysowany przy użyciu `draw2d`.
- Uporządkowane pary są w nawiasach kwadratowych, a następnie pokazane jako punkty na płaszczyźnie.

(%i1) `S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);`

(S1) $[[1,\frac{1}{2}],[2,1],[3,\frac{5}{4}],[4,\frac{7}{5}],[5,\frac{3}{2}],[6,\frac{11}{7}],[7,\frac{13}{8}],[8,\frac{5}{3}],[9,\frac{17}{10}],[10,\frac{19}{11}]]$

(%i2)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
point_type=7,color=red,points(S1))$
```



Ciągi i szeregi

- Za pomocą polecenia `for..do` wymieniamy kilka elementów ciągu $\{2n^2-1\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 15 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
      1
      7
      17
      31
      49
      71
      97
      127
      161
      199
      241
      287
      337
      391
      449
```

Ciągi i szeregi

Sumę szeregu możemy obliczyć poleceniem `sum`.
Możesz znaleźć to polecenie w menu `Calculus` a podmenu `Calculate Sum...`.

- Za pomocą polecenia `sum` obliczamy zarówno sumę skończoną, jak i nieskończoną.

```
(%i1) sum(2*n^2-1,n,1,8);
(%o1) 400
```

- Maxima może obliczyć dokładną sumę niektórych nieskończonych szeregów.

```
(%i2) sum(1/k^2,k,1,inf);
      sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum;
```

(%o1) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right)$

(%o2) $\frac{\pi^2}{6}$

Funkcje rzeczywiste

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Podstawowe pojęcia

- **Relacja binarna (dwuargumentowa)** f między zbiorami $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ to każdy $f \subset A \times B$.
- Jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje co najwyżej jeden $y \in B$ taki, że $[x; y] \in f$, wtedy relacja f nazywa się **funkcja** ze zbioru A do zbioru B, oznaczenie $f\colon AB$.

  Piszemy $[x; y] \in f$ lub $y = f(x)$.
- $x \in A$ Argument funkcji (zmienna niezależna).
- $y \in B$ Wartość funkcji (zmienna zależna).
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B \colon [x; y] \in f\}$ Dziedzina funkcji f (zbiór argumentów).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f) \colon [x; y] \in f\}$ Przeciwdziedziną funkcji f (zbiór wartości).
- Relacje i funkcje to zbiory uporządkowanych par.
- $f = g$ reprezentuje równoważność $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ i $f(x) = g(x)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in D(f)$.

Podstawowe pojęcia

- **Relacja binarna (dwuargumentowa)** f między zbiorami $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ to każdy $f \subset A \times B$.
- Jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje co najwyżej jeden $y \in B$ taki, że $[x; y] \in f$, wtedy relacja f nazywa się **funkcja** ze zbioru A do zbioru B, oznaczenie $f\colon AB$.

  Piszemy $[x; y] \in f$ lub $y = f(x)$.
- $x \in A$ Argument funkcji (zmienna niezależna).
- $y \in B$ Wartość funkcji (zmienna zależna).
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B \colon [x; y] \in f\}$ Dziedzina funkcji f (zbiór argumentów).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f) \colon [x; y] \in f\}$ Przeciwdziedziną funkcji f (zbiór wartości).
- Relacje i funkcje to zbiory uporządkowanych par.
- $f = g$ reprezentuje równoważność $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ i $f(x) = g(x)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in D(f)$.

Podstawowe pojęcia

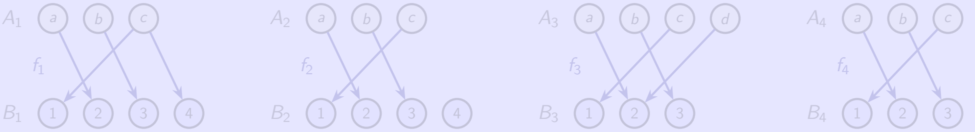
- **Relacja binarna (dwuargumentowa)** f między zbiorami $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ to każdy $f \subset A \times B$.
- Jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje co najwyżej jeden $y \in B$ taki, że $[x; y] \in f$, wtedy relacja f nazywa się **funkcja** ze zbioru A do zbioru B, oznaczenie $f\colon AB$.

  Piszemy $[x; y] \in f$ lub $y = f(x)$.
- $x \in A$ Argument funkcji (zmienna niezależna).
- $y \in B$ Wartość funkcji (zmienna zależna).
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Dziedzina funkcji f (zbiór argumentów).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Przeciwdziedziną funkcji f (zbiór wartości).
- Relacje i funkcje to zbiory uporządkowanych par.
- $f = g$ reprezentuje równoważność $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  tj. $D(f) = D(g)$ i $f(x) = g(x)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in D(f)$.

Podstawowe pojęcia

- $\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Funkcja f jest iniekcją, lub różnowartościową (dla każdych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości).
- $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$ Funkcja f jest suriekcją lub "na" zbiorz B (dla każdej wartości istnieje co najmniej jeden argument).
- f to iniekcja i suriekcja w tym samym czasie (różnowartościowa "na")
  Funkcja f jest bijekcją (iniekcją i suriekcją).



$f_1 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [c;4]\}$ — Nie jest funkcją (jest relacją).

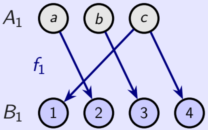
$f_2 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$ — Jest iniekcją.

$f_3 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [d;2]\}$ — Je suriekcią.

$f_4 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$ — Je bijekcią.

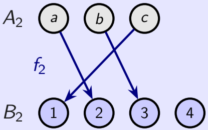
Podstawowe pojęcia

- $\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Funkcja f jest iniekcją, lub różnowartościową (dla każdych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości).
- $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$ Funkcja f jest suriekcją lub "na" zbiorz B (dla każdej wartości istnieje co najmniej jeden argument).
- f to iniekcja i suriekcja w tym samym czasie (różnowartościowa "na")
  Funkcja f jest bijekcją (iniekcją i suriekcją).



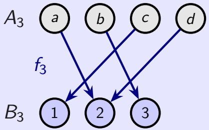
$f_1 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [c;4]\}$

Nie jest funkcją (jest relacją).



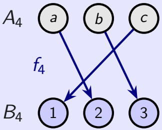
$f_2 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$

Jest iniekcją.



$f_3 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [d;2]\}$

Je suriekcią.



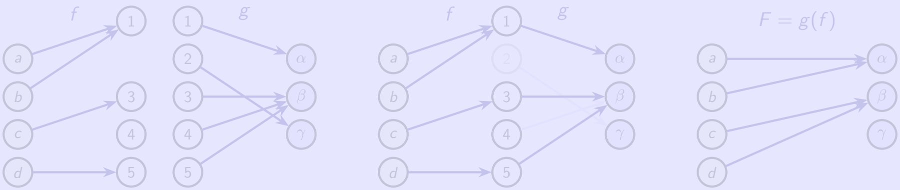
$f_4 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$

Je bijekcią.

Podstawowe pojęcia

Funkcje $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $H(f) \subset C$.

- Funkcja $F = g(f)\colon A \to D$, która przypisuje każdemu $x \in A$ wartość $z = g(y) = g(f(x)) \in D$, gdzie $y = f(x)$, nazywa się **złożenie** (**superpozycja**) funkcji f i g.
- Funkcja f jest nazywana wewnętrzną.
- Funkcja g jest nazywana zewnętrzną.



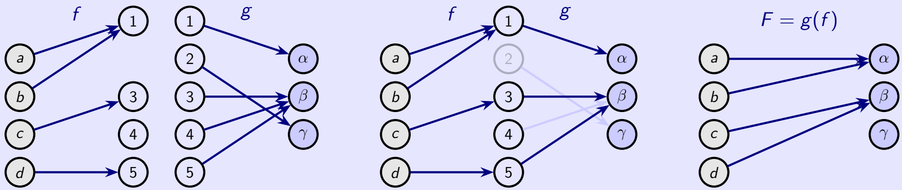
$$f = \{[a;1],[b;1],[c;3],[d;5]\},\ g = \{[1;\alpha],[2;\gamma],[3;\beta],[4;\beta],[5;\beta]\},$$

$$\text{złożenie } F = g(f) = \{[a;\alpha],[b;\alpha],[c;\beta],[d;\beta]\}.$$

Podstawowe pojęcia

Funkcje $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $H(f) \subset C$.

- Funkcja $F = g(f)\colon A \to D$, która przypisuje każdemu $x \in A$ wartość $z = g(y) = g(f(x)) \in D$, gdzie $y = f(x)$, nazywa się **złożenie** (**superpozycja**) funkcji f i g.
- Funkcja f jest nazywana wewnętrzną.
- Funkcja g jest nazywana zewnętrzną.



$$f = \{[a;1], [b;1], [c;3], [d;5]\},\ g = \{[1;\alpha], [2;\gamma], [3;\beta], [4;\beta], [5;\beta]\},$$

$$\text{złożenie } F = g(f) = \{[a;\alpha], [b;\alpha], [c;\beta], [d;\beta]\}.$$

Podstawowe pojęcia

Funkcja f: AB, $C \subset A$.

- Funkcja h: $C \to B$ taka, że $f(x) = h(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in C$, nazywamy **zawężeniem** (**ograniczeniem, restrykcją**) f **do zbioru** C, $h = f|_C$ (funkcja częściowa).

Funkcja f: $A \to B$ jest bijekcją.

- Funkcja g: BA taka, że $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,

  tj. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, nazywa się **funkcją odwrotną k** f, oznaczenie $g = f^{-1}$.

Zbiór A jest w przybliżeniu równoważny zbiorowi B, jeśli istnieje bijekcja f: $A \to B$, oznaczenie $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A jest pusty.	A jest skończony.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A jest przeliczalnie skończony.	
$A \sim N$	A jest przeliczalnie nieskończony.	A jest nieskończony.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A jest neprzeliczalny.	
$A = \emptyset$ lub $A \sim N_n$ lub $A \sim N$	A jest przeliczalny.	

Podstawowe pojęcia

Funkcja f: AB, $C \subset A$.

- Funkcja h: $C \to B$ taka, że $f(x) = h(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in C$, nazywamy **zawężeniem** (**ograniczeniem, restrykcją**) f **do zbioru** C, $h = f|_C$ (funkcja częściowa).

Funkcja f: $A \to B$ jest bijekcją.

- Funkcja g: BA taka, że $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,

  tj. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, nazywa się **funkcją odwrotną k** f, oznaczenie $g = f^{-1}$.

Zbiór A jest w przybliżeniu równoważny zbiorowi B, jeśli istnieje bijekcja f: $A \to B$, oznaczenie $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A jest pusty.	A jest skończony.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A jest przeliczalnie skończony.	
$A \sim N$	A jest przeliczalnie nieskończony.	A jest nieskończony.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A jest neprzeliczalny.	
$A = \emptyset$ lub $A \sim N_n$ lub $A \sim N$	A jest przeliczalny.	

Podstawowe pojęcia

Funkcja $f\colon AB$, $C \subset A$.

- Funkcja $h\colon C \to B$ taka, że $f(x) = h(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in C$, nazywamy **zawężeniem** (**ograniczeniem, restrykcją**) f **do zbioru** C, $h = f|_C$ (funkcja częściowa).

Funkcja $f\colon A \to B$ jest bijekcją.

- Funkcja $g\colon BA$ taka, że $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,

  tj. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, nazywa się **funkcją odwrotną k** f, oznaczenie $g = f^{-1}$.

Zbiór A jest w przybliżeniu równoważny zbiorowi B, jeśli istnieje bijekcja $f\colon A \to B$, oznaczenie $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A jest pusty.	A jest skończony.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A jest przeliczalnie skończony.	
$A \sim N$	A jest przeliczalnie nieskończony.	A jest nieskończony.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A jest neprzeliczalny.	
$A = \emptyset$ lub $A \sim N_n$ lub $A \sim N$	A jest przeliczalny.	

Podstawowe pojęcia

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ Liczby naturalne.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ Liczby całkowite.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Liczby wymierne.

  Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych (z niezerowym mianownikiem) jest znowu liczbą wymierną. Liczba wymierna (ułamek) może mieć kilka różnych wyrażeń.
- $I = R - Q$ Liczby niewymierne.

  Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb niewymiernych może być zarówno niewymiern, jak i wymierny.
- $R = (-\infty; \infty)$ Liczby rzeczywiste.

  Zbiór R jest nieskończony, ale wszystkie jego elementy, tj. liczby są ostateczne (liczba elementów zbioru R nie może być wyrażona liczbą).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ dla $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nie definiujemy $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ for $a \in R$ (wyrażenia nieokreślone).

Podstawowe pojęcia

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ Liczby naturalne.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ Liczby całkowite.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Liczby wymierne.

  Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych (z niezerowym mianownikiem) jest znowu liczbą wymierną. Liczba wymierna (ułamek) może mieć kilka różnych wyrażeń.
- $I = R - Q$ Liczby niewymierne.

  Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb niewymiernych może być zarówno niewymiern, jak i wymierny.
- $R = (-\infty; \infty)$ Liczby rzeczywiste.

  Zbiór R jest nieskończony, ale wszystkie jego elementy, tj. liczby są ostateczne (liczba elementów zbioru R nie może być wyrażona liczbą).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ dla $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nie definiujemy $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ for $a \in R$ (wyrażenia nieokreślone).

Podstawowe pojęcia

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ Liczby naturalne.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ Liczby całkowite.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Liczby wymierne.
  Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych (z niezerowym mianownikiem) jest znowu liczbą wymierną. Liczba wymierna (ułamek) może mieć kilka różnych wyrażeń.
- $I = R - Q$ Liczby niewymierne.
  Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb niewymiernych może być zarówno niewymiern, jak i wymierny.
- $R = (-\infty; \infty)$ Liczby rzeczywiste.
  Zbiór R jest nieskończony, ale wszystkie jego elementy, tj. liczby są ostateczne (liczba elementów zbioru R nie może być wyrażona liczbą).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ dla $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nie definiujemy $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ for $a \in R$ (wyrażenia nieokreślone).

Ciągi (liczb rzeczywistych)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Funkcja } f,\ D(f)=N \\ f=\{[n;f(n)]\,,n\in N\}\end{array}\right\}$$ **Ciąg**, dla $n\in N$ oznaczamy $a_n=f(n)$,
tj. $f=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f\sim N$ Ciąg f jest przeliczalny (nieskończony).
- $a_n\in f$ Członek ciągu reprezentuje $[n;f(n)]$,
  to znaczy jednocześnie argument (kolejność n) i wartość $a_n=f(n)$.

Ciąg (liczb rzeczywistych) to dowolny ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $a_n\in R$, t.j. $f\colon N\to R$, $D(f)\subset R$.

- Jawny wpis: Wyrażenie ogólne $a_n=f(n)$, $n\in N$.
  $a_n=n^2$, $n\in N$ definiuje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n^2\}_{n=1}^{\infty}=\{1,4,9,16,\ldots\}$.
- Wpis rekurencyjny: Definicja a_1 i przypisanie a_n, $n\in N$ przy użyciu poprzednich członków.
  $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2n+1$, $n\in N$
  definiuje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n^2\}_{n=1}^{\infty}=\{1,4,9,16,\ldots\}$.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Funkcja f, $D(f) = N$
$f = \{[n; f(n)], n \in N\}$ } **Ciąg**, dla $n \in N$ oznaczamy $a_n = f(n)$,
tj. $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Ciąg f jest przeliczalny (nieskończony).
- $a_n \in f$ Członek ciągu reprezentuje $[n; f(n)]$,
  to znaczy jednocześnie argument (kolejność n) i wartość $a_n = f(n)$.

Ciąg (liczb rzeczywistych) to dowolny ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $a_n \in R$, t.j. $f : N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Jawny wpis: Wyrażenie ogólne $a_n = f(n)$, $n \in N$.
  $a_n = n^2$, $n \in N$ definiuje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
- Wpis rekurencyjny: Definicja a_1 i przypisanie a_n, $n \in N$ przy użyciu poprzednich członków.
  $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$
  definiuje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Funkcja } f,\ D(f)=N \\ f=\{[n;f(n)]\,,n\in N\} \end{array}\right\}$$ **Ciąg**, dla $n\in N$ oznaczamy $a_n = f(n)$,

tj. $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Ciąg f jest przeliczalny (nieskończony).
- $a_n \in f$ Członek ciągu reprezentuje $[n; f(n)]$,

  to znaczy jednocześnie argument (kolejność n) i wartość $a_n = f(n)$.

Ciąg (liczb rzeczywistych) to dowolny ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $a_n \in R$, t.j. $f: N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Jawny wpis: Wyrażenie ogólne $a_n = f(n)$, $n \in N$.

  $a_n = n^2$, $n \in N$ definiuje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
- Wpis rekurencyjny: Definicja a_1 i przypisanie a_n, $n \in N$ przy użyciu poprzednich członków.

  $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$

  definiuje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, liczby $a, b \in R$.

- $\forall n \in N\colon\ a \leq a_n$ — a dolna granica, — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od dołu.
- $\forall n \in N\colon\ a_n \leq b$ — b górna granica, — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od góry.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od dołu i od góry — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

$\forall n \in N\colon\ a_n < a_{n+1}$ Rosnący.
$a_n > a_{n+1}$ Malejący.
} Silnie monoticzny.

$\forall n \in N\colon\ a_n \leq a_{n+1}$ Niemalejący.
$a_n \geq a_{n+1}$ Nierosnący.
$a_n = a_{n+1}$ Stała (stacjonarna).

} Ciąg monotoniczny $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ nie jest monotoniczny.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, liczby $a, b \in R$.

- $\forall n \in N\colon\ a \leq a_n$ — a dolna granica, — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od dołu.
- $\forall n \in N\colon\ a_n \leq b$ — b górna granica, — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od góry.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od dołu i od góry — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

$$\left.\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{ll}
\forall n \in N\colon\ a_n < a_{n+1} & \text{Rosnący.} \\
 a_n > a_{n+1} & \text{Malejący.}
\end{array}\right\} \text{Silnie monoticzny.} \\
\begin{array}{ll}
\forall n \in N\colon\ a_n \leq a_{n+1} & \text{Niemalejący.} \\
 a_n \geq a_{n+1} & \text{Nierosnący.} \\
 a_n = a_{n+1} & \text{Stała (stacjonarna).}
\end{array}
\end{array}\right\} \text{Ciąg monotoniczny } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

- Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ nie jest monotoniczny.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, liczby $a, b \in R$.

- $\forall n \in N\colon\ a \leq a_n$ a dolna granica, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od dołu.
- $\forall n \in N\colon\ a_n \leq b$ b górna granica, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od góry.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony od dołu i od góry $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

$\forall n \in N\colon\ a_n < a_{n+1}$ Rosnący.

$a_n > a_{n+1}$ Malejący.

Silnie monoticzny.

$\forall n \in N\colon\ a_n \leq a_{n+1}$ Niemalejący.

$a_n \geq a_{n+1}$ Nierosnący.

$a_n = a_{n+1}$ Stała (stacjonarna).

Ciąg monotoniczny $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ nie jest monotoniczny.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Jeśli $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ jest ciągiem rosnącym (liczb naturalnych, indeksów), następnie wywoływana jest $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ **podciąg (wybrany ciąg z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podciągi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1,3,5,7,9,11,13,\dots\}$ to na przykład:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \dots\} = \{3,7,11,\dots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \dots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1,3,5,7,9,11,13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3,7,11,15,19,23,27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7,11,15,19,23,27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Jeśli $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ jest ciągiem rosnącym (liczb naturalnych, indeksów), następnie wywoływana jest $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ **podciąg (wybrany ciąg z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podciągi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ to na przykład:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Dla każdego otoczenia $O(a)$ istnieje nieskończenie wiele elementów $a_n \in O(a)$, wtedy to się nazywa $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ **punkt skupienia** ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oznaczamy przez E.

$\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ — **Limes superior** (górna granica) ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ — **Limes inferior** (dolna granica) ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Limes superior} \\ \text{Limes inferior}\end{array}\right\}$ Zawsze istnieją.

$\sup E = \inf E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ — **Granica** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (zbiór E ma jeden element).

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma co najmniej jedną wartość skupienia.
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ istnieje, to jest unikalna.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Dla każdego otoczenia $O(a)$ istnieje nieskończenie wiele elementów $a_n \in O(a)$, wtedy to się nazywa $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ **punkt skupienia** ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oznaczamy przez E.

$\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limes superior** (górna granica) ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ **Limes inferior** (dolna granica) ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zawsze istnieją.

$\sup E = \inf E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **Granica** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (zbiór E ma jeden element).

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma co najmniej jedną wartość skupienia.
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ istnieje, to jest unikalna.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$ — Istnieje skończona granica, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżna do liczby a, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. $\Bigg\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżna, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ — Istnieje nieskończona granica, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżna do $\pm\infty$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ — Nie istnieje granica, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oscyluje.

$\Bigg\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżna, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$.

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Zmiana ostatecznej liczby (dodanie, pominięcie, zmiana kolejności itp.) elementów ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie wpływa na zbieżność lub rozbieżność tego ciągu.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest monotoniczny. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ dla } q > 0. \\ \lim_{n\to\infty} n^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ dla } q = 0. \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ dla } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Ciąg geometryczny.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ dla } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ dla } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ dla } q \in (0; 1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ dla } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ dla } q < -1. \end{cases}$$

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest monotoniczny. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ dla } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ dla } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ dla } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Ciąg geometryczny.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ dla } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ dla } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ dla } q \in (0; 1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ dla } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ dla } q < -1. \end{cases}$$

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest monotoniczny. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ dla } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ dla } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ dla } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Ciąg geometryczny.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ dla } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ dla } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ dla } q \in (0; 1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ dla } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ dla } q < -1. \end{cases}$$

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (jeśli istnieją granice).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < 1, \\ \infty & \text{dla } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < 1, \\ \infty & \text{dla } a > 1. \end{cases}$

Ważne granice. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$

- Liczba e nazywa się **liczba Eulera**. Jego wartość to około $2,718\,281\,827$.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (jeśli istnieją granice).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < 1, \\ \infty & \text{dla } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < 1, \\ \infty & \text{dla } a > 1. \end{cases}$

Ważne granice. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$

- Liczba e nazywa się **liczba Eulera**. Jego wartość to około $2,718\,281\,827$.

Ciągi (liczb rzeczywistych)

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (jeśli istnieją granice).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < 1, \\ \infty & \text{dla } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < 1, \\ \infty & \text{dla } a > 1. \end{cases}$

Ważne granice. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \mathrm{e}^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = \ln \mathrm{e} = 1.$

- Liczba e nazywa się **liczba Eulera**. Jego wartość to około 2,718 281 827.

Szeregi liczbowe

Jeśli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym

wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazywa się **(nieskończony ciąg numeryczny)**.

- Szeregi liczbowe są ściśle związane z ciągmi i uogólniają koncepcję dodatki do nieskończonej liczby dodatków. Prostym przykładem są ułamki zwykłe i liczby okresowe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Związek między $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ciągą $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ wyklucza się wzajemnie.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, gdzie $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Szeregi liczbowe

Jeśli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym

wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazywa się **(nieskończony ciąg numeryczny)**.

- Szeregi liczbowe są ściśle związane z ciągmi i uogólniają koncepcję dodatki do nieskończonej liczby dodatków. Prostym przykładem są ułamki zwykłe i liczby okresowe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Związek między $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ciągą $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ wyklucza się wzajemnie.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\dots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, gdzie $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Szeregi liczbowe

Jeśli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym

wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazywa się **(nieskończony ciąg numeryczny)**.

- Szeregi liczbowe są ściśle związane z ciągmi i uogólniają koncepcję dodatki do nieskończonej liczby dodatków. Prostym przykładem są ułamki zwykłe i liczby okresowe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

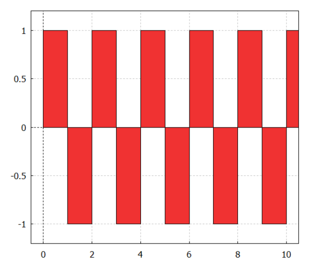
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Związek między $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ciągą $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ wyklucza się wzajemnie.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, gdzie $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Szeregi liczbowe

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots.$

```
(%i1)  a(n):=(-1)^(n+1)$
       rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
       border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



Szeregi liczbowe

$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (jeśli istnieje) nazywa się **sum** szerega $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, oznaczenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$ — Istnieje skończona granica, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbiega się do sumy s, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, lub $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. $\Bigg\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ — Istnieje nieskończona granica, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozchodzi się do $\pm\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, lub $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ — Nie istnieje granica, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oscyluje.

$\Bigg\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Szeregi liczbowe

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (jeśli istnieje) nazywa się **sum** szerega $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, oznaczenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$ Istnieje skończona granica, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zbiega się do sumy s, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, lub $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. $\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ Istnieje nieskończona granica, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozchodzi się do $\pm\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, lub $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Nie istnieje granica, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oscyluje.

$\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Szeregi liczbowe

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Zmiana ostatecznej liczby (dodanie, pominięcie, zmiana kolejności itp.) elementów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie wpływa na zbieżność lub rozbieżność szeregu.
- Ale ma to wpływ na jego sumę.

Szereg harmoniczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (Szereg harmoniczny ma nieskończoną sumę).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty.$ (Szereg harmoniczny rozbiega się do nieskończoności).

Szeregi liczbowe

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Zmiana ostatecznej liczby (dodanie, pominięcie, zmiana kolejności itp.) elementów szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nie wpływa na zbieżność lub rozbieżność szeregu.
- Ale ma to wpływ na jego sumę.

Szereg harmoniczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (Szereg harmoniczny ma nieskończoną sumę).
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty.$ (Szereg harmoniczny rozbiega się do nieskończoności).

Szeregi liczbowe

Pewne zasady nie dotyczą szeregy nieskończonych, np. prawo stowarzyszeniowe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=\begin{cases}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0,\\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\quad=1+0+0+\cdots=1.\end{cases}$$

Szereg geometryczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}=1+q+q^2+\cdots=\tfrac{1}{1-q}\ \text{dla wszystkich } q\in(-1;1).$$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}s_n,\ s_n=(1+q+\cdots+q^{n-1})\frac{1-q}{1-q}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1}$ dla $q\neq 1$.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases}\frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{\infty-1}{q-1}=\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty\quad \text{dla } q>1.\\ 1+1+1+1+\cdots\to\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty\quad \text{dla } q=1.\\ \frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{0-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\frac{1}{1-q}\ \text{dla } q\in(-1;1).\\ -1+1-1+1-1+\cdots. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists\quad \text{dla } q=-1.\\ \frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1},\ \frac{1}{q}\to 0,\ q^{n-1}\to\pm\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists\quad \text{dla } q<-1.\end{cases}$$

Szeregi liczbowe

Pewne zasady nie dotyczą szeregy nieskończonych, np. prawo stowarzyszeniowe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=\begin{cases}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0,\\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\quad=1+0+0+\cdots=1.\end{cases}$$

Szereg geometryczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}=1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q}\ \text{dla wszystkich}\ q\in(-1;1).$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n$, $s_n=(1+q+\cdots+q^{n-1})\frac{1-q}{1-q}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1}$ dla $q\neq 1$.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases}\frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{\infty-1}{q-1}=\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty\quad \text{dla}\ q>1.\\ 1+1+1+1+\cdots\to\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty\quad \text{dla}\ q=1.\\ \frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{0-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\frac{1}{1-q}\ \text{dla}\ q\in(-1;1).\\ -1+1-1+1-1+\cdots. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists\quad \text{dla}\ q=-1.\\ \frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1},\ \frac{1}{q}\to 0,\ q^{n-1}\to\pm\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists\quad \text{dla}\ q<-1.\end{cases}$$

Szeregi liczbowe

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4)
```
sum:  sum is divergent.
#0:  sq(q=2) -- an error.  To debug this try:  debugmode(true);
```

- W poniższym przykładzie wystarczy zmienić wartość q na początku.

```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

Szeregi liczbowe

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4) sum: sum is divergent.

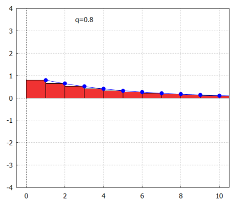
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);

- W poniższym przykładzie wystarczy zmienić wartość q na początku.

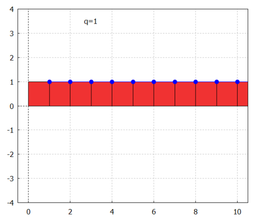
```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

Szeregi liczbowe

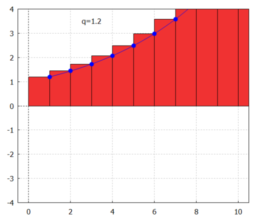
Polecenia wyświetlą następujące wykresy:



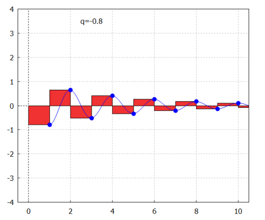
$q = 0.8$



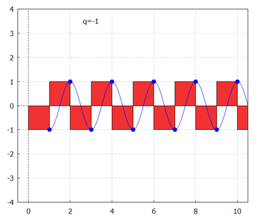
$q = 1$



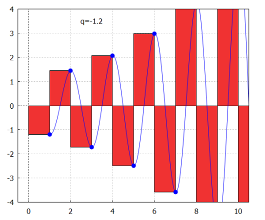
$q = 1.2$



$q = -0.8$



$q = -1$



$q = -1.2$

Szeregi liczbowe

Warunek konieczny zbieżności.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (granica nie istnieje lub wynosi zero).

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (oscyluje lub $\longrightarrow \pm\infty$).

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ rozchodzi się do nieskończoności.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ dla $q = \frac{1}{2}$ jest zbieżny do 2.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Szeregi liczbowe

Warunek konieczny zbieżności.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (granica nie istnieje lub wynosi zero).

  $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (oscyluje lub $\longrightarrow \pm\infty$).

Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ rozchodzi się do nieskończoności.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ dla $q = \frac{1}{2}$ jest zbieżny do 2.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Szeregi liczbowe

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in N$ (**argumenty nieujemne**) zawsze ma sumę $0 \leq s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \infty$.

Kryterium porównania. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p$, $0 < p < \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$ $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

Szeregi liczbowe

Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \le \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

Szeregi liczbowe

Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

Szeregi liczbowe

Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $p > 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow .$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

Szeregi liczbowe

Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, gdzie $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Wersja graniczna. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Nie możemy zdecydować dla $p = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, jednak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, jednak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

Szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow \text{dla } a > 0.$$

Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \qquad \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow \text{dla } a > 0.$

Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1. \qquad \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow \text{dla } a > 0.$

```
(%i5)  an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
            limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
            limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%o3)  0
(%o4)  0
(%o5)  0
```

Szeregi liczbowe

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **(bezwzględnie) absolutnie zbieżny**, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{A}}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$, wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **(względnie) nieabsolutnie zbieżny**, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{R}}$.

Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a_n \in R$, $n \in N$ zawsze mają sumę $0 \leq s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \infty$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{\text{A}}$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

Kryterium Leibniza.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n \geq 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ jest nierosnąca.} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, gdzie $a_n \geq 0$ lub $a_n \leq 0$ nazywamy szeregiem naprzemiennym (alternującym).

Szeregi liczbowe

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **(bezwzględnie) absolutnie zbieżny**, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$, wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **(względnie) nieabsolutnie zbieżny**, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R}$.

Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a_n \in R$, $n \in N$ zawsze mają sumę $0 \leq s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \infty$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{A}$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

Kryterium Leibniza.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n \geq 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ jest nierosnąca.} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, gdzie $a_n \geq 0$ lub $a_n \leq 0$ nazywamy szeregiem naprzemiennym (alternującym).

Szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$$ (szereg anharmoniczny)

Kryterium Leibniza:

- $a_n = \frac{1}{n} > 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ jest malejąca (nierosnąca).
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$$

Szereg anharmoniczny i harmoniczny.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$ (Szereg anharmoniczny).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty$ (Szereg harmoniczny).

Szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$$ (szereg anharmoniczny)

Kryterium Leibniza:

- $a_n = \frac{1}{n} > 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ jest malejąca (nierosnąca).
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$$

Szereg anharmoniczny i harmoniczny.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$ (Szereg anharmoniczny).
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty$ (Szereg harmoniczny).

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f)H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcja zmiennej rzeczywistej.
- $H(f) \subset R$ Funkcja o wartościach rzeczywistych (rzeczywista funkcja).

Jawnie: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (wzór analityczny).

Parametrycznie: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (funkcje pomocnicze φ, ψ).

Niejawnie: • $f\colon F(x, y) = 0$, warunki dla $[x; y]$ (równanie niejawne).

Funkcja $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Na przykład możemy zdefiniować funkcję $f\colon y = |x|$, $x \in R$:

Jawnie:	• $y = \sqrt{x^2}$,	lub	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametrycznie:	• $x = t$, $y = \lvert t\rvert$, $t \in R$,	lub	• $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
Niejawnie:	• $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,	lub	• $y - \lvert x\rvert = 0$.

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon\ D(f)H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcja zmiennej rzeczywistej.
- $H(f) \subset R$ Funkcja o wartościach rzeczywistych (rzeczywista funkcja).

Jawnie: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (wzór analityczny).

Parametrycznie: • $f\colon\ x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (funkcje pomocnicze φ, ψ).

Niejawnie: • $f\colon\ F(x, y) = 0$, warunki dla $[x; y]$ (równanie niejawne).

Funkcja $f\colon\ y = |x|$, $x \in R$.

Na przykład możemy zdefiniować funkcję $f\colon\ y = |x|$, $x \in R$:

Jawnie:	• $y = \sqrt{x^2}$,	lub	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametrycznie:	• $x = t$, $y = \lvert t \rvert$, $t \in R$,	lub	• $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
Niejawnie:	• $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,	lub	• $y - \lvert x \rvert = 0$.

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj. $f\colon D(f) H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcja zmiennej rzeczywistej.
- $H(f) \subset R$ Funkcja o wartościach rzeczywistych (rzeczywista funkcja).

Jawnie:
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (wzór analityczny).

Parametrycznie:
- $f\colon\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J,\ J \subset R$ (funkcje pomocnicze φ, ψ).

Niejawnie:
- $f\colon\ F(x, y) = 0$, warunki dla $[x; y]$ (równanie niejawne).

Funkcja $f\colon\ y = |x|,\ x \in R$.

Na przykład możemy zdefiniować funkcję $f\colon\ y = |x|,\ x \in R$:

Jawnie:	• $y = \sqrt{x^2}$,	lub	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametrycznie:	• $x = t,\ y = |t|,\ t \in R$,	lub	• $x = t,\ y = \sqrt{t^2},\ t \in R$.
Niejawnie:	• $y^2 - x^2 = 0,\ y \geq 0$,	lub	• $y - |x| = 0$.

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in A\colon\ a \le f(x) & a \text{ dolna granica,} & f \text{ jest ograniczona od dołu} \\ \bullet\ \forall x \in A\colon\ f(x) \le b & b \text{ górna granica,} & f \text{ jest ograniczona od góry} \\ \bullet\ f \text{ jest ograniczona od dołu i od góry} & & f \text{ jest ograniczona} \end{array}\right\} \text{ na zbiorze } A.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \text{nie jest ograniczona od dołu na zbiorze } A & f \text{ jest nieograniczona od dołu} \\ \bullet\ \text{nie jest ograniczona od góry na zbiorze } A & f \text{ jest nieograniczona od góry} \\ \bullet\ \text{nie jest ograniczona na zbiorze } A & f \text{ jest nieograniczona} \end{array}\right\} \text{ na zbiorze } A.$$

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Własność lokalna na zbiorze A.
- $A = D(f)$. Właściwość globalna (w zbiore argumentów).

- $f\colon\ y = \sin x$ jest ograniczona, tj. ograniczona na $D(f) = R$.
- $f\colon\ y = x^3$ jest nieograniczona (od dołu lub od góry), f jest ograniczona, np. na $(0; 1\rangle$.

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $\forall x \in A\colon\ a \leq f(x)$ — a dolna granica, f jest ograniczona od dołu
- $\forall x \in A\colon\ f(x) \leq b$ — b górna granica, f jest ograniczona od góry
- f jest ograniczona od dołu i od góry — f jest ograniczona

na zbiorze A.

- nie jest ograniczona od dołu na zbiorze A — f jest nieograniczona od dołu
- nie jest ograniczona od góry na zbiorze A — f jest nieograniczona od góry
- nie jest ograniczona na zbiorze A — f jest nieograniczona

na zbiorze A.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Własność lokalna na zbiorze A.
- $A = D(f)$. Właściwość globalna (w zbiore argumentów).

- $f\colon\ y = \sin x$ jest ograniczona, tj. ograniczona na $D(f) = R$.
- $f\colon\ y = x^3$ jest nieograniczona (od dołu lub od góry), f jest ograniczona, np. na $(0; 1\rangle$.

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in A\colon\ a \leq f(x) & a \text{ dolna granica,} & f \text{ jest ograniczona od dołu} \\ \bullet\ \forall x \in A\colon\ f(x) \leq b & b \text{ górna granica,} & f \text{ jest ograniczona od góry} \\ \bullet\ f \text{ jest ograniczona od dołu i od góry} & & f \text{ jest ograniczona} \end{array}\right\} \text{ na zbiorze } A.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \text{nie jest ograniczona od dołu na zbiorze } A & f \text{ jest nieograniczona od dołu} \\ \bullet\ \text{nie jest ograniczona od góry na zbiorze } A & f \text{ jest nieograniczona od góry} \\ \bullet\ \text{nie jest ograniczona na zbiorze } A & f \text{ jest nieograniczona} \end{array}\right\} \text{ na zbiorze } A.$$

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Własność lokalna na zbiorze A.
- $A = D(f)$. Właściwość globalna (w zbiore argumentów).

- $f\colon\ y = \sin x$ jest ograniczona, tj. ograniczona na $D(f) = R$.
- $f\colon\ y = x^3$ jest nieograniczona (od dołu lub od góry), f jest ograniczona, np. na $(0; 1\rangle$.

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $\inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\}$ Infimum lokalne
- $\sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\}$ Supremum lokalne

} na zbiorze A.

- $\inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\}$ Infimum globalne
- $\sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\}$ Supremum globalne

} (w zbiore argumentów).

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$ i punkt $x_0 \in A$.

- $\forall x \in A$: $f(x_0) \leq f(x)$ Minimum.
  $f(x_0) \geq f(x)$ Maksimum.
- $\forall x \in A$, $x \neq x_0$: $f(x_0) < f(x)$ Właściwe minimum.
  $f(x_0) > f(x)$ Właściwe maksimum.

} Właściwe extrema.

} Extrema na zbiorze A.

$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Ekstrema lokalne na zbiorze A.

$A = D(f)$ • Ekstrema globalne (w zbiore argumentów).

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $\inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\}$ Infimum lokalne
- $\sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\}$ Supremum lokalne

} na zbiorze A.

- $\inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\}$ Infimum globalne
- $\sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\}$ Supremum globalne

} (w zbiore argumentów).

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$ i punkt $x_0 \in A$.

- $\forall x \in A$: $f(x_0) \leq f(x)$ Minimum.
  $f(x_0) \geq f(x)$ Maksimum.
- $\forall x \in A$, $x \neq x_0$: $f(x_0) < f(x)$ Właściwe minimum.
  $f(x_0) > f(x)$ Właściwe maksimum.

} Właściwe extrema.

} Extrema na zbiorze A.

$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Ekstrema lokalne na zbiorze A.

$A = D(f)$ • Ekstrema globalne (w zbiore argumentów).

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $\inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\}$ Infimum lokalne
- $\sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\}$ Supremum lokalne

$\Big\}$ na zbiorze A.

- $\inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\}$ Infimum globalne
- $\sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\}$ Supremum globalne

$\Big\}$ (w zbiore argumentów).

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$ i punkt $x_0 \in A$.

- $\forall x \in A$: $f(x_0) \leq f(x)$ Minimum.
  $f(x_0) \geq f(x)$ Maksimum.
- $\forall x \in A$, $x \neq x_0$: $f(x_0) < f(x)$ Właściwe minimum.
  $f(x_0) > f(x)$ Właściwe maksimum.

$\Big\}$ Właściwe extrema.

$\Big\}$ Extrema na zbiorze A.

$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Ekstrema lokalne na zbiorze A.

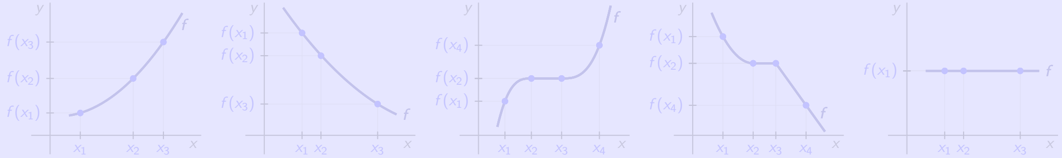
$A = D(f)$ • Ekstrema globalne (w zbiore argumentów).

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ Rosnąca.
  $f(x_1) > f(x_2)$ Malejąca.
  (Rosnąca, Malejąca) Silnie monoticzna.
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ Niemalejąca.
  $f(x_1) \geq f(x_2)$ Nierosnąca.
- $\forall x_1, x_2 \in A$: $f(x_1) = f(x_2)$ Stała.

(wszystkie powyższe) Monotoniczna na zbiorze A.



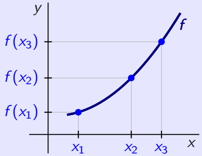
Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca	Funkcja niemalejąca	Funkcja nierosnąca	Funkcja stała
$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$	$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$	$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$	$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$	$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ i zbiór $A \subset D(f)$.

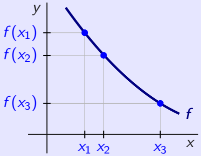
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ Rosnąca.
  $f(x_1) > f(x_2)$ Malejąca.
  } Silnie monoticzna.
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ Niemalejąca.
  $f(x_1) \geq f(x_2)$ Nierosnąca.
- $\forall x_1, x_2 \in A$: $f(x_1) = f(x_2)$ Stała.

} Monotoniczna na zbiorze A.



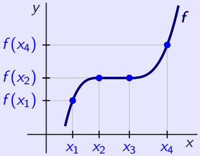
$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

Funkcja rosnąca



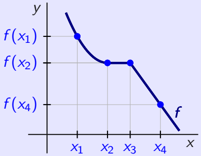
$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

Funkcja malejąca



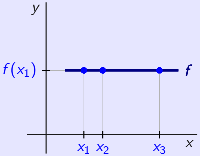
$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$

Funkcja niemalejąca



$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$

Funkcja nierosnąca



$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

Funkcja stała

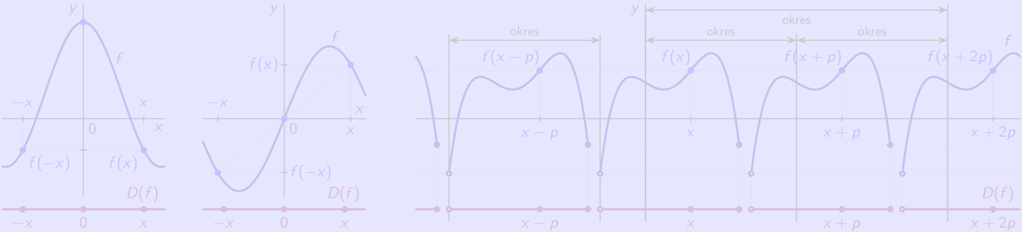
Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

- $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f)$, $f(x) = f(-x)$ Funkcja parzysta.

  $f(x) = -f(-x)$ Funkcja nieparzysta.

- $\forall x \in D(f)$: $x \pm p \in D(f)$, $f(x) = f(x \pm p)$, $p \in R - \{0\}$ Funkcja okresowa, p to okres.

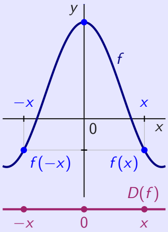


Funkcja parzysta. Funkcja nieparzysta. Funkcja okresowa.

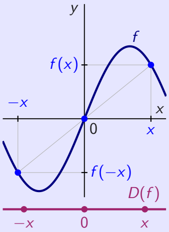
Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

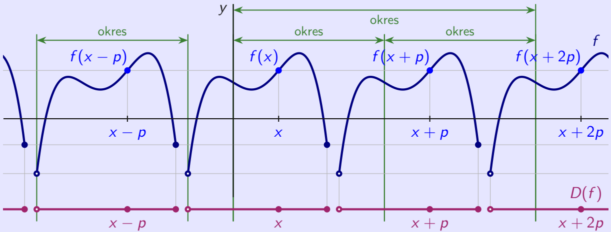
- $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f)$, $f(x) = f(-x)$ Funkcja parzysta.
  $f(x) = -f(-x)$ Funkcja nieparzysta.
- $\forall x \in D(f)$: $x \pm p \in D(f)$, $f(x) = f(x \pm p)$, $p \in R - \{0\}$ Funkcja okresowa, p to okres.



Funkcja parzysta.



Funkcja nieparzysta.



Funkcja okresowa.

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ jest przedziałem, punkty $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

- Linia prosta $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ łączy punkty $[x_1; f(x_1)]$ i $[x_2; f(x_2)]$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \leq p(x) & \text{Wypukła} \\ & f(x) < p(x) & \text{Ściśle wypukła} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \geq p(x) & \text{Wklęsła} \\ & f(x) > p(x) & \text{Ściśle wklęsła} \end{array}\right\} \text{ na przedziale } I.$$

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

$x_0 \in D(f)$ nazywamy **punktem przegięcia** f (f ma **przegięcie** w punkcie x_0), jeśli istnieje takie otoczenie $O_\delta(x_0)$, że funkcja f:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ jest ściśle wypukła na } O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \\ \bullet\ f \text{ jest ściśle wklęsła na } O_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta) \end{array}\right\} \text{ lub } \left\{\begin{array}{l} f \text{ jest ściśle wklęsła na } O_\delta^-(x_0). \\ f \text{ jest ściśle wypukła na } O_\delta^+(x_0). \end{array}\right.$$

Funkcje

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ jest przedziałem, punkty $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

- Linia prosta $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ łączy punkty $[x_1; f(x_1)]$ i $[x_2; f(x_2)]$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \leq p(x) & \text{Wypukła} \\ & f(x) < p(x) & \text{Ściśle wypukła} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \geq p(x) & \text{Wklęsła} \\ & f(x) > p(x) & \text{Ściśle wklęsła} \end{array}\right\} \text{ na przedziale } I.$$

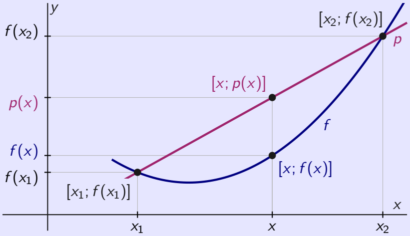
Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

$x_0 \in D(f)$ nazywamy **punktem przegięcia** f (f ma **przegięcie** w punkcie x_0),
jeśli istnieje takie otoczenie $O_\delta(x_0)$, że funkcja f:

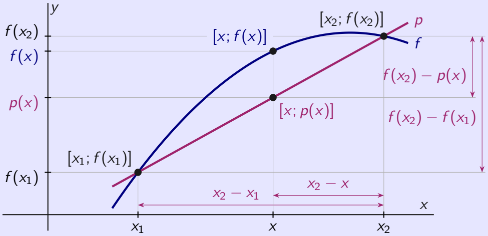
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ jest ściśle wypukła na } O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \\ \bullet\ f \text{ jest ściśle wklęsła na } O_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta) \end{array}\right\} \text{ lub } \left\{\begin{array}{l} f \text{ jest ściśle wklęsła na } O_\delta^-(x_0). \\ f \text{ jest ściśle wypukła na } O_\delta^+(x_0). \end{array}\right.$$

Funkcje

- Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ jest przedziałem, punkty $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
- Linia prosta $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ łączy punkty $[x_1; f(x_1)]$ i $[x_2; f(x_2)]$.



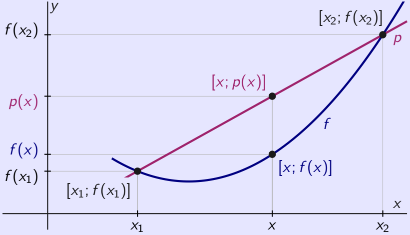
Funkcja wypukła.
$f(x) \leq p(x)$, $x_1 < x < x_2$



Funkcja wklęsła.
$f(x) \geq p(x)$, $x_1 < x < x_2$

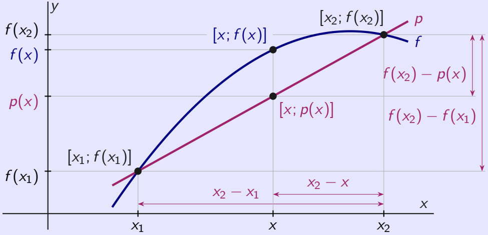
Funkcje

- Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ jest przedziałem, punkty $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
- Linia prosta $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ łączy punkty $[x_1; f(x_1)]$ i $[x_2; f(x_2)]$.



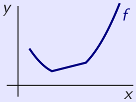
Funkcja wypukła.

$f(x) \leq p(x)$, $x_1 < x < x_2$

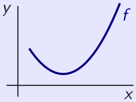


Funkcja wklęsła.

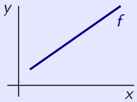
$f(x) \geq p(x)$, $x_1 < x < x_2$



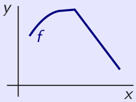
Wypukła



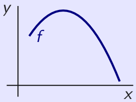
Ściśle wypukła



Wypukła i również wklęsła



Wklęsła



Ściśle wklęsła

Funkcje elementarne I

Funkcja elementarna nazywa się każdą utworzoną funkcją za pomocą skończonej liczby operacji arytmetycznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie) oraz złożenia (superpozycji) z z podstawowych funkcji elementarnych:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Wielomian stopnia n

$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ nazywa się **funkcją stałą**.
- $f_1\colon\ y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ nazywa się **funkcją liniową**.
- $f_2\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ nazywa się **funkcja kwadratowa**.

Funkcje elementarne I

Funkcja elementarna nazywa się każdą utworzoną funkcją za pomocą skończonej liczby operacji arytmetycznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie) oraz złożenia (superpozycji) z z podstawowych funkcji elementarnych:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Wielomian stopnia n

$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ nazywa się **funkcją stałą**.
- $f_1\colon\ y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ nazywa się **funkcją liniową**.
- $f_2\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ nazywa się **funkcja kwadratowa**.

Funkcje elementarne I

Funkcja wymierna

$f\colon\ y=\frac{f_n(x)}{f_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, gdzie f_n, f_m to wielomiany stopni $n, m\in N\cup\{0\}$.

Funkcja potęgowa

$f\colon\ y=x^r$, gdzie $r\in R$, $r\neq 0$.

Funkcja wykładnicza o podstawie $a>0$

$f\colon\ y=a^x$, $x\in R$.

- Najważniejszą z nich jest $f\colon\ y=\exp x=e^x$ z podstawą e (liczba Eulera).
- Wykres nazywa się **krzywą wykładniczą** i przechodzi przez punkty $[0;1]$ i $[1;a]$.
- Wykresy funkcji $y=a^x$, $y=a^{-x}$ są symetryczne wzdłuż osi y.

Funkcje elementarne I

Funkcja wymierna

$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, gdzie f_n, f_m to wielomiany stopni $n, m \in N \cup \{0\}$.

Funkcja potęgowa

$f\colon\ y = x^r$, gdzie $r \in R,\ r \neq 0$.

Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$

$f\colon\ y = a^x,\ x \in R.$

- Najważniejszą z nich jest $f\colon\ y = \exp x = e^x$ z podstawą e (liczba Eulera).
- Wykres nazywa się **krzywą wykładniczą** i przechodzi przez punkty $[0; 1]$ i $[1; a]$.
- Wykresy funkcji $y = a^x$, $y = a^{-x}$ są symetryczne wzdłuż osi y.

Funkcje elementarne I

Funkcja wymierna

$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, gdzie f_n, f_m to wielomiany stopni $n, m \in N \cup \{0\}$.

Funkcja potęgowa

$f\colon\ y = x^r$, gdzie $r \in R$, $r \neq 0$.

Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$

$f\colon\ y = a^x,\ x \in R.$

- Najważniejszą z nich jest $f\colon\ y = \exp x = \mathrm{e}^x$ z podstawą e (liczba Eulera).
- Wykres nazywa się **krzywą wykładniczą** i przechodzi przez punkty $[0;1]$ i $[1;a]$.
- Wykresy funkcji $y = a^x$, $y = a^{-x}$ są symetryczne wzdłuż osi y.

Funkcje elementarne I

Funkcja logarytmiczna o podstawie $a > 0,\ a \neq 1$

$$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty).$$

- Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$, $x \in \langle 0; \infty)$ jest odwrotna funkcji wykładniczej $y = a^x$, $x \in R$ o tej samej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Dla $a > 0$, $a \neq 1$ zachodzi: $x = a^{\log_a x}$ dla $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ dla $x \in R$.
- Wykres nazywa się krzywa logarytmiczna i przechodzi przez punkty $[1; 0]$ i $[a; 1]$.
- Wykresy funkcji $y = \log_a x$ i $y = \log_{a^{-1}} x$ są symetryczne wzdłuż osi x.
- $a = 10.$ $\Rightarrow$ Logarytm dziesiętny, oznaczenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}.$ $\Rightarrow$ logarytm naturalny, oznaczenie $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` i `log(x)` (logarytm naturalny) mają podstawę e.
- Jeśli chcemy obliczyć logarytm o innej podstawie, np. $\log_2 x$, musimy użyć następującej konstrukcji $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

Funkcje elementarne I

Funkcja logarytmiczna o podstawie $a > 0$, $a \neq 1$

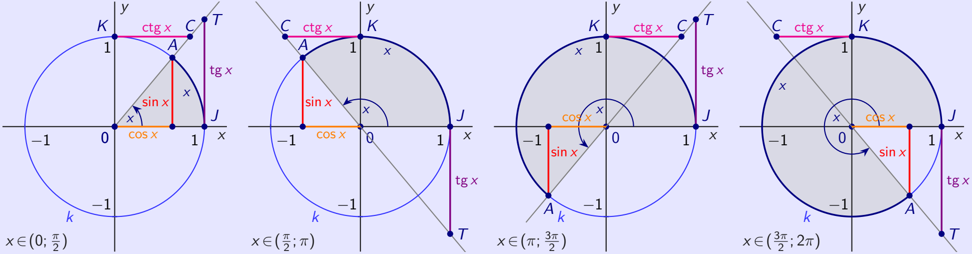
$$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty).$$

- Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$, $x \in \langle 0; \infty)$ jest odwrotna funkcji wykładniczej $y = a^x$, $x \in R$ o tej samej podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Dla $a > 0$, $a \neq 1$ zachodzi: $x = a^{\log_a x}$ dla $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ dla $x \in R$.
- Wykres nazywa się krzywa logarytmiczna i przechodzi przez punkty $[1; 0]$ i $[a; 1]$.
- Wykresy funkcji $y = \log_a x$ i $y = \log_{a^{-1}} x$ są symetryczne wzdłuż osi x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Logarytm dziesiętny, oznaczenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ logarytm naturalny, oznaczenie $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` i `log(x)` (logarytm naturalny) mają podstawę e.
- Jeśli chcemy obliczyć logarytm o innej podstawie, np. $\log_2 x$, musimy użyć następującej konstrukcji $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

Funkcje elementarne II

Funkcje trygonometryczne to:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Cosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\} \to R$.
- **Cotangens** $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{ k\pi, k \in Z \} \to R$.

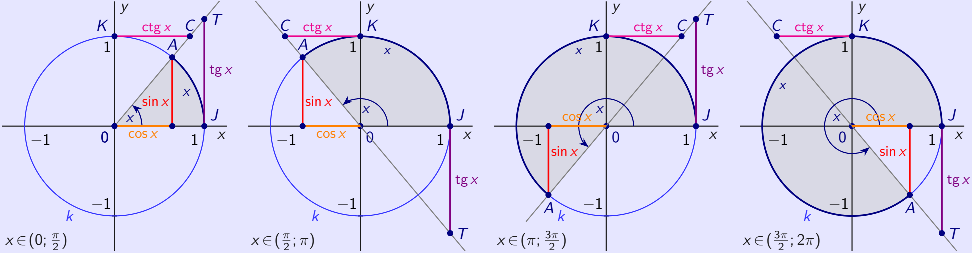


- Liczba π nazywa się **Ludolfa**. Jego wartość to około $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π. Okrąg z przerwąrom $r = 1$ ma obwód 2π.

Funkcje elementarne II

Funkcje trygonometryczne to:

- **Sinus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Cosinus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\} \to R$.
- **Cotangens** $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{k\pi, k \in Z\} \to R$.



- Liczba π nazywa się **Ludolfa**. Jego wartość to około $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π. Okrąg z przerwąrom $r = 1$ ma obwód 2π.

Funkcje elementarne II

- W Maximie funkcje trygonometryczne mają postać `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty funkcji trygonometrycznych muszą być podane w radianach.
- Jeśli chcemy używać stopni, musimy najpierw zamienić je na radiany.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
      ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

`rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125`

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Aby uprościć pracę z funkcjami trygonometrycznymi, możemy użyć poleceń `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` i pakiety `atrig1`, `ntrig` lub `spangl`, które obejmują dodatkowe wsparcie dla pracy z funkcjami trygonometrycznymi.
- Ładujemy pakiety do systemu za pomocą polecenia `load`.

Funkcje elementarne II

- W Maximie funkcje trygonometryczne mają postać `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty funkcji trygonometrycznych muszą być podane w radianach.
- Jeśli chcemy używać stopni, musimy najpierw zamienić je na radiany.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
      ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan\left(0.125\pi\right)$

```
rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125
```

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Aby uprościć pracę z funkcjami trygonometrycznymi, możemy użyć poleceń `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` i pakiety `atrig1`, `ntrig` lub `spangl`, które obejmują dodatkowe wsparcie dla pracy z funkcjami trygonometrycznymi.
- Ładujemy pakiety do systemu za pomocą polecenia `load`.

Funkcje elementarne II

Wzory sumowania dla sinusów i cosinusów. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Funkcje cyklometryczne są funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych:

- **Arcus sinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1\rangle \to \langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$.
- **Arcus cosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle$.
- **Arcus tangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- **Arcus cotangens** $y = \operatorname{arcctg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Nie ma funkcji odwrotnych dla funkcji trygonometrycznych, ponieważ nie są one iniekcyjne. Funkcje należy odpowiednio zawęzić.

Funkcje elementarne II

Wzory sumowania dla sinusów i cosinusów. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Funkcje cyklometryczne są funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych:

- **Arcus sinus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- **Arcus cosinus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arcus tangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arcus cotangens** $y = \operatorname{arcctg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Nie ma funkcji odwrotnych dla funkcji trygonometrycznych, ponieważ nie są one iniekcyjne. Funkcje należy odpowiednio zawęzić.

Funkcje elementarne II

- Funkcje cyklometryczne mają postać `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`.
- W tym miejscu możemy wspomnieć o funkcji `atan2(x,y)` zdefiniowanej relacją $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

(%i4) `asin(1);asin(1),numer;`
`acos(1);acos(1),numer;`

(%o1) $\frac{\pi}{2}$

(%o2) 1.570796326794897

(%o1) 0

(%o2) 0.0

(%i7) `atan2(2,4);atan(1/2);atan(1/2),numer;`

(%o5) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$

(%o6) $\operatorname{atan}(\frac{1}{2})$

(%o7) 0.463647609000806

Wzory sumowania dla funkcji cyklometrycznych.

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in R$.

Funkcje elementarne II

Funkcje hiperboliczne to:

- **Sinus hiperboliczny** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $R \to R$.
- **Cosinus hiperboliczny** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Tangens hiperboliczny** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Cotangens hiperboliczny** $y = \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Funkcje hiperboliczne mają podobne właściwości do funkcji trygonometrycznych.

wzory sumowania dla sinusów i cosinusów hiperbolicznych. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Funkcje elementarne II

Funkcje hiperboliczne to:

- **Sinus hiperboliczny** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $\quad R \to R$.
- **Cosinus hiperboliczny** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $\quad R \to \langle 1; \infty)$.
- **Tangens hiperboliczny** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $\quad R \to (-1; 1)$.
- **Cotangens hiperboliczny** $y = \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $\quad R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Funkcje hiperboliczne mają podobne właściwości do funkcji trygonometrycznych.

wzory sumowania dla sinusów i cosinusów hiperbolicznych. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Funkcje elementarne II

Formuła Moivre'a. $x \in R$, $n \in N$.

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$

- Funkcje hiperboliczne są `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` i do nich odwrotne funkcje hiperbolometryczne są `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

```
(%i4) sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1) sinh(x)
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 1.313035285499331
(%i8) asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5) asinh(x)
(%o6) 0
(%o7) 0
(%o8) 1.01844096363052
```

Funkcje elementarne II

Funkcje hiperbolometryczne (funkcje hiperboliczne odwrotne) są funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych:

- **Area sinus hiperboliczny**

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right): \quad R \to R.$$

- **Area cosinus hiperboliczny**

$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right): \quad \langle 1; \infty) \to \langle 0; \infty).$$

- **Area tangens hiperboliczny**

$$y = \operatorname{artgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}: \quad (-1; 1) \to R.$$

- **Area cotangens hiperboliczny**

$$y = \operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}: \quad R - \langle -1; 1\rangle \to R - \{0\}.$$

```
(%i3)  ash(x):=log(x+sqrt(x^2+1))$
       a:2$ asinh(a)-ash(a),numer;
(%o3)  0.0
```

Granica funkcji

- Badając funkcję, należy scharakteryzować jej lokalne właściwości w różnych przedziałach i wokół ważnych punktów.
- Funkcja f może nie być zdefiniowana w punkcie, wokół którego ją badamy.

Punkt $a \in R^*$ jest nazywany **punktem skupienia** zbioru $A \subset R$,
jeśli dla każdego Otoczenia $O(a)$ istnieje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Następująca definicja wykorzystująca ciągi nazywana jest definicja Heinego.

Funkcja f **ma granicę równą** $b \in R^*$ w punkcie $a \in R^*$, oznaczenie $\lim_{x \to a} f(x) = b$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.
- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ obowiązuje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Jeśli $\lim_{x \to a} f(x) = b$, wtedy istnieje (co najmniej jeden) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
i $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ trzyma.

Granica funkcji

- Badając funkcję, należy scharakteryzować jej lokalne właściwości w różnych przedziałach i wokół ważnych punktów.
- Funkcja f może nie być zdefiniowana w punkcie, wokół którego ją badamy.

Punkt $a \in R^*$ jest nazywany **punktem skupienia** zbioru $A \subset R$,
jeśli dla każdego Otoczenia $O(a)$ istnieje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Następująca definicja wykorzystująca ciągi nazywana jest definicja Heinego.

Funkcja f **ma granicę równą** $b \in R^*$ w punkcie $a \in R^*$, oznaczenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.
- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ obowiązuje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Jeśli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, wtedy istnieje (co najmniej jeden) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ trzyma.

Granica funkcji

Granicę można scharakteryzować za pomocą otoczenia $O(a)$ i $O(b)$.

Funkcja f **ma granicę równą** $b \in R^*$ w punkcie $a \in R^*$, oznaczenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.
- Dla każdego otoczenia $O(b)$ istnieje otoczenie $O(a)$ takie, że $f(x) \in O(b)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in O(a)$, $x \neq a$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b. \begin{cases} a \in R^*. & \begin{cases} a \in R. & \text{Granica w punkcie własnym } a. \\ a = \pm\infty. & \text{Granica w punkcie niewłasnym } \pm\infty. \end{cases} \\ b \in R^*. & \begin{cases} b \in R. & \text{Granica właściwa (skończona).} \\ b = \pm\infty. & \text{Granica niewłaściwa (nieskończona).} \end{cases} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, gdzie $a \in R^*$, $b \in R$.

$\Rightarrow$ • Istnieje $O(a)$, w którym funkcja f jest ograniczona.

Granica funkcji

Granicę można scharakteryzować za pomocą otoczenia $O(a)$ i $O(b)$.

Funkcja f ma granicę równą $b \in R^*$ w punkcie $a \in R^*$, oznaczenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $D(f)$.
- Dla każdego otoczenia $O(b)$ istnieje otoczenie $O(a)$ takie, że $f(x) \in O(b)$ obowiązuje dla wszystkich $x \in O(a)$, $x \neq a$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b. \begin{cases} a \in R^*. & \begin{cases} a \in R. & \text{Granica w punkcie własnym } a. \\ a = \pm\infty. & \text{Granica w punkcie niewłasnym } \pm\infty. \end{cases} \\ b \in R^*. & \begin{cases} b \in R. & \text{Granica właściwa (skończona).} \\ b = \pm\infty. & \text{Granica niewłaściwa (nieskończona).} \end{cases} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, gdzie $a \in R^*$, $b \in R$.

$\Rightarrow$ • Istnieje $O(a)$, w którym funkcja f jest ograniczona.

Granica funkcji

$a \in R^*$ jest punktem skupienia zbiorów $D(f)$ i $D(g)$, otoczenie $O(a)$.

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$:
- $f(x) = g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ jeśli istnieją.
- $f(x) \leq g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$ jeśli istnieją..

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$:
- $f(x) < g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$ jeśli istnieją..

Zdanie o dwóch policjantach.

$a \in R^*$ jest punktem skupienia zbiorów $D(f)$, $D(g)$ i $D(h)$, otoczenie $O(a)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in O(a),\ x \neq a\colon\ h(x) \leq f(x) \leq g(x). \\ \bullet\ \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b, \text{ gdzie } b \in R^*. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Istnieje } \lim_{x\to a} f(x) = b.$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

- ∞ jest punktem skupienia dziedziny $D(f) = R - \{0\}$ funkcje $f\colon\ y = \frac{\sin x}{x}$.
- $x > 0. \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \Rightarrow 0 = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

Granica funkcji

Granica funkcji złożonej.

Funkcje $y = f(x)$, $y = g(x)$, $H(f) \subset D(g)$, $a, b, c \in R^*$, $O(a)$ jest otoczenie.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u) = c. \\ \left.\begin{array}{r} \bullet\ \forall x \in O(a),\ x \neq a:\ f(x) \neq b, \\ \text{lub}\quad \bullet\ g(b) = c. \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c.$$

Substytucja $u = f(x)$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \left[\begin{array}{c} \text{Subst. } u = f(x) \\ x \to a,\ u \to b. \end{array}\right] = \lim\limits_{u\to b} g(u).$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $a, b, c \in R^*$, $r \in R$. $\Rightarrow$ (Jeśli wyrażenia mają sens.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b$.
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \circledast g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \circledast \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \circledast c$, gdzie $\circledast$ to odpowiednio $+$, $-$, $\cdot$ lub $/$.

Jeśli jedno z wyrażeń nie ma sensu, nie oznacza to, że granica nie istnieje.
Musimy obliczyć granicą w inny sposób.

Granica funkcji

Granica funkcji złożonej.

Funkcje $y=f(x)$, $y=g(x)$, $H(f)\subset D(g)$, $a,b,c\in R^*$, $O(a)$ jest otoczenie.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u)=c. \\ \bullet\ \forall x\in O(a),\ x\neq a\colon\ f(x)\neq b, \\ \qquad\qquad \text{lub}\ \ \bullet\ g(b)=c. \end{array}\right\} \Rightarrow\ \bullet\ \lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{u\to b} g(u)=c.$$

Substytucja $u=f(x)$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\left[\begin{array}{c}\text{Subst. } u=f(x)\\ x\to a,\ u\to b.\end{array}\right]=\lim\limits_{u\to b} g(u)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, $a,b,c\in R^*$, $r\in R$. $\Rightarrow$ (Jeśli wyrażenia mają sens.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} \left[r\cdot f(x)\right]=r\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=r\cdot b$.
- $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x)\circledast g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\circledast\lim\limits_{x\to a} g(x)=b\circledast c$, gdzie $\circledast$ to odpowiednio $+$, $-$, $\cdot$ lub $/$.

Jeśli jedno z wyrażeń nie ma sensu, nie oznacza to, że granica nie istnieje.
Musimy obliczyć granicą w inny sposób.

Granica funkcji

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in R$.

- $f^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x<a\}}$ Zawężenie funkcji f po lewej.
- $f^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a<x\}}$ Zawężenie funkcji f po prawej.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^-(x)$ Granica lewostronna.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^+(x)$ Granica prawostronna

Granica jednostronna funkcji f w punkcie a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ Granica (obustronna) funkcji f w punkcie a.

```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,x,0,plus);
      limit(1/x,x,0);
(%o1) -∞
(%o2) ∞
(%o3) infinity        /* Complex inf */
```

Jeśli $a \in R$, $b \in R^*$, to: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$.

Granica funkcji

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in R$.

- $f^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x<a\}}$ Zawężenie funkcji f po lewej.
- $f^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a<x\}}$ Zawężenie funkcji f po prawej.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^-(x)$ Granica lewostronna.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^+(x)$ Granica prawostronna

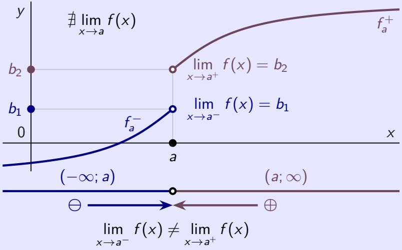
Granica jednostronna funkcji f w punkcie a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ Granica (obustronna) funkcji f w punkcie a.

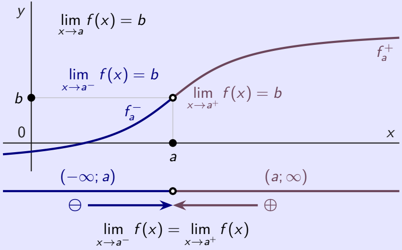
```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,x,0,plus);
      limit(1/x,x,0);
(%o1) -∞
(%o2) ∞
(%o3) infinity      /* Complex inf */
```

Jeśli $a \in R$, $b \in R^*$, to: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$.

Granica funkcji



Granice jednostronne

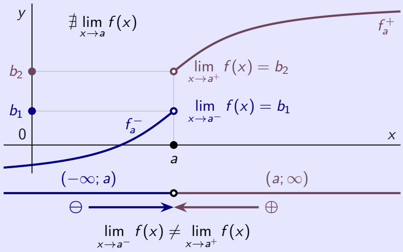


Granice obustronne

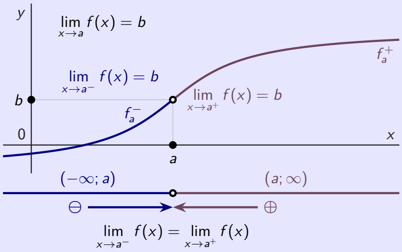
Ważne granice. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+bx} = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right) = \ln e = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1.$

Granica funkcji



Granice jednostronne



Granice obustronne

Ważne granice. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + bx} = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$

Granica funkcji

Podczas badania funkcji f ważne jest zbadanie jej właściwości w innych niż punkty własne:

- Dla $x \to \pm\infty$.
- W otoczeniu $O(a)$ punktów $a \in R$ gdzie $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in R$.

- Prosta linia $x = a$ nazywa się **asymptotą pionową** wykresu f, jeśli $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ (asymptota lewostronna) lub $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ (asymptota prawostronna) (co najmniej jedna z granic jest nieskończona).
- Prosta linia $y = kx + q$ nazywa się **asymptota ukośna** wykresu f,

  jeśli $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ lub $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Specjalnie asymptota $y = q$ nazywa się **asymptotą poziomą**,

tj. $k = 0$ i $\lim_{x \to -\infty} f(x) = q$ lub $\lim_{x \to \infty} f(x) = q$.

Granica funkcji

Podczas badania funkcji f ważne jest zbadanie jej właściwości w innych niż punkty własne:

- Dla $x \to \pm\infty$.
- W otoczeniu $O(a)$ punktów $a \in R$ gdzie $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in R$.

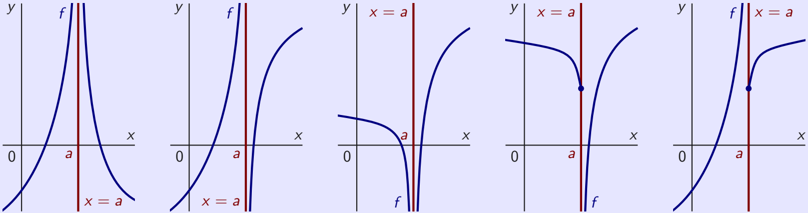
- Prosta linia $x = a$ nazywa się **asymptotą pionową** wykresu f, jeśli $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ (asymptota lewostronna) lub $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ (asymptota prawostronna) (co najmniej jedna z granic jest nieskończona).
- Prosta linia $y = kx + q$ nazywa się **asymptota ukośna** wykresu f,

  jeśli $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ lub $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

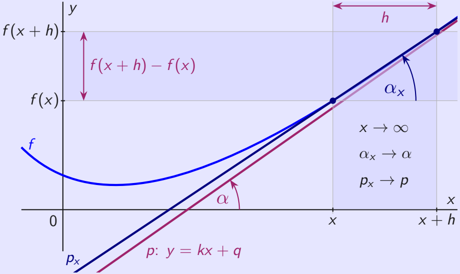
Specjalnie asymptota $y = q$ nazywa się **asymptotą poziomą**,

tj. $k = 0$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = q$ lub $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = q$.

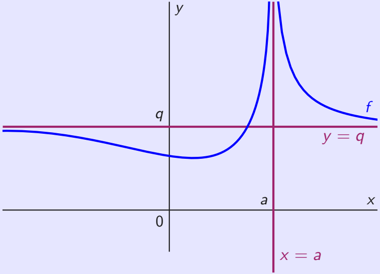
Granica funkcji



Przykłady asymptot pionowych



Asymptota ukośna z nachyleniem α.



Asymptota pionowa $y = q$.
Asymptota pozioma $x = a$.

Granica funkcji

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, gdzie $D(f)$ jest zbiorem nieograniczonym.

- Prosta linia $y = kx + q$ jest asymptotą asymptota wykresu f.

$\Leftrightarrow$ • Istnieje $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkcja $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Prosta linia $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ jest asymptotą ukośną z nachyleniem $\frac{1}{4}$.

Granica funkcji

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, gdzie $D(f)$ jest zbiorem nieograniczonym.

- Prosta linia $y = kx + q$ jest asymptotą asymptota wykresu f.

$\Leftrightarrow$ • Istnieje $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkcja $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Prosta linia $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ jest asymptotą ukośną z nachyleniem $\frac{1}{4}$.

Ciągłość funkcji

- Pojęcie granic funkcji f w punkcie a jest ze sobą ściśle powiązane z ciągłością funkcji f w punkcie a.
- Ciągłość jest również sprawą lokalną w jakimś otoczeniu $O(a)$.

Następująca definicja ciągłości wykorzystująca ciągi nazywana jest definicja Heinego.

Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$ jeśli:

- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ obowiązuje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

- Jeśli $a \in D(f)$ jest punktem izolowanym, to funkcja f jest ciągła w punkcie a.
(Wtedy istnieje pojedyncza $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.)

Ciągłość można scharakteryzować za pomocą otoczenia $O(a)$ i $O(f(a))$.

Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$ jeśli:

- Dla każdego otoczenia $O(f(a))$ istnieje otoczenie $O(a)$ takie, że
$f(x) \in O(f(a))$ obowiązuje dla wszystkich $x \in O(a)$, tj. $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Ciągłość funkcji

- Pojęcie granic funkcji f w punkcie a jest ze sobą ściśle powiązane z ciągłością funkcji f w punkcie a.
- Ciągłość jest również sprawą lokalną w jakimś otoczeniu $O(a)$.

Następująca definicja ciągłości wykorzystująca ciągi nazywana jest definicja Heinego.

Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$ jeśli:

- Dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ obowiązuje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

- Jeśli $a \in D(f)$ jest punktem izolowanym, to funkcja f jest ciągła w punkcie a.

  (Wtedy istnieje pojedyncza $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.)

Ciągłość można scharakteryzować za pomocą otoczenia $O(a)$ i $O(f(a))$.

Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$ jeśli:

- Dla każdego otoczenia $O(f(a))$ istnieje otoczenie $O(a)$ takie, że $f(x) \in O(f(a))$ obowiązuje dla wszystkich $x \in O(a)$, tj. $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Ciągłość funkcji

Jeśli $a \in D(f)$ jest punktem , wtedy definicja ciągłości pokrywa się z definicją granicy.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $a \in D(f)$ jest punktem skupienia $D(f)$.

- Funkcja f jest ciągła w punkcie a. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funkcje f, g są ciągłe w punkcie $a \in D(f) \cap D(g)$, $r \in R$.

$\Rightarrow$ • $|f|$, • $f \pm g$, • rf, • fg, • $\frac{f}{g}$ dla $g(a) \neq 0$ są ciągłe w punkcie a.

Ciągłość funkcji złożonej.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Funkcja } f \text{ jest ciągła w punkcie } a \in D(f). \\ \bullet \text{ Funkcja } g \text{ jest ciągła} \\ \qquad\qquad \text{w punkcie } b = f(a) \in D(g). \\ \bullet\ H(f) \subset D(g). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Funkcja } F = g(f) \text{ jest ciągła w punkcie } a.$$

Ciągłość funkcji

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in D(f)$.

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x\leq a\}}$ Zawężenie funkcji f po lewej.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a\leq x\}}$ Zawężenie funkcji f po prawej.

- $f_a^-(x)$ ciągła w punkcie a Ciągłość lewostronna.
- $f_a^+(x)$ ciągła w punkcie a Ciągłość prawostronna.

  Ciągłość jednostronna funkcje f w punkcie a.
- $f(x)$ ciągła w punkcie a (Obustronna) c funkcje f w punkcie a.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$.

- Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Istnieje $O(a)$, w którym f jest ograniczone.
- Funkcja f jest ciągła na zbiorze $A \subset D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Funkcja f nie musi być ograniczona na A.

Funkcja f nazywa się **ciągła na zbiorze** $A \subset D(f)$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $a \in A$.

Ciągłość funkcji

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in D(f)$.

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x\leq a\}}$ Zawężenie funkcji f po lewej.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a\leq x\}}$ Zawężenie funkcji f po prawej.

- $f_a^-(x)$ ciągła w punkcie a Ciągłość lewostronna.
- $f_a^+(x)$ ciągła w punkcie a Ciągłość prawostronna.

Ciągłość jednostronna funkcje f w punkcie a.

- $f(x)$ ciągła w punkcie a (Obustronna) c funkcje f w punkcie a.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $a \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$.

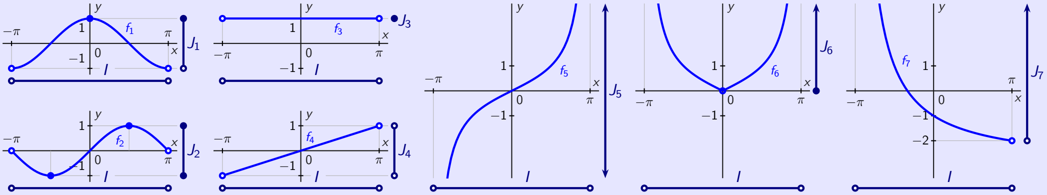
- Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Istnieje $O(a)$, w którym f jest ograniczone.
- Funkcja f jest ciągła na zbiorze $A \subset D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Funkcja f nie musi być ograniczona na A.

Funkcja f nazywa się **ciągła na zbiorze** $A \subset D(f)$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $a \in A$.

Ciągłość funkcji

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $I \subset R$, wtedy zbiór $f(I)$ jest przedziałem.

- $I = \langle a; b\rangle$ to przedział domknięty. $\Rightarrow$ • $f(I)$ jest przedziałem domkniętym.
- I nie jest przedziałem domkniętym. $\Rightarrow$ • $f(I)$ może być przedziałem dowolnego typu.



- $f_1(x) = \cos x$: $(-\pi; \pi) \to J_1 = (-1; 1\rangle$.
- $f_2(x) = \sin x$: $(-\pi; \pi) \to J_2 = \langle -1; 1\rangle$.
- $f_3(x) = 1$: $(-\pi; \pi) \to J_3 = \{1\}$.
- $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_4 = (-1; 1)$.
- $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $(-\pi; \pi) \to J_5 = (-\infty; \infty)$.
- $f_6(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$: $(-\pi; \pi) \to J_6 = \langle 0; \infty)$.
- $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_7 = (-2; \infty)$.

Ciągłość funkcji

Funkcja f może być nieciągła tylko w punkcie skupienia $a \in R$ (punkt nieciągłości).

- Usuwalna nieciągłość

  Istnieje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R,\ b \neq f(a)$.

- Nieusuwalna nieciągłość I. rodzaju

  Istnieć $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b^- \in R \\ \text{i } \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b^+ \in R \end{array}\right\}\ b^- \neq b^+.$

  Różnica $c = b^+ - b^-$ nazywana jest skokiem funkcji f w punkcie a.

- Nieusuwalna nieciągłość II. rodzaju

  Przynajmniej jeden $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \\ \text{lub } \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \end{array}\right\}$ nie istnieje lub jest nieskończony.

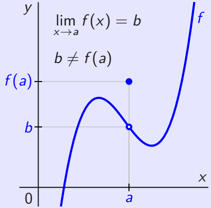
  Asymptotyczna nieciągłość, jeśli przynajmniej jedna z granic jednostronnych jest nieskończona.

Funkcja f jest nieciągła w punkcie $a \in R$.

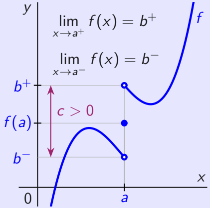
Wartość funkcji $f(a)$ może ale nie musi istnieć.

Ciągłość funkcji

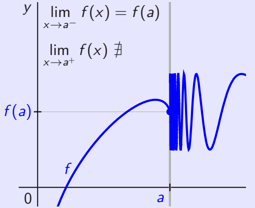
- Nieciągłość funkcji f w punkcie a.



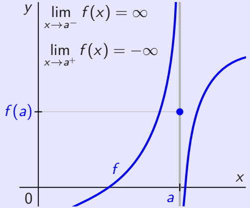
Usuwalna nieciągłość.



Nieusuwalna nieciągłość pierwszego rodzaju



Nieusuwalna nieciągłość drugiego rodzaju



Nieusuwalna nieciągłość drugiego rodzaju (asymptotyczna).

Twierdzenie Cauchy'ego o punkcie zerowym.

- Funkcja f jest ciągła na $\langle a; b\rangle$.
- $f(a)\cdot f(b) < 0$.

$\Rightarrow$ • Istnieje $c \in (a; b)$ takie, że $f(c) = 0$.

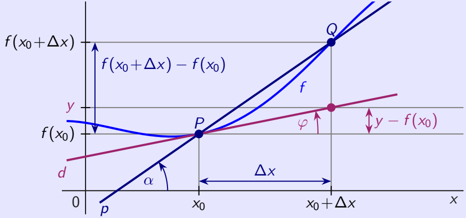
Rachunek różniczkowy

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest ciągła.

- Punkty $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leżą na wykresie f.
- Prosta linia PQ ma nachylenie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Styczna linia k f w punkcie P ma postać d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  gdzie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ to jego nachylenie.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0+\Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ zmierza do stycznej).
- Linia styczna ma nachylenie $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

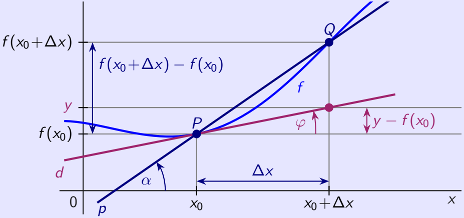
Geometryczne znaczenie pochodnej funkcji w punkcie.

– Nachylenie linii stycznej do wykresu f w punkcie.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest ciągła.

- Punkty $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leżą na wykresie f.
- Prosta linia PQ ma nachylenie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Styczna linia k f w punkcie P ma postać d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  gdzie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ to jego nachylenie.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ zmierza do stycznej).

- Linia styczna ma nachylenie $\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

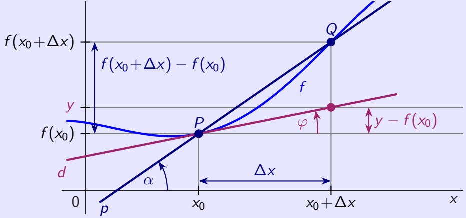
Geometryczne znaczenie pochodnej funkcji w punkcie.

– Nachylenie linii stycznej do wykresu f w punkcie.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest ciągła.

- Punkty $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ leżą na wykresie f.
- Prosta linia PQ ma nachylenie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Styczna linia k f w punkcie P ma postać d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  gdzie $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ to jego nachylenie.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ zmierza do stycznej).

- Linia styczna ma nachylenie $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometryczne znaczenie pochodnej funkcji w punkcie.

– Nachylenie linii stycznej do wykresu f w punkcie.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ ma **pochodną w punkcie** $x_0 \in D(f)$,

oznaczenie $f'(x_0)$, lub $y'(x_0)$ lub $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, lub $y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}$ przy użyciu różniczek,

jeśli istnieje • $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } & h = x - x_0 \\ x \to x_0, & h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

- $f'(x_0) \in R$. Właściwa (skończona)
- $f'(x_0) = \infty$ lub $f'(x_0) = -\infty$. Niewłaściwa (nieskończona)

$\Big\}$ pochodna f w punkcie x_0.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_o \in D(f)$.

- Istnieje $f'(x_0) \in R$ (skończona). $\Rightarrow$ • f jest ciągła w punkcie x_0.

Ciągłość funkcji f w punkcie x_0 nie gwarantuje istnienia $f'(x_0)$.

Funkcja f: $y = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

- Ale to nie istnieje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ ma **pochodną w punkcie** $x_0 \in D(f)$,

oznaczenie $f'(x_0)$, lub $y'(x_0)$ lub $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, lub $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ przy użyciu różniczek,

jeśli istnieje • $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst.} & h = x - x_0 \\ x \to x_0, & h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

- $f'(x_0) \in R$. Właściwa (skończona)
- $f'(x_0) = \infty$ lub $f'(x_0) = -\infty$. Niewłaściwa (nieskończona)

$\Big\}$ pochodna f w punkcie x_0.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_o \in D(f)$.

- Istnieje $f'(x_0) \in R$ (skończona). $\Rightarrow$ • f jest ciągła w punkcie x_0.

Ciągłość funkcji f w punkcie x_0 nie gwarantuje istnienia $f'(x_0)$.

Funkcja $f\colon\ y = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

- Ale to nie istnieje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Pochodna funkcji rzeczywistej

$f'(x_0)$ reprezentuje geometrycznie .

- $f'(x_0) \in R$. Styczna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ z nachyleniem $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ i f jest ciągła w punkcie x_0.
  Styczna d: $x = x_0$ bez nachylenia (pionowa).

Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Pochodna funkcji rzeczywistej

$f'(x_0)$ reprezentuje geometrycznie .

- $f'(x_0) \in R$. Styczna d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ z nachyleniem $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ i f jest ciągła w punkcie x_0.
  Styczna d: $x = x_0$ bez nachylenia (pionowa).

Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$.

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Pochodna lewostronna.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Pochodna prawostronna.

} Pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Obustronna) pochodna funkcji f w punkcie x_0.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset \{x_0 \in D(f), f'(x_0)$ jest skończona$\}$, $A \neq \emptyset$.

- Wtedy $y = f'(x)$, $x \in A$ jest funkcją i jest nazywana **pochodną** funkcji f na zbiorze A, oznaczenie $f' = \frac{df}{dx}$, lub $y' = \frac{dy}{dx}$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$.

- $\forall x_0 \in A$: $f'(x_0) \in R$ (pochodna skończona). $\Rightarrow$ • Funkcja f ciągła na zbiorze A.

Funkcja wykładnicza f: $y = e^x$, $x \in R$.

- $[e^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ dla wszystkich $x \in R$.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$.

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Pochodna lewostronna.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Pochodna prawostronna.

Pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Obustronna) pochodna funkcji f w punkcie x_0.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset \{x_0 \in D(f), f'(x_0)$ jest skończona$\}$, $A \neq \emptyset$.

- Wtedy $y = f'(x)$, $x \in A$ jest funkcją
  i jest nazywana **pochodną** funkcji f na zbiorze A, oznaczenie $f' = \frac{df}{dx}$, lub $y' = \frac{dy}{dx}$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, zbiór $A \subset D(f)$.

- $\forall x_0 \in A$: $f'(x_0) \in R$ (pochodna skończona). $\Rightarrow$ • Funkcja f ciągła na zbiorze A.

Funkcja wykładnicza f: $y = e^x$, $x \in R$.

- $[e^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ dla wszystkich $x \in R$.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Pochodne podstawowych funkcji elementarnych.

- $[c]' = 0$ dla $x \in R,\ c \in R$.
- $[x^n]' = nx^{n-1}$ dla $x \in R,\ n \in N$.
- $[e^x]' = e^x$ dla $x \in R$.
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ dla $x > 0$.
- $[\sin x]' = \cos x$ dla $x \in R$.
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z$.
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1; 1)$.
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in R$.
- $[\sinh x]' = \cosh x$ dla $x \in R$.
- $[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ dla $x \in R$.
- $[\operatorname{arsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ dla $x \in R$.
- $[\operatorname{artgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ dla $x \in (-1; 1)$.
- $[x]' = 1$ dla $x \in R$.
- $[x^a]' = ax^{a-1}$ dla $x > 0,\ a \in R$.
- $[a^x]' = a^x \ln a$ dla $x \in R,\ a > 0$.
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$ dla $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.
- $[\cos x]' = -\sin x$ dla $x \in R$.
- $[\operatorname{ctg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ dla $x \neq k\pi,\ k \in Z$.
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1; 1)$.
- $[\operatorname{arcctg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in R$.
- $[\cosh x]' = \sinh x$ dla $x \in R$.
- $[\operatorname{ctgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ dla $x \neq 0$.
- $[\operatorname{arcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ dla $x > 1$.
- $[\operatorname{arctgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ dla $x \in R - \langle -1; 1 \rangle$.

Ze względów praktycznych należy nauczyć się formuł na pamięć.

Pochodna funkcji rzeczywistej

W praktycznym obliczaniu pochodnej posługujemy się różnymi wzorami i regułami.

Reguły dla pochodnych.

Funkcje f, g mają pochodne f', g' na zbiorze $A \neq \emptyset$, punkt $x_0 \in A$, liczba $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ for $g(x_0) \neq 0$,

- $(cf)' = cf'$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcje f, g, h mają pochodne f', g', h' na zbiorze $A \neq \emptyset$.

- $[fgh]' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = [f'g + fg']h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcja f ma pochodną $f'(x) \neq 0$ na zbiorze $A \neq \emptyset$.

- $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Pochodna funkcji rzeczywistej

W praktycznym obliczaniu pochodnej posługujemy się różnymi wzorami i regułami.

Reguły dla pochodnych.

Funkcje f, g mają pochodne f', g' na zbiorze $A \neq \emptyset$, punkt $x_0 \in A$, liczba $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ for $g(x_0) \neq 0$,

- $(cf)' = cf'$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcje f, g, h mają pochodne f', g', h' na zbiorze $A \neq \emptyset$.

- $[fgh]' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = [f'g + fg']h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcja f ma pochodną $f'(x) \neq 0$ na zbiorze $A \neq \emptyset$.

- $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Pochodna funkcji odwrotnej.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in I$ jest bijekcją, $I \subset R$ to przedział, $x_0 \in I$ jest punktem wewnętrznym.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ jest ciągłe na } I. \\ \bullet\ f'(x_0) \neq 0 \text{ jest skończona.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Istnieje } [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\bigg|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Funkcja $f\colon\ y = e^x$, $x \in R$ jest ciągła i rosnąca, $f'(x) = e^x \neq 0$ dla $x \in R$.

- $f^{-1}\colon\ x = \ln y$, $y \in (0; \infty)$.
- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[e^x]'}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^x}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ dla $y \in (0; \infty)$.

Funkcja $f\colon\ y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ jest ciągła i rosnąca,

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0 \text{ dla } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

- $f^{-1}\colon\ x = \arcsin y$, $y \in (-1; 1)$.
- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\Big|_{x=\arcsin y}$
  $= \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ dla $y \in (-1; 1)$.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Pochodna funkcji odwrotnej.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in I$ jest bijekcją, $I \subset R$ to przedział, $x_0 \in I$ jest punktem wewnętrznym.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ jest ciągłe na } I. \\ \bullet\ f'(x_0) \neq 0 \text{ jest skończona.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Istnieje } [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Funkcja $f\colon\ y = e^x,\ x \in R$ jest ciągła i rosnąca, $f'(x) = e^x \neq 0$ dla $x \in R$.

- $f^{-1}\colon\ x = \ln y,\ y \in (0; \infty)$.
- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[e^x]'}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^x}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ dla $y \in (0; \infty)$.

Funkcja $f\colon\ y = \sin x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ jest ciągła i rosnąca,

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0 \text{ dla } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

- $f^{-1}\colon\ x = \arcsin y,\ y \in (-1; 1)$.
- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\Big|_{x=\arcsin y}$
  $= \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ dla $y \in (-1; 1)$.

Pochodna funkcji rzeczywistej

Pochodna funkcji złożonej.

Funkcje $u = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(u)$, $u \in D(g)$ takie, że $H(f) \subset D(g)$,
funkcja złożona $y = F(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_0 \in D(f),\ u_0 = f(x_0). \\ \bullet\ f'(x_0),\ g'(u_0) \text{ są skończone.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

- $[a^x]' = \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- $[x^a]' = \left[e^{\ln x^a}\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$, $x > 0$, $a \in R$.
- $[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x]$, $x > 0$.
- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in R$.

$x \in D(f)$, $f(x) > 0$, istnieje $f'(x)$. $\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
$\Rightarrow \bullet\ f'(x) = f(x) \cdot \left[\ln f(x)\right]'$ (Pochodna logarytmiczna funkcji f).

Pochodna funkcji rzeczywistej

Pochodna funkcji złożonej.

Funkcje $u = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(u)$, $u \in D(g)$ takie, że $H(f) \subset D(g)$,
funkcja złożona $y = F(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_0 \in D(f),\ u_0 = f(x_0). \\ \bullet\ f'(x_0),\ g'(u_0) \text{ są skończone.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

- $[a^x]' = \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- $[x^a]' = \left[e^{\ln x^a}\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$, $x > 0$, $a \in R$.
- $[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x]$, $x > 0$.
- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in R$.

$x \in D(f)$, $f(x) > 0$, istnieje $f'(x)$. $\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$\Rightarrow \bullet\ f'(x) = f(x) \cdot \left[\ln f(x)\right]'$ (Pochodna logarytmiczna funkcji f).

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

- Często musimy przybliżyć daną funkcję f inną prostszą funkcją g tak, aby różnica $|f(x) - g(x)|$ była jak najmniejsza.
- W większości przypadków **lokalne przybliżenie** w jakimś otoczeniu $O(x_0)$ punktu $x_0 \in D(f)$ jest wystarczające.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, skończona pochodna $f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0), & x \in R. \\ \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h, & h \in R. \end{array}\right\}$$ **Różniczka** funkcji f w punkcie x_0.

Wtedy funkcja f nazywa się **różniczkowalna** w punkcie x_0.

Funkcja f: $y = x$, $x \in R$, punkt $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$ (skończona).

- $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$ (skończona).

- $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, $h \in R$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, lub $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

- Często musimy przybliżyć daną funkcję f inną prostszą funkcją g tak, aby różnica $|f(x) - g(x)|$ była jak najmniejsza.
- W większości przypadków **lokalne przybliżenie** w jakimś otoczeniu $O(x_0)$ punktu $x_0 \in D(f)$ jest wystarczające.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, skończona pochodna $f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, x - x_0) & = f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R. \\ \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, h) & = f'(x_0) \cdot h,\ h \in R. \end{array}\right\}$$ **Różniczka** funkcji f w punkcie x_0.

Wtedy funkcja f nazywa się **różniczkowalna** w punkcie x_0.

Funkcja $f\colon\ y = x$, $x \in R$, punkt $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$ (skończona).

- $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h,\ h \in R.$

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$ (skończona).

- $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x,\ h \in R. \Rightarrow$
- $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, lub $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Najlepsze lokalne przybliżenie liniowe.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D(f)$.

- Aproksymacja funkcji f w otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 za pomocą stycznej $d\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0),\ x \in O(x_0)$ jest najlepszą ze wszystkich przybliżeń przy użyciu funkcji liniowej (linia prosta).

Oblicz przybliżoną liczbę $\sqrt[6]{1,06}$.

- Zaznaczmy $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Niech $O(1)$ będzie takie, że $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Dokładnie $\sqrt[6]{1.06} = 1,0097588$, błąd obliczeń $< 0,00025$.

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Najlepsze lokalne przybliżenie liniowe.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D(f)$.

- Aproksymacja funkcji f w otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 za pomocą stycznej $d\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ jest najlepszą ze wszystkich przybliżeń przy użyciu funkcji liniowej (linia prosta).

Oblicz przybliżoną liczbę $\sqrt[6]{1,06}$.

- Zaznaczmy $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Niech $O(1)$ będzie takie, że $1,06 \in O(1)$.

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}.$$

$$\Rightarrow \bullet\ \sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01.$$

Dokładnie $\sqrt[6]{1.06} = 1,0097588$, błąd obliczeń $< 0,00025$.

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

(%i9)
```
c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```
(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Zmienna `fpprintprec:8` ustawia wyjście na 8 cyfr.
Aproksymacja funkcji f ma sens tylko dla x blisko punktu x_0.

(%i18)
```
h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```
$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333

$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667

$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333

$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333

$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667

$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5

$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333

$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333

$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Zmienna `fpprintprec:8` ustawia wyjście na 8 cyfr.
Aproksymacja funkcji f ma sens tylko dla x blisko punktu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$ jest różniczkowalna, po tym (jeśli istnieją):

- $y = f'(x) = f^{(1)}(x)$, $x \in A_1 \subset D(f)$, $A_1 \neq \emptyset$.
  Pochodna pierwszego rzędu (pierwsza pochodna) f na zbiorze A_1.
- $y = [f'(x)]' = f''(x) = f^{(2)}(x)$, $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$.
  Pochodna drugiego rzędu (druga pochodna) f na zbiorze A_2.
- $y = [f''(x)]' = f'''(x) = f^{(3)}(x)$, $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$.
  Pochodna trzeciego rzędu (trzecia pochodna) f na zbiorze A_3. $\ldots$
- $y = [f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x)$, $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$.
  Pochodna rzędu n (n-ta pochodna) f na zbiorze A_n.

Specjalne: • $y = f(x) = f^{(0)}(x)$, $x \in D(f)$. Pochodna zerowa (0-ta pochodna) f.

n-ta pochodna funkcji f w punkcie $x_0 \in D(f)$ (jeśli istnieje):

- $f^{(n)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$, $x \in A_n$, $n \in N$.

Funkcja $f^{(n-1)}$ musi być zdefiniowana w jakimś otoczeniu $O(x_0)$.

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Obliczanie $f^{(n)}$, $n \in N$ może być ogólnie bardzo pracochłonne.

Funkcja $y = x^k$, $x \in R$, gdzie $k \in N$.

- $[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, $x \in R$ dla $n = 1, 2, \ldots, k$,
  $$[x^k]' = kx^{k-1},\ [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2},\ [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3},\ \ldots,\ [x^k]^{(k)} = k!.$$
- $[x^k]^{(n)} = 0$, $x \in R$ dla $n = k+1, k+2, k+3, \ldots,$
  $$[x^k]^{(k+1)} = [k!]' = 0,\ [x^k]^{(k+2)} = [x^k]^{(k+3)} = [0]' = 0,\ \ldots$$

```
(%i9) f(x,k):=x^k;fn(x,k,n):=diff(f(x,k),x,n)$
      fn(x,k,1);fn(x,k,2);fn(x,k,k);
      fn(x,5,1);fn(x,5,2);fn(x,5,5);fn(x,5,6);
```

(%o1) $f(x,k) := x^k$

(%o3) kx^{k-1}

(%o4) $(k-1)kx^{k-2}$

(%o5) $\frac{d^k}{dx^k}x^k$

(%o6) $5x^4$

(%o7) $20x^3$

(%o8) 120

(%o9) 0

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Funkcja $y = \mathrm{e}^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x$, $x \in R$ dla wszystkich $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Funkcja $y = \sin x$, $x \in R$.

- $[\sin x]' = \cos x$,
  $[\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x$,
  $[\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x$,
  $[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x$,
  $[\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ \ldots$
- $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)}$ dla $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\sin x]^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,
  $[\sin x]^{(2k-1)} = (-1)^{k+1} \cos x$, $k \in N$.

Funkcja $y = \cos x$, $x \in R$.

- $[\cos x]' = -\sin x$,
  $[\cos x]'' = [-\sin x]' = -\cos x$,
  $[\cos x]''' = [-\cos x]'' = \sin x$,
  $[\cos x]^{(4)} = [\sin x]''' = \cos x$,
  $[\cos x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = -\sin x, \ \ldots$
- $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)}$ dla $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\cos x]^{(2k)} = (-1)^k \cos x$,
  $[\cos x]^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x$, $k \in N$.

Formuła Leibniza.

Funkcje f, g mają pochodne na zbiorze A aż do rzędu $n \in N$ (włącznie).

- $[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$.

Różniczka funkcji i pochodne wyższych rzędów

Funkcja $y = e^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[e^x]^{(n)} = e^x$, $x \in R$ dla wszystkich $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Funkcja $y = \sin x$, $x \in R$.

- $[\sin x]' = \cos x$,
  $[\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x$,
  $[\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x$,
  $[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x$,
  $[\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ \ldots$
- $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)}$ dla $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\sin x]^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,
  $[\sin x]^{(2k-1)} = (-1)^{k+1} \cos x$, $k \in N$.

Funkcja $y = \cos x$, $x \in R$.

- $[\cos x]' = -\sin x$,
  $[\cos x]'' = [-\sin x]' = -\cos x$,
  $[\cos x]''' = [-\cos x]'' = \sin x$,
  $[\cos x]^{(4)} = [\sin x]''' = \cos x$,
  $[\cos x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = -\sin x, \ \ldots$
- $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)}$ dla $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\cos x]^{(2k)} = (-1)^k \cos x$,
  $[\cos x]^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x$, $k \in N$.

Formuła Leibniza.

Funkcje f, g mają pochodne na zbiorze A aż do rzędu $n \in N$ (włącznie).

- $[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$.

Aplikacje pochodnej funkcji

Twierdzenia o średniej wartości funkcji (Rolle'a, Lagrange'a) i reguła l'Hospitala należą do najczęstszych zastosowań pochodnej w praktyce.

Twierdzenie Rolle'a o wartości średniej.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Funkcja } f \text{ jest ciągła na } \langle a; b\rangle. \\ \bullet\ f(a) = f(b). \\ \bullet\ f'(x) \in R^* \text{ dla wszystkich } x \in (a; b). \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \text{Istnieje } c \in (a; b)\colon\ f'(c) = 0, \\ \qquad c = a + \theta(b-a), \text{ gdzie } \theta \in (0; 1). \end{array}$$

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (rachunek różniczkowy).

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Funkcja } f \text{ jest ciągła na } \langle a; b\rangle. \\ \bullet\ f'(x) \in R^* \text{ dla wszystkich } x \in (a; b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Istnieje } c \in (a; b)\colon\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Oznaczmy $b = a + h$, $h \in R$, dla wystarczająco małej h możemy założyć $a + \theta h \approx a$.

- $h = b - a$, $c = a + \theta(b-a) = a + \theta h$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(b) - f(a) = f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h) \cdot h$, $h \in R$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h) \cdot h \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + df(a, h)$.

Aplikacje pochodnej funkcji

Twierdzenia o średniej wartości funkcji (Rolle'a, Lagrange'a) i reguła l'Hospitala należą do najczęstszych zastosowań pochodnej w praktyce.

Twierdzenie Rolle'a o wartości średniej.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Funkcja } f \text{ jest ciągła na } \langle a;b\rangle.\\ \bullet\ f(a)=f(b).\\ \bullet\ f'(x)\in R^* \text{ dla wszystkich } x\in(a;b).\end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Istnieje } c\in(a;b)\colon\ f'(c)=0,\quad c=a+\theta(b-a),\ \text{gdzie } \theta\in(0;1).$$

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (rachunek różniczkowy).

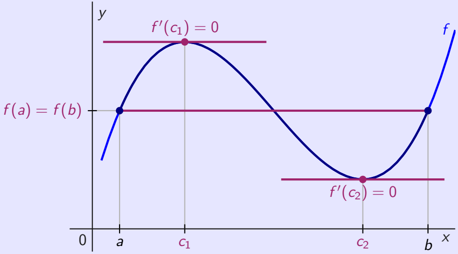
$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Funkcja } f \text{ jest ciągła na } \langle a;b\rangle.\\ \bullet\ f'(x)\in R^* \text{ dla wszystkich } x\in(a;b).\end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Istnieje } c\in(a;b)\colon\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

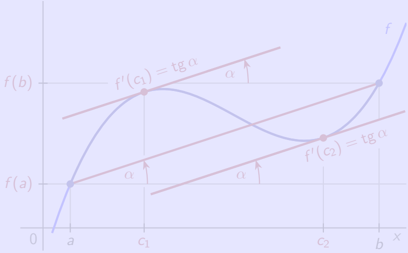
Oznaczmy $b=a+h$, $h\in R$, dla wystarczająco małej h możemy założyć $a+\theta h\approx a$.

- $h=b-a,\ c=a+\theta(b-a)=a+\theta h,\ \theta\in(0;1)$.
- $f(b)-f(a)=f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)\cdot h,\ h\in R,\ \theta\in(0;1)$.
- $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)\cdot h\approx f(a)+f'(a)h=f(a)+\mathrm{d}f(a,h)$.

Aplikacje pochodnej funkcji

Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a gwarantują istnienie $c \in (a; b)$.
Jednak nie możemy z nimi znaleźć takich punktów ani określić ich liczby.



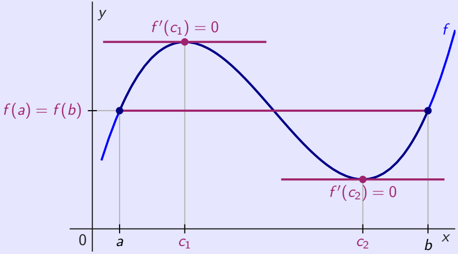


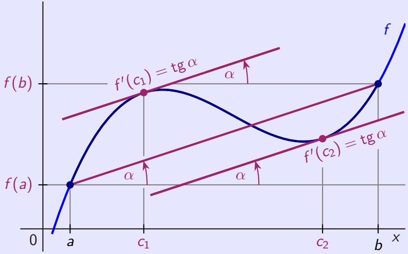
- $f'(c) = 0$
  oznacza, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie c jest równoległa do osi x.

- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  oznacza, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie c jest równoległa do prostej linie łączącej punkty $[a; f(a)]$ i $[b; f(b)]$, tj. $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$.

Aplikacje pochodnej funkcji

Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a gwarantują istnienie $c \in (a; b)$.
Jednak nie możemy z nimi znaleźć takich punktów ani określić ich liczby.





- $f'(c) = 0$
  oznacza, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie c jest równoległa do osi x.

- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  oznacza, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie c jest równoległa do prostej linie łączącej punkty $[a; f(a)]$ i $[b; f(b)]$, tj. $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$.

Aplikacje pochodnej funkcji

Wyrażenia nieokreślone typu $\frac{0}{0}$, lub $\frac{\infty}{\infty}$ są często obliczane przy użyciu reguły l'Hospitala.

Reguła L'Hospitala. Funkcje f, g, punkt $a \in R^*$, otoczenie $O(a)$.

- $f'(x) \in R^*$, $g'(x) \in R^*$ dla wszystkich $x \in O(a)$, $x \neq a$.
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ $[L'H\frac{\infty}{\infty}]$.

  lub • $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ $[L'H\frac{0}{0}]$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

Nie wynika to z istnienia $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ istnienie $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- Bardzo ważne jest zweryfikowanie wszystkich założeń reguły l'Hospitala.
- Słuszność założenia $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$ jest weryfikowany na bieżąco podczas obliczeń.
- Możemy też kilka razy z rzędu skorzystać z reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},\ k \in N.$$

Aplikacje pochodnej funkcji

Function $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
otoczenie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (skończone).

Wielomian Taylora stopnia n funkcji f w środku x_0 jest zdefiniowany jako

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Dla $x_0 = 0$ nazywa się to **wielomian Maclaurina**

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Oznaczmy $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0+h) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Reszta $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ wyraża błąd aproksymacji f używając $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, gdzie $\theta \in (0;1)$. (forma Lagrange'a).

Aplikacje pochodnej funkcji

Function $y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
otoczenie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (skończone).

Wielomian Taylora stopnia n funkcji f w środku x_0 jest zdefiniowany jako

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Dla $x_0 = 0$ nazywa się to **wielomian Maclaurina**

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Oznaczmy $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Reszta $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ wyraża błąd aproksymacji f używając $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, gdzie $\theta \in (0;1)$. (forma Lagrange'a).

Aplikacje pochodnej funkcji

Najlepsze lokalne przybliżenie przy użyciu wielomianów.

Aproksymacja f za pomocą $T_n(x)$ stopnia $n \in N$ w środku $x_0 \in D(f)$:

- Ma charakter lokalny w otoczeniu $O(x_0)$.
- Jest to najlepsze ze wszystkich przybliżeń wykorzystujących wielomiany stopnia n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \langle -1; \infty)$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$. • $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. • $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3} \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$. • $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[3]{1+x} \approx T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x \in O(0)$.

$\approx T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, $x \in O(0)$ z błędem $R_2(x)$.

$\approx T_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} = 1 + \frac{x}{3}$, $x \in O(0)$ z błędem $R_1(x)$.

Aplikacje pochodnej funkcji

Najlepsze lokalne przybliżenie przy użyciu wielomianów.

Aproksymacja f za pomocą $T_n(x)$ stopnia $n \in N$ w środku $x_0 \in D(f)$:

- Ma charakter lokalny w otoczeniu $O(x_0)$.
- Jest to najlepsze ze wszystkich przybliżeń wykorzystujących wielomiany stopnia n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \langle -1; \infty)$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3} \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$.

- $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[3]{1+x} \approx T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x \in O(0)$.

$\approx T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, $x \in O(0)$ z błędem $R_2(x)$.

$\approx T_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} = 1 + \frac{x}{3}$, $x \in O(0)$ z błędem $R_1(x)$.

Aplikacje pochodnej funkcji

Obliczamy wielomian Taylora $T_n(x)$ funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Ręczne różniczkowanie jest dość pracochłonne.

(%i2) `f(x):=sqrt(x^2+1)$ print("f(x)=", f(x), ", f'(x)=", diff(f(x),x), ", f''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,2)), ", f'''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,3)))$`

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

(%i3) `taylor(f(x),x,0,1);`

$1 + \cdots$

(%i4) `taylor(f(x),x,0,2);`

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

(%i5) `taylor(f(x),x,0,3);`

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

(%i6) `taylor(f(x),x,0,4);`

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$

(%i7) `taylor(f(x),x,0,18);`

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \frac{21x^{12}}{1024} + \frac{33x^{14}}{2048} - \frac{429x^{16}}{32768} + \frac{715x^{18}}{65536} + \cdots$

Badanie zachowania funkcji

Ważną częścią badania zachowania funkcji jest wyznaczenie przedziałów, na którym ta funkcja jest monotoniczna.

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f'(x) \in R$ (skończona).

Funkcja f jest na I

- rosnąca. $\Leftrightarrow$ Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje $f'(x) > 0$.
- malejąca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0$.
- niemalejąca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$.
- nierosnąca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$.
- stała. $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ jest punktem wewnętrznym $D(f)$, istnieje $f'(x_0)$.

- Funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

- Funkcja f może mieć ekstremum lokalne również w punkcie, gdzie pochodna nie istnieje.
- $f'(x_0) = 0$ nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego funkcji f w punkcie $x_0 \in D(f)$.

Badanie zachowania funkcji

Ważną częścią badania zachowania funkcji jest wyznaczenie przedziałów, na którym ta funkcja jest monotoniczna.

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f'(x) \in R$ (skończona).

Funkcja f jest na I

- rosnąca. $\Leftrightarrow$ Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje • $f'(x) > 0$.
- malejąca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) < 0$.
- niemalejąca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \geq 0$.
- nierosnąca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \leq 0$.
- stała. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) = 0$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ jest punktem wewnętrznym $D(f)$, istnieje $f'(x_0)$.

- Funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkcja f może mieć ekstremum lokalne również w punkcie, gdzie pochodna nie istnieje.
- $f'(x_0) = 0$ nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego funkcji f w punkcie $x_0 \in D(f)$.

Badanie zachowania funkcji

- Jeśli $f'(x_0) = 0$ zachodzi, to punkt $x_0 \in D(f)$ nazywa się **stacjonarny**.

Szukając ekstremów lokalnych funkcji f, musimy zbadać:

- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, dla których zachodzi $f'(x) = 0$.
- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, gdzie $f'(x)$ nie istnieje.

W poszukiwaniu ekstremum globalnego funkcji f musimy dodatkowo zbadać:

- Wszystkie punkty brzegowe $x \in D(f)$.

Warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, dla wszystkich $x \in O(x_0)$ istnieje $f'(x)$.

- $f'(x) > 0$ dla $x < x_0$ (rosnąca w lewo). $f'(x) < 0$ dla $x > x_0$ (malejąca w prawo). $\Rightarrow$ $f(x_0)$ jest właściwe maksimum lokalnym.
- $f'(x) < 0$ dla $x < x_0$ (malejąca w lewo) $f'(x) > 0$ dla $x > x_0$ (rosnąca w prawo) $\Rightarrow$ $f(x_0)$ jest właściwe minimum lokalnym.
- $f'(x) > 0$, lub $f'(x) < 0$ dla $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ $f(x_0)$ nie jest ekstremum.

Badanie zachowania funkcji

- Jeśli $f'(x_0) = 0$ zachodzi, to punkt $x_0 \in D(f)$ nazywa się **stacjonarny**.

Szukając ekstremów lokalnych funkcji f, musimy zbadać:

- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, dla których zachodzi $f'(x) = 0$.
- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, gdzie $f'(x)$ nie istnieje.

W poszukiwaniu ekstremum globalnego funkcji f musimy dodatkowo zbadać:

- Wszystkie punkty brzegowe $x \in D(f)$.

Warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, dla wszystkich $x \in O(x_0)$ istnieje $f'(x)$.

- $f'(x) > 0$ dla $x < x_0$ (rosnąca w lewo). $f'(x) < 0$ dla $x > x_0$ (malejąca w prawo). $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe maksimum lokalnym.
- $f'(x) < 0$ dla $x < x_0$ (malejąca w lewo) $f'(x) > 0$ dla $x > x_0$ (rosnąca w prawo) $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe minimum lokalnym.
- $f'(x) > 0$, lub $f'(x) < 0$ dla $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ nie jest ekstremum.

Badanie zachowania funkcji

Badając ekstrema lokalne funkcji, możemy również skorzystać z drugiej pochodnej.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in R - \{0\}$ (skończona niezerowa).

Jeśli $f'(x_0) = 0$ i
- $f''(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe maksimum lokalnym.
- $f''(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe minimum lokalnym.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $x \in R$.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $x \in R$. • $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = 1$ lub $x = 3$.
  $f''(1) = -6 < 0. \quad \Rightarrow f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2 > 0$ właściwe maximum lokalne.
  $f''(3) = 6 > 0. \quad \Rightarrow f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2 < 0$ właściwe minimum lokalne.

Jeśli $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, to funkcja f może mieć ekstremum w punkcie x_0 lub nie.

- Funkcja $f(x) = x^3$, $x \in R$ nie ma ekstremum $f(0) = 0$ w punkcie $x = 0$.
  $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'(0) = f''(0) = 0$.
  $[x^3 < f(0) = 0$ dla $x < 0$ a $x^3 > f(0) = 0$ dla $x > 0.]$
- Funkcja $f(x) = x^4$, $x \in R$ ma właściwe minimum lokalne $f(0) = 0$ w punkcie $x = 0$.
  $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'(0) = f''(0) = 0$. $[x^4 > f(0) = 0$ dla wszystkich $x \neq 0.]$

Badanie zachowania funkcji

Badając ekstrema lokalne funkcji, możemy również skorzystać z drugiej pochodnej.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in R - \{0\}$ (skończona niezerowa).

Jeśli $f'(x_0) = 0$ i
- $f''(x_0) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe maksimum lokalnym.
- $f''(x_0) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ jest właściwe minimum lokalnym.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $x \in R$.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $x \in R$. • $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow x = 1$ lub $x = 3$.
  $f''(1) = -6 < 0$. $\Rightarrow f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2 > 0$ właściwe maximum lokalne.
  $f''(3) = 6 > 0$. $\Rightarrow f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2 < 0$ właściwe minimum lokalne.

Jeśli $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, to funkcja f może mieć ekstremum w punkcie x_0 lub nie.

- Funkcja $f(x) = x^3$, $x \in R$ nie ma ekstremum $f(0) = 0$ w punkcie $x = 0$.
  $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'(0) = f''(0) = 0$.
  [$x^3 < f(0) = 0$ dla $x < 0$ a $x^3 > f(0) = 0$ dla $x > 0$.]
- Funkcja $f(x) = x^4$, $x \in R$ ma właściwe minimum lokalne $f(0) = 0$ w punkcie $x = 0$.
  $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'(0) = f''(0) = 0$. [$x^4 > f(0) = 0$ dla wszystkich $x \neq 0$.]

Badanie zachowania funkcji

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f'(x) \in R$ (skończona).

f jest na I	• wypukła.	$\Leftrightarrow$	f' jest na I	• niemalejąca.
	• wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• nierosnąca.
	• ściśle wypukła.	$\Leftrightarrow$		• rosnąca.
	• ściśle wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• malejąca.

Funkcja f jest ciągła na przedziale I, dla wszystkich $x \in I$ istnieje $f''(x) \in R$ (skończona).

f jest na I	• wypukła.	$\Leftrightarrow$	Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje	• $f''(x) > 0$.
	• wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) < 0$.
	• ściśle wypukła.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \geq 0$.
	• ściśle wklęsła.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \leq 0$.

Badając wypukłość i wklęsłość funkcji f, musimy zbadać:

- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, gdzie funkcja f jest ciągła i dla której istnieje $f''(x) = 0$.
- Wszystkie punkty $x \in D(f)$, gdzie funkcja f jest ciągła i gdzie $f''(x)$ nie istnieje.

Badanie zachowania funkcji

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ jest punktem wewnętrznym $D(f)$, istnieje $f'(x_0)$.

- x_0 jest punktem przegięcia funkcji f. $\Rightarrow$ • $f''(x_0) = 0$.

- Funkcja f może mieć przegięcie w punkcie, w którym druga pochodna nie istnieje.

Warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego.

Funkcja $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$, dla wszystkich $x \in O(x_0)$ istnieje $f''(x)$.

- $\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0 \text{ dla } x < x_0 \text{ (wypukła w lewo).} \\ f''(x) < 0 \text{ dla } x > x_0 \text{ (wklęsła w prawo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • x_0 jest punktem przegięcia f.
- $\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ dla } x < x_0 \text{ (wklęsła w lewo).} \\ f''(x) > 0 \text{ dla } x > x_0 \text{ (wypukła w prawo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • x_0 jest punktem przegięcia f.
- $f''(x) > 0$, lub $f''(x) < 0$ dla $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • x_0 nie jest punktem przegięcia f.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \in R$.

- $f'''(x_0) \neq 0$ (niezerowa). $\Rightarrow$ • x_0 jest punktem przegięcia f.

Badanie zachowania funkcji

Możemy uogólnić poprzednie wyniki.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k-1$, $k \in N$ (nieparzysta).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f rosnąca w punkcie x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f malejąca w punkcie x_0.

  $f(x_0)$ nie jest ekstremum.
- $n = 2k$, $k \in N$ (parzysta).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ to właściwe minimum lokalne.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ to właściwe maksimum lokalne.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, punkt $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k+1$, $k \in N$ (nieparzysta).
  - x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.
- $n = 2k$, $k \in N$ (párne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f jest ściśle wypukła w punkcie x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f jest ściśle wklęsła w punkcie x_0.

Zachowanie funkcji

Zbadanie zachowania funkcji f oznacza wyznaczenie:

- Dziedzina $D(f)$, punkty i przedziały ciągłości i nieciągłości.
- Parzystość, nieparzystość, okresowość lub inne specjalne właściwości.
- Granice jednostronne w punktach nieciągłości, punktach granicznych i punktach $\pm\infty$.
- Punkty zerowe, przedziały, w których f jest dodatnie i ujemne.
- f', punkty stacjonarne, ekstrema lokalne i globalne, przedziały, w których f rośnie, maleje i jest stała.
- f'', punkty przegięcia, przedziały, w których f jest wypukła i wklęsła.
- Asymptoty (pionowa, ukośna z nachyleniem, pozioma).
- Przeciwdziedziną $H(f)$ i naszkicuj wykres funkcji.

  Wykres zwykle daje nam najlepsze wyobrażenie o zachowaniu funkcji. Podczas jego budowy wykorzystujemy wszystkie znalezione dane.

  Ale często są one niewystarczające, więc musimy je uzupełniać odpowiednio dobrane wartości użytkowe.

Całka nieoznaczona

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Podstawowe pojęcia

- Wprowadzenie pojęcia pochodnej motywowaliśmy zadaniem wyznaczenia prędkości chwilowej punktu masy, który porusza się po linii prostej.
- Możemy odwrócić problem i poszukać ścieżki punktu masy pod warunkiem, że znamy jego prędkość chwilową w danym czasie.

Funkcja $f(x)$, $x \in I$ jest zdefiniowana na przedziale otwartym $I \subset R$.
Funkcja $F(x)$, $x \in I$ nazywa się **funkcja pierwotna** (dla) funkcji $f(x) naprzedziale I$, jeśli dla wszystkich $x \in I$ istnieje pochodna $F'(x)$ i dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje $F'(x) = f(x)$.

Funkcja $F(x)$ jest pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale I, $c \in R$ (stała).

$\Rightarrow$ • Funkcja $G(x) = F(x) + c$ jest pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale I.

- Z definicji wynika, że funkcja pierwotna F jest ciągła na przedziale I.

Funkcje $F(x)$, $G(x)$ są pierwotne funkcji $f(x)$ na przedziale I.

$\Rightarrow$ • Funkcja $(F - G)(x) = F(x) - G(x)$ jest stała w przedziale I.

Podstawowe pojęcia

- Wprowadzenie pojęcia pochodnej motywowaliśmy zadaniem wyznaczenia prędkości chwilowej punktu masy, który porusza się po linii prostej.
- Możemy odwrócić problem i poszukać ścieżki punktu masy pod warunkiem, że znamy jego prędkość chwilową w danym czasie.

Funkcja $f(x)$, $x \in I$ jest zdefiniowana na przedziale otwartym $I \subset R$.
Funkcja $F(x)$, $x \in I$ nazywa się **funkcja pierwotna** (dla) funkcji $f(x) naprzedziale$I, jeśli dla wszystkich $x \in I$ istnieje pochodna $F'(x)$ i dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje $F'(x) = f(x)$.

Funkcja $F(x)$ jest pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale I, $c \in R$ (stała).

$\Rightarrow$ • Funkcja $G(x) = F(x) + c$ jest pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale I.

- Z definicji wynika, że funkcja pierwotna F jest ciągła na przedziale I.

Funkcje $F(x)$, $G(x)$ są pierwotne funkcji $f(x)$ na przedziale I.

$\Rightarrow$ • Funkcja $(F - G)(x) = F(x) - G(x)$ jest stała w przedziale I.

Podstawowe pojęcia

Wszystkie funkcje pierwotne dla danej funkcji $f(x)$, $x \in I$ na interwale I różnią się od siebie o stałą i tworzą zbiór $\{F(x) + c, c \in R\}$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną.
Ten zbiór nazywa się **całka nieoznaczona funkcji** f **na przedziale** I i jest oznaczony

- $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

$f(x)$, $x \in I$ jest ciągła w przedziale I.

$\Rightarrow$ • Istnieje $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Polecenie `integrate` służy do całkowania.

```
(%i1) 'integrate(1/(1+x^2),x)
```

(%o1) $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Podstawowe pojęcia

```
(%i1) f(x):=1/(1-x^2); integrate(f(x),x);
```

(%o1) $\frac{1}{1-x^2}$

(%o2) $\frac{\log(x+1)}{2} - \frac{\log(x-1)}{2}$

- Różniczkowanie i całkowanie to operacje odwrotne na przedziale I.

Funkcja F jest pierwotna funkcji f na przedziale I, $c \in R$.

Dla wszystkich $x \in I$ obowiązuje:

- $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$
- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$

```
(%i1) integrate(1/(1+x^2),x);
```

(%o1) $\operatorname{atan} x$

```
(%i2) diff(%,x);
```

(%o2) $\frac{1}{x^2+1}$

Podstawowe pojęcia

Całki nieoznaczone podstawowych funkcji elementarnych. (pierwsza część)

- $\displaystyle\int dx = \int 1\,dx = x + c$ dla $x \in R$.
- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ dla $a \neq -1$, $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ dla $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$ dla $f(x) \neq 0$.
- $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ dla $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$ $x \neq \frac{k\pi}{a}$, $k \in Z$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$, $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}$, $k \in Z$.
- $\displaystyle\int \sinh ax\,dx = \frac{\cosh ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \cosh ax\,dx = \frac{\sinh ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{ctgh} ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c$ dla $a \neq 0$, $x \in R$.

Podstawowe pojęcia

Całki nieoznaczone podstawowych funkcji elementarnych. (druga część)

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + c_2,$ dla $a \neq 0,\ x \in R.$
- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$ dla $a \neq 0,\ x \in R - \{a\}.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + c_1 = -\arccos\frac{x}{|a|} + c_2,$ dla $a > 0,\ x \in (-a; a).$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c,$ dla $a > 0,\ x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty).$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c,$ dla $a > 0,\ x \in R.$

- W tabelach przedstawiono podstawowe wzory całkowania.
- Wzory te są ściśle związane ze wzorami na pochodne funkcji elementarnych.
- Ze względów praktycznych konieczne jest ich zapamiętanie.

Metody całkowania

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c,\ x \in R.$ (całka z tabeli).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2+1),x);
(%o1) asinh x
```

- Oba wyniki są poprawne, ponieważ area sinus hiperboliczny jest zdefiniowany jako $y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in R$ (patrz funkcje elementarne).

Metoda rozkładu.

Funkcje F, G są pierwotne funkcji f, g na przedziale I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$.

$\Rightarrow$ $aF + bG$ jest pierwotna funkcji $af + bg$ na przedziale I i obowiązuje:

- $\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx = aF(x) + bG(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- W praktyce piszemy bezpośrednio $\int [af(x) + bg(x)]\, dx = aF(x) + bG(x) + c.$

Metody całkowania

Całkowanie przez części.

Funkcje u, v mają ciągłe pochodne u', v' na przedziale I.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$

• $[uv]' = u'v + uv'$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle uv = \int [uv]' = \int u'v + \int uv'$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v$.

- Metodę całkowania przez części możemy zastosować kilka razy pod rząd, ale musimy uważać, aby nie powrócić do pierwotnej całki przez ponowne użycie.
- Metodę jest stosowana dość często. Nadaje się do integracji funkcji

$$P(x)\,\mathrm{e}^{ax}, \quad P(x)\cos ax, \quad P(x)\sin ax, \quad P(x)\ln Q(x), \quad P(x)\,\mathrm{arctg}\,Q(x),$$

gdzie $P(x)$, $Q(x)$ to wielomiany rzeczywiste, $a \in R$, $a \neq 0$.

• $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

Metody całkowania

Całkowanie przez podstawienie.

Funkcja F jest pierwotna funkcji f na przedziale I,

$x = \varphi(t)$ ma pochodną na przedziale J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow F\big(\varphi(t)\big)$ jest pierwotna funkcji $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J i obowiązuje:

- $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c,\ t \in J,\ c \in R.$

I, J to przedziały, $x = \varphi(t) : J \to I$ ma pochodną $\varphi'(t) \neq 0$ na J,

Funkcja $F(t)$ jest pierwotna funkcji $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ jest pierwotna funkcji $f(x)$ na przedziale I i obowiązuje:

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- W pierwszym przypadku nie musimy stosować podstawienia odwrotnego, ale w drugim przypadku musimy użyć podstawienia odwrotnego $t = \varphi^{-1}(x)$.

Metody całkowania

- $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

- $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' = \frac{1}{x} & \\ v' = \frac{1}{x} & & v & = \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

  (Równanie z całką jako nieznanym parametrem.)

  $\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + 2c. \Rightarrow$ • $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x > 0,\ c \in R.$

$f(x)$ ma na przedziale I funkcję pierwotną $F(x)$, liczbę rzeczywistą $a, b \in R$, $a \neq 0$.

- $\int f(at+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = at + b \\ \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t \end{array} \right] = \int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c.$

- $\int f(t+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = t + b \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right] = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F(t+b) + c$ dla $a = 1$.

- $\int f(-t)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = -t \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array} \right] = -\int f(x)\,\mathrm{d}x = -F(x) + c = -F(-t) + c$ dla $a = -1$.

Metody całkowania

Podczas całkowania często łączone są różne metody i często muszą być używane kilka razy z rzędu.

Jeśli użyjemy różnych metod całkowania, możemy obliczyć różne funkcje pierwotne.
(Możemy zweryfikować poprawność rozwiązania, np. przez różniczkowanie.)

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\,dt,\ \ (\sin t)' = \cos t > 0 \text{ dla } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$
$$= \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = \int dt = t + c = \arcsin x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\,dt,\ \ -(\cos t)' = \sin t > 0 \text{ dla } t \in (0; \pi) \\ t = \arccos x & t \in (0; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right]$$
$$= \int \frac{-\sin t\,dt}{\sin t} = -\int dt = -t + c = -\arccos x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.$$

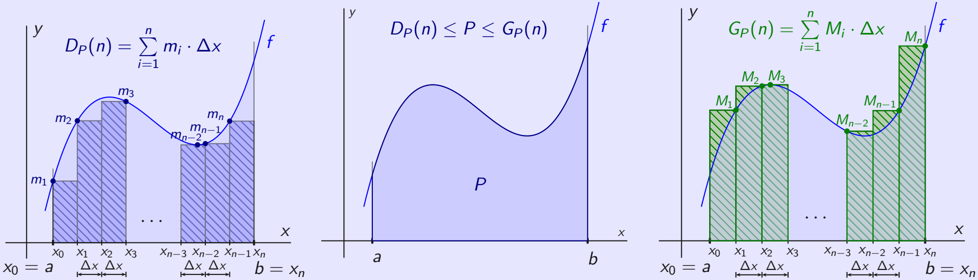
Oba rozwiązania są poprawne, ponieważ dla wszystkich $x \in \langle -1; 1 \rangle$ obowiązuje:
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, tj. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.
(Wszystkie funkcje pierwotne dla danej funkcji w przedziale różnią się o stałą.)

Całka oznaczona

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

Podstawowe pojęcia

- W tej sekcji zajmiemy się **całką funkcji**, która w przeciwieństwie do całki nieoznaczonej nie jest funkcją, ale określoną wartością (liczbą lub $\pm\infty$).
- Całkę oznaczoną możemy zdefiniować na kilka sposobów.
- Definiujemy to za pomocą sum częściowych i nazywamy to **całka Riemanna** (**oznaczona**).



Trapez krzywoliniowy P określony przez nieujemną funkcję f na przedziale $\langle a; b\rangle$ i jego przybliżenie za pomocą sum D_P i G_P

Podstawowe pojęcia

Funkcja $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ jest dodatnią ciągłą, punkty $a, b \in R$, $a < b$.

Wyznacz pole zawartości zbioru $P = \{[x; y] \in R^2, x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

- Podzielmy $\langle a; b\rangle$ używając punktów $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $n \in N$ na n podprzedziałach $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, $\langle x_2; x_3\rangle$, $\ldots$, $\langle x_{n-2}; x_{n-1}\rangle$, $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ tej samej długości $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$.
- $m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wtedy dla zbioru P obowiązuje:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x = D_P(n) \leq P \leq G_P(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x.$$

- Jeśli zmniejszymy Δx (zwiększamy n), oszacowania D_P, G_P poprawią się (nie pogorszą).
- Dla $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$, tj. $n\infty$ będzie obowiązywać (Zobacz następny slajd.)

$$\text{(z dołu)} \qquad D_P(n) \to P \leftarrow G_P(n) \qquad \text{(z góry)}.$$

Podstawowe pojęcia

Przedział $\langle a; b\rangle$ nie jest zdegenerowany, funkcja $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ jest ograniczona.

- **Podział przedziału** $\langle a; b\rangle$ nazywamy dowolnym skończonym zbiorem punktów
$$D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \ \ n \in N,$$
dla których $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
- x_0, x_1, ..., x_n nazywamy **punktami podziału** (jednoznacznie określają podział D).
- Długości przedziałów $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ oznaczamy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Długość najdłuższego z tych przedziałów nazywamy **normę podziału** D i oznaczamy $\mu(D)$, tj. $\mu(D) = \max\{\Delta x_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$.
- Dla sumy długości przedziałów d_1, d_2, ..., d_n obowiązuje
$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = x_n - x_0 = b - a.$$
- Zbiór wszystkich podziałów $\langle a; b\rangle$ oznaczamy $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D,\ D \text{ jest } \langle a; b\rangle\}$.
- $m_i = \inf\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $\quad M_i = \sup\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- **Dolna** $S_D(f, D)$ i **górna suma Riemanna** $S_G(f, D)$ funkcje f w podziałe D nazywane są liczbami $S_D(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$ i $S_G(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$.

Podstawowe pojęcia

- Liczby
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\},\ \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_G(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$$
nazywamy **dolną** i **górną całką** Riemanna (oznaczoną) f na przedziale $\langle a; b\rangle$ (od a do b).
- Te liczby **zawsze istnieją** i mają zastosowanie
$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a),$$
podczas gdy $m = \inf\{f(x),\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x),\ x \in \langle a; b\rangle\}$.
- Jeśli zachodzi równość między dolną i górną całką Riemanna, to ta wartość
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$
nazywamy **całką Riemanną (oznaczoną) funkcji** f **na przedziale** $\langle a; b\rangle$.

  Funkcję f nazywamy funkcję f **całkowalną w sensie Riemanna (R-całkowalną)** na $\langle a; b\rangle$ i oznaczmy $f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

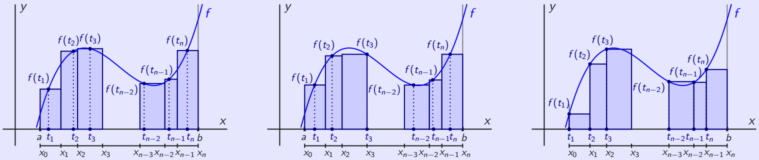
Podstawowe pojęcia

Zmienna integracyjna nie ma wpływu i zamiast x możemy napisać dowolny symbol.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

- **Suma częściowa (całkowa) Riemanna** funkcji f przy podziałe D i wybóre punktów T, podczas gdy $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \{t_i,\ t_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ nazywamy liczbą
$$S_T(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i.$$
- Funkcja f ma nieskończenie wiele sum dla danego podzialu D. Jeśli $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ jest ciągła, wtedy uzyskuje swoje ekstrema w $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

  $S_D(f, D)$, $S_G(f, D)$ reprezentują sumy częściowe Riemanna przy wybóre punktów T.



Suza częściowe (całkowe) Riemanna funkcji f przy podziale D i różne wybory punktów T

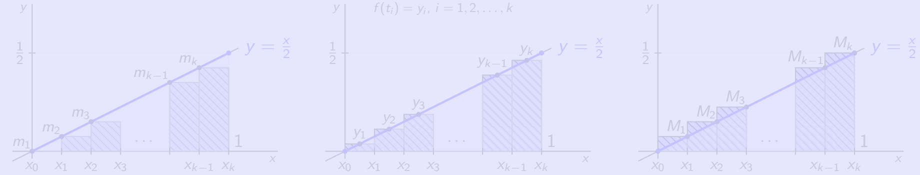
Podstawowe pojęcia

- Badając funkcję całkowalną Riemanna f na $\langle a;b\rangle$, nie potrzebujemy każdego podziału $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Po prostu ogranicz się do **normalnych ciągów podzialow** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. dla których obowiązuje $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Następnie dla każdego wyboru punktów T obowiązuje

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad$ $S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad$ $S_G(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (następna strona).

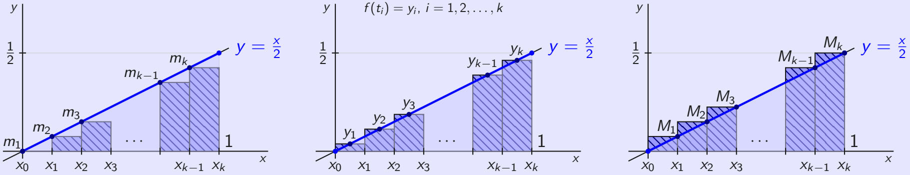
Podstawowe pojęcia

- Badając funkcję całkowalną Riemanna f na $\langle a; b\rangle$, nie potrzebujemy każdego podziału $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Po prostu ogranicz się do **normalnych ciągów podzialow** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, tj. dla których obowiązuje $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Następnie dla każdego wyboru punktów T obowiązuje

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,dx.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_G(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}=\frac{1}{4}$ (następna strona).

Podstawowe pojęcia

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}$. Funkcja $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0;1\rangle$ jest rosnąca ciągła, $f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

- Normalny ciąg podzialow $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, podczas gdy $D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}$ dla $k \in N$.
- Dla $i = 1, 2, \ldots, k$ obowiązuje $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$.

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2} = \frac{\frac{(0+k-1)k}{2}}{2k^2} = \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4k}.$$

$$S_G(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k^2} = \frac{\frac{(1+k)k}{2}}{2k^2} = \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_G(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4}.$$

- wybierzmy $T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ jako środki przedziałów $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tj. $t_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{k} + \frac{i}{2}\right) = \frac{2i-1}{2k}$, następnie $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$ i obowiązuje

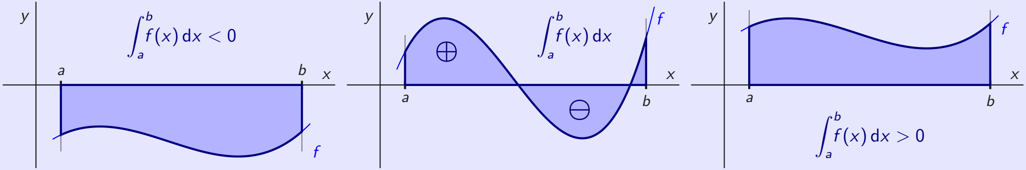
$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2} = \frac{\frac{(1+2k-1)k}{2}}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Podstawowe właściwości

- Geometrycznie reprezentuje całkę oznaczoną Riemanna na przedziale $\langle a; b\rangle$ pole trapezu krzywoliniowego określone funkcją f na przedzial $\langle a; b\rangle$.

  Poniżej osi x (tj. dla ujemnej wartości f) ten obszar jest ujemny.



Funkcje $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, liczba $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ i obowiązuje:

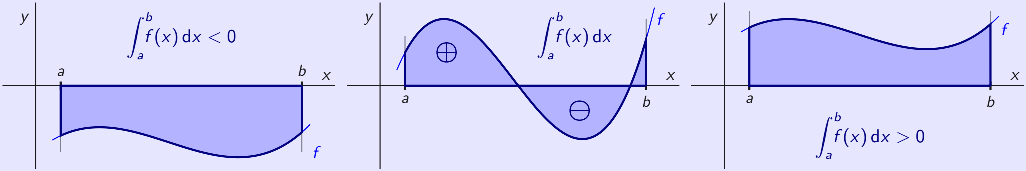
- $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Jeśli $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, lub $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, następnie także $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Podstawowe właściwości

- Geometrycznie reprezentuje całkę oznaczoną Riemanna na przedziale $\langle a; b\rangle$ pole trapezu krzywoliniowego określone funkcją f na przedzial $\langle a; b\rangle$.

  Poniżej osi x (tj. dla ujemnej wartości f) ten obszar jest ujemny.



Funkcje $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, liczba $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ i obowiązuje:

- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Jeśli $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, lub $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, następnie także $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Podstawowe właściwości

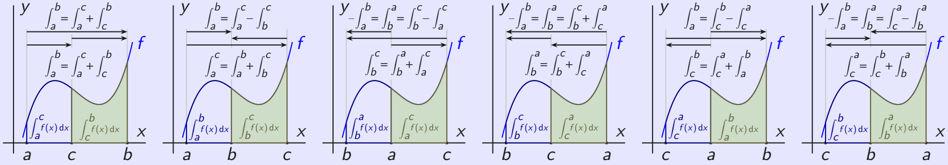
Funkcje $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

- $f(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$
- $g(x) \geq f(x)$ dla wszystkich $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$

ywność całki.

Funkcja $f \in R_I$, $I \subset R$ jest przedziałem ograniczonym, punkty $a, b, c \in I$ są dowolne.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$



$a < c < b$ $\quad a < b < c$ $\quad b < a < c$ $\quad b < c < a$ $\quad c < a < b$ $\quad c < b < a$

Możemy zilustrować addytywność całki Riemanna na wektorach.

Metody całkowania

Obliczanie całki Riemanna (wzór Newtona-Leibniza).

Funkcja $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcja F jest pierwotna funkcji f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

```
(%i1) integrate(f(x),x,-1,1);
```

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Metody całkowania

Obliczanie całki Riemanna (wzór Newtona-Leibniza).

Funkcja $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcja F jest pierwotna funkcji f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^0 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^0 = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Metody całkowania

- Całki oznaczone są generalnie obliczane przy użyciu całek nieoznaczonych.
- Możemy modyfikować metodę przez części i metody podstawienia i bezpośrednio z nich obliczyć całkę oznaczoną.

  Po podstawieniu nie musimy wracać do oryginalnych zmiennych.

Metoda przez części.

$u, u', v, v' \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = \Big[-4\pi^2\cdot 1 + 0^2\cdot 1\Big] + \Big[2x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= -4\pi^2 + \Big[4\pi\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0\Big] - \Big[-2\cos x\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 - \Big[-2\cdot 1 + 2\cdot 1\Big] = -4\pi^2.$$

Metody całkowania

Metoda podstawienia. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f jest ciągłe na I, φ' jest ciągła na J, $\varphi(J) \subset I$,
I to przedział z granicami a, b, J to przedział z granicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ i obowiązuje

- $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$ (Można używać w obu kierunkach.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ dla wszystkich } t \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle \end{array} \right]$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1;0\rangle & x \in \langle 1;2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0;2\rangle & x \in \langle 1;5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Metody całkowania

Metoda podstawienia. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f jest ciągłe na I, φ' jest ciągła na J, $\varphi(J) \subset I$,
I to przedział z granicami a, b, J to przedział z granicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ i obowiązuje • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$ (Można używać w obu kierunkach.)

• $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left[\begin{array}{r|c|c|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ dla wszystkich } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1+\cos 2t\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

• $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|c|c|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;0\rangle & x\in\langle 1;2\rangle & t=2 \mapsto x=5 \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;2\rangle & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Metody całkowania

Metoda podstawienia. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f jest ciągłe na I, φ' jest ciągła na J, $\varphi(J) \subset I$,
I to przedział z granicami a, b, J to przedział z granicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ i obowiązuje • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Można używać w obu kierunkach.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|c|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ dla wszystkich } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|c|c|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \tfrac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

Funkcja $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ jest parzysta lub nieparzysta, gdzie $a < b$.

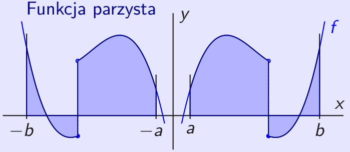
$\Rightarrow f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ i obowiązuje:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=-x & x=b \mapsto t=-b \\ dt=-dx & x=a \mapsto t=-a \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$

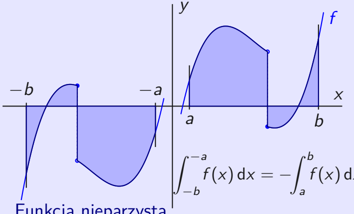
---

f jest parzysta. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$

f jest nieparzysta. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} \big[-f(x)\big]\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$



$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

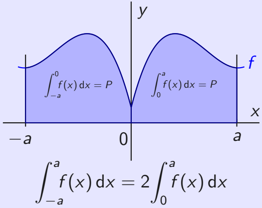
Funkcja $f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, gdzie $a > 0$.

f nieparzysta. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-(-a)} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$

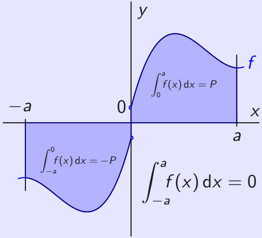
f parzysta. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c}\sin|x| \text{ jest ciągła} \\ \text{i parzysta na } \langle -\pi;\pi\rangle\end{array}\right]$$
  $$= 2\int_{0}^{\pi} \sin|x|\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$
  $$= 2\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi} = -2\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 4.$$

- $$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{ciągła} \\ \text{i nieparzysta} \\ \text{na } \langle -1;1\rangle\end{array}\right] = 0.$$



Funkcja parzysta



Funkcja nieparzysta

Całkowanie funkcji parzystych i nieparzystych

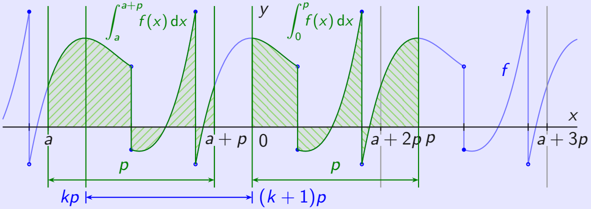
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$ jest okresowa z okresem $p > 0$, $f(x) = f(x+kp)$ dla wszystkich $x \in \langle a; b\rangle$, $k \in Z$.

Jeśli podstawimy $x = \varphi(t) = t - kp$, wtedy $t = x + kp$, $t \in \langle a+kp; b+kp\rangle$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ a obowiązuje:

- $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = b \mapsto t = b+kp \\ x = a \mapsto t = a+kp \end{bmatrix} = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t+kp)\,\mathrm{d}t = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkcja $y = f(x)$ jest okresowa z okresem $p > 0$, punkt rzeczywisty $a \in R$, wtedy obowiązuje:

- $f \in R_{\langle 0;p\rangle}$ $\Leftrightarrow$ • $f \in R_{\langle a;a+p\rangle}$ i (jeśli istnieją) • $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$



Dziękujemy za uwagę.

Analiza matematyczna wspomagana programem wxMaxima

beerb@frcatel.fri.uniza.sk