Matematická analýza podporovaná programom wxMaxima

Laboratórne cvičenia

Rudolf Blaško
Žilinská univerzita v Žiline

Project: Innovative Open Source Courses for Computer Science

31. 5. 2021

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Obsah

Innovative Open Source Courses for Computer Science

This teaching material was written as one of the outputs of the project "Innovative Open Source Courses for Computer Science", funded by the Erasmus+ grant no. 2019-1-PL01-KA203-065564.
The project is coordinated by West Pomeranian University of Technology in Szczecin (Poland) and is implemented in partnership with Mendel University in Brno (Czech Republic) and University of Žilina (Slovak Republic).
The project implementation timeline is September 2019 to December 2022.

Innovative Open Source Courses for Computer Science

Project was implemented under the Erasmus+.
Project name: "Innovative Open Source courses for Computer Science curriculum"
Project no.: 2019-1-PL01-KA203-065564
Key Action: KA2 – Cooperation for innovation and the exchange of good practices
Action Type: KA203 – Strategic Partnerships for higher education

Consortium: Zachodniopomorski uniwersytet technologiczny w Szczecinie
Mendelova univerzita v Brně
Žilinská univerzita v Žiline

Erasmus+ Disclaimer: This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

01. Úvod do wxMaxima

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

01. Základné pojmy

- Príkazy zadávame na samostatné riadky (vstupné riadky).

  Ich realizácia je zabezpečená súčasným stlačením kláves Shift a Enter alebo kliknutím v menu na ikonu ➡ (Send the current cell to maxima).

- Vstupné riadky sú uvedené ako (%i1).
- Výstupné riadky sú uvedené ako (%o1).
- Čísla pre vstupný riadok a príslušný výstupný riadok sú rovnaké a na základe nich sa môžeme odvolávať na obsah týchto riadkov.

```
(%i1) First input line.
(%o1) First output line.
(%i2) Second input line.
(%o2) Second output line.
```

01. Základné pojmy

- Príkazy sa vykonávajú na nových samostatných riadkoch (výstupných riadkoch).
- Príkazy na vstupných riadkoch môžu byť ukončené symbolom ; alebo symbolom $, ktorý potláča zobrazenie príslušného výstupu.

(%i1) `solve(0=x+2,x);`

(%o1) $[x = -2]$

(%i2) `%i1;`

(%o2) $\mathtt{solve}(0 = x + 2, x)$

(%i3) `%o1;`

(%o3) $[x = -2]$

01. Základné pojmy

- Na vstupný riadok môžeme zadať viac príkazov, ale musíme ich oddeliť symbolmi ; alebo $.
- Príkaz môžeme tiež štruktúrovať na viacej vstupných riadkov.

(%i1) `a:2;b:3;solve(a*x+b*x^2=0,x)`

(a) 2

(b) 3

(%o1) $[x=-\frac{2}{3},x=0]$

(%i2) `a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);`

(%o2) $[x=-\frac{2}{3},x=0]$

(%i3)
```
a:2$
b:3$
solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o3) $[x=-\frac{2}{3},x=0]$

01. Základné pojmy

Výstup môžeme uložiť v rôznych tvaroch a následne použiť v iných programoch.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup (%o3) z predchádzajúceho okna môžeme:

- Kopírovať pomocou `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovať ako text (možno použiť napr. pre editor rovníc MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovať ako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovať ako MathML, obrázok, RTF, SVG. . .

Prostredie wxMaxima má dobre prepracovaný help pre používateľa, ktorý nájdete v menu `Help`. Help otvoríme aj stlačením klávesy `F1`.

Návod nájdeme aj na stránke
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

01. Základné pojmy

Výstup môžeme uložiť v rôznych tvaroch a následne použiť v iných programoch.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup (%o3) z predchádzajúceho okna môžeme:

- Kopírovať pomocou `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovať ako text (možno použiť napr. pre editor rovníc MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovať ako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovať ako MathML, obrázok, RTF, SVG. . .

Prostredie wxMaxima má dobre prepracovaný help pre používateľa, ktorý nájdete v menu `Help`. Help otvoríme aj stlačením klávesy `F1`.

Návod nájdeme aj na stránke `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

01. Základné pojmy

Výstup môžeme uložiť v rôznych tvaroch a následne použiť v iných programoch.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Výstup (%o3) z predchádzajúceho okna môžeme:

- Kopírovať pomocou `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovať ako text (možno použiť napr. pre editor rovníc MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovať ako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovať ako MathML, obrázok, RTF, SVG. . .

Prostredie wxMaxima má dobre prepracovaný help pre používateľa, ktorý nájdete v menu `Help`. Help otvoríme aj stlačením klávesy `F1`.

Návod nájdeme aj na stránke
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

02. Základné príkazy

- Pomocou `apropos` zistíme presný názov príkazu pomocou časti jeho názvu.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

- Príkaz `describe` vypíše popis zadaného príkazu.

```
(%i1) describe(plot2d)$
      -- Function: plot2d
      plot2d (<expr><,<range_x><,<options><)
      plot2d (<expr_<>=<expr_<>,<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([parametric,<expr_x><,<expr><_y,<range><],<options><)
      plot2d ([discrete,<points><],<options><)
      plot2d ([contour,<expr><],<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([<type_<>,...,<type_n><],<options><)
      There are 5 types of plots that can be plotted by 'plot2d':
            1. Explicit functions. 'plot2d' ...
      ...
```

02. Základné príkazy

- Výrazy sa zadávajú pomocou bežných znakov operácií, relácií a funkcií.
- Argumenty funkcií a príkazov sú v zátvorkách.
- Symbol násobenia `*` musí byť zadaný!
- Umocnenie sa zadáva znakom `^` alebo dvojicou `**`.
- Symbol `:` sa používa na priradenie hodnoty napravo do výrazu naľavo.
- Nasledujúce príkazy riešia rovnicu $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou premennou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocou príkazu `kill` môžeme z pamäte odstrániť premenné so všetkými ich priradeniami a vlastnosťami.

```
(%i1) kill(a,b)
       /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Základné príkazy

- Výrazy sa zadávajú pomocou bežných znakov operácií, relácií a funkcií.
- Argumenty funkcií a príkazov sú v zátvorkách.
- Symbol násobenia `*` musí byť zadaný!
- Umocnenie sa zadáva znakom `^` alebo dvojicou `**`.
- Symbol `:` sa používa na priradenie hodnoty napravo do výrazu naľavo.
- Nasledujúce príkazy riešia rovnicu $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou premennou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocou príkazu `kill` môžeme z pamäte odstrániť premenné so všetkými ich priradeniami a vlastnosťami.

```
(%i1) kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Základné príkazy

- Výrazy sa zadávajú pomocou bežných znakov operácií, relácií a funkcií.
- Argumenty funkcií a príkazov sú v zátvorkách.
- Symbol násobenia `*` musí byť zadaný!
- Umocnenie sa zadáva znakom `^` alebo dvojicou `**`.
- Symbol `:` sa používa na priradenie hodnoty napravo do výrazu naľavo.
- Nasledujúce príkazy riešia rovnicu $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou premennou x.

```
(%i1)  a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocou príkazu `kill` môžeme z pamäte odstrániť premenné so všetkými ich priradeniami a vlastnosťami.

```
(%i1)  kill(a,b)
        /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2)  kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

02. Základné príkazy

- V menu `View` a podmenu `Display equations` môžeme zmeniť zobrazenia výstupných riadkov na tvary `in 2D` (implicitný tvar), `as 1D ASCII` alebo `as ASCII Art`.
- Nastavenia výstupu môžete zmeniť aj príkazom `set_display`.

(%i1) `x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$`

(%o1) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ `/* in 2D */`

(%i1) `x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$`

(%o1) $x/\mathrm{sqrt}(x^2+1)$ `/* as 1D ASCII */`

(%i2) `x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$`

```
              x
(%o2) ----------        /* as ASCII Art */
                2
          sqrt(x  + 1)
```

03. Práca s číslami a základné konštanty

- Maxima dokáže pracovať s reálnymi číslami v numerickom alebo symbolickom tvare.
- Spôsob zápisu reálnych čísel je možné nastaviť v menu `Numeric` pomocou prepínača `Numeric Output` medzi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavenie premennej `numer` určuje spôsob zobrazenia.
- Štandardne sa zobrazuje 16 číslic (vrátane desatinnej čiarky).
- Presnosť zobrazenia je definovaná premennou `fpproc` a ovplyvňuje zobrazenie pomocou `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy rovnako.
- Štandardne sa komplexné čísla zadávajú v algebraickom tvare (`rectform`). Pomocou príkazu `polarform` ich môžeme previesť do trigonometrického (exponenciálneho) tvaru.

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

03. Práca s číslami a základné konštanty

- Maxima dokáže pracovať s reálnymi číslami v numerickom alebo symbolickom tvare.
- Spôsob zápisu reálnych čísel je možné nastaviť v menu `Numeric` pomocou prepínača `Numeric Output` medzi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavenie premennej `numer` určuje spôsob zobrazenia.
- Štandardne sa zobrazuje 16 číslic (vrátane desatinnej čiarky).
- Presnosť zobrazenia je definovaná premennou `fpproc` a ovplyvňuje zobrazenie pomocou `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy rovnako.
- Štandardne sa komplexné čísla zadávajú v algebraickom tvare (`rectform`). Pomocou príkazu `polarform` ich môžeme previesť do trigonometrického (exponenciálneho) tvaru.

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

03. Práca s číslami a základné konštanty

- Presnosť môžeme zvyšovať alebo znižovať prakticky donekonečna.
- Môžeme ju meniť globálne aj lokálne len pre jednu premennú alebo príkaz.

```
(%i1) log(2);
(%o1) log(2)
(%i2) log(2),numer;
(%o2) 0.693147180559945З
(%i3) float(log(2));
(%o3) 0.693147180559945З
(%i4) bfloat(log(2));
(%o4) 6.931471805599453b − 1
(%i5) log(2),bfloat;
(%o5) 6.931471805599453b − 1
(%i6) bfloat(log(2)),fpprec=34;
(%o6) 6.931471805599453094172321214581766b − 1
(%i7) bfloat(log(2)),fpprec=134;
(%o7) 6.93147180559945 [106digits] 8552023575813b − 1
```

03. Práca s číslami a základné konštanty

- Číselné konštanty e, π, i (imaginárna jednotka) majú prefix `%`, t.j. `%e`, `%pi`, `%i`. To platí aj keď sú súčasťou alebo výsledkom výpočtov.
- Maxima má preddefinované konštanty `inf`, `minf` pre reálne nekonečná ∞, $-\infty$.
- Maxima má preddefinovanú konštantu `infinity` pre komplexné nekonečno.
- Logické konštanty `true` a `false` predstavujú pravdu a nepravdu.

```
(%i1) %pi+%i+%e;
(%o1) π + %i + %e
(%i2) [minf,inf];
(%o2) [−∞, ∞]
(%i3) infinity;
(%o3) infinity
```

04. Priradenia a funkcie

- Maxima obsahuje oveľa viac funkcií ako štandardné programovacie jazyky.
  Sú to nielen samotné funkcie, ale aj rôzne funkcie na ich podporu.
- Operátor `:` používame na priraďovanie hodnôt alebo výrazov premenným.
- Funkcie definujeme pomocou priradenia `:=`.

```
(%i1) f(x):=x^2+2*x+3;
```

(%o1) $f(x) := x^2 + 2x + 3$

```
(%i6) f(x);f(y);f(x+1);
      f(-2);f(1);
```

(%o2) $x^2 + 2x + 3$

(%o3) $y^2 + 2y + 3$

(%o4) $(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

04. Priradenia a funkcie

Maxima obsahuje mnoho elementárnych funkcií. Sú to napríklad:

- `exp(x)=%e^x`, `log(x)`,
- goniometrické funkcie a k nim inverzné funkcie

  `sin(x)` and `asin(x)`, `cos(x)` and `acos(x)`, `tan(x)` and `atan(x)`, `cot(x)` and `acot(x)`,
- hyperbolické funkcie a k nim inverzné funkcie

  `sinh(x)` and `asinh(x)`, `cosh(x)` and `acosh(x)`, `tanh(x)` and `atanh(x)`, `coth(x)` and `acoth(x)` atď.

Na formátovanie výpisu môžeme použiť príkaz `print`.

```
(%i3) a:2$ b:log(2),numer$
      print("Logarithm of a number",a,
           " is ",log(a),"=",b)$
```

Logarithm of a number 2 is $\log(2) = 0.693147180559945$3

04. Priradenia a funkcie

Maxima obsahuje mnoho elementárnych funkcií. Sú to napríklad:

- `exp(x)=%e^x`, `log(x)`,
- goniometrické funkcie a k nim inverzné funkcie
  `sin(x)` and `asin(x)`, `cos(x)` and `acos(x)`, `tan(x)` and `atan(x)`, `cot(x)` and `acot(x)`,
- hyperbolické funkcie a k nim inverzné funkcie
  `sinh(x)` and `asinh(x)`, `cosh(x)` and `acosh(x)`, `tanh(x)` and `atanh(x)`, `coth(x)` and `acoth(x)` atď.

Na formátovanie výpisu môžeme použiť príkaz `print`.

```
(%i3) a:2$ b:log(2),numer$
      print("Logarithm of a number",a,
            " is ",log(a),"=",b)$
      Logarithm of a number 2 is log(2) = 0.6931471805599453
```

04. Priradenia a funkcie

Medzi základné funkcie patria aj:

```
(%i4)  f(x):=sign(x)$ g(x):=abs(x)$
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       print(g(-3.6),g(-3.2),g(-3),g(0),g(3),g(3.2),g(3.6))$
       neg neg neg zero pos pos pos
       3.6 3.2 3 0 3 3.2 3.6
(%i6)  f(x):=floor(x)$      /* bottom whole of x */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −4 −4 −3 0 3 3 3
(%i8)  f(x):=round(x)$
            /* rounded x to the nearest integer number */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −4 −3 −3 0 3 3 4
(%i10) f(x):=truncate(x)$
            /* removes all digits after the decimal point */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −3 −3 −3 0 3 3 3
(%i12) f(x):=ceiling(x)$    /* upper integer x */
       print(f(-3.6),f(-3.2),f(-3),f(0),f(3),f(3.2),f(3.6))$
       −3 −3 −3 0 3 4 4
```

04. Priradenia a funkcie

- Maxima tiež obsahuje mnoho funkcií na ich podporu.
- Niektoré z nich nie sú implementované priamo v prostredí wxMaxima, ale v externých knižniciach, ktoré nazývame balíčky.
- Tieto balíčky sa načítajú do systému pomocou príkazu `load`.
- Na ukážku uvedieme balíček `spangl` pre podporu práce s goniometrickými funkciami.

```
(%i2) print(tan(%pi/8), ratsimp(tan(%pi/8)),
            trigsimp(tan(%pi/8)))$
```

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

```
(%i3) load(spangl);
```

(%o3) *../share/trigonometry/spangl.mac*

```
(%i4) tan(%pi/8);
```

(%o4) $\sqrt{2}-1$

05. Práca s výrazmi

Mnohokrát potrebujeme zmeniť podmienky iba lokálne pre konkrétny výpočet bez zmeny globálneho nastavenia. Na tento účel má Maxima veľmi efektívny príkaz `ev`.

- Príkaz `ev` umožňuje definovať špecifické prostredie v rámci jedného príkazu.
- Po zadaní príkazu `ev(a,b1,b2,..., bn)` sa vyhodnotí výraz `a` pri splnení podmienok `b1`, `b2`, ..., `bn`.
- Týmito podmienkami môžu byť rovnice, priradenia, funkcie, prepínače (logické nastavenia).

Príklad ukazuje príklad riešenia kvadratickej rovnice pomocou príkazu `solve`.

- Premenné `a`, `b`, `c` po vykonaní príkazu `ev` nemajú priradené hodnoty.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x=\frac{3}{2}, x=-1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $\left[x=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\right]$

05. Práca s výrazmi

Maxima ponúka niekoľko príkazov na zjednodušenie a úpravu rôznych výrazov.

- Základné funkcie nájdete v menu `Simplify`.
- Maxima ponúka pomocou príkazu `example` príklady k jednotlivým príkazom.
- Pozrime sa na niektoré z príkladov, ktoré ponúka `example(ratsimp)`.

```
(%i2) f(x):=b*(a/b-x)+b*x+a$
          print(f(x),"?",ratsimp(f(x)))$
```

$bx + b(\frac{a}{b} - x) + a \;?\; 2a$

```
(%i3) ratsimp(a+1/a);
```

(%o3) $\frac{a^2+1}{a}$

```
(%i4) ev(x^(a+1/a),ratsimp);
```

(%o4) $x^{a+\frac{1}{a}}$

```
(%i5) ev(x^(a+1/a),ratsimpexpons);
```

(%o5) $x^{\frac{a^2+1}{a}}$

05. Práca s výrazmi

- Funkcia `expand` roznásobí príslušné členy vo výraze.
  Funkcia `faktor` naopak výraz rozloží.
  Funkcia `gfactor` to robí nad poľom komplexných čísel.

```
(%i1) f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$
(%i3) ratsimp(f(x));expand(f(x));
```
(%o2) $x^5+x^4-16x-16$

(%o3) $x^5+x^4-16x-16$

```
(%i6) factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);
```
(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$

(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%i)(x+2\%i)$

(%o6) $2^2 5^2$

- Racionálnu lomenú funkciu rozložíme na parciálne zlomky pomocou `partfrac`.

```
(%i1) partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);
```
(%o1) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$

05. Práca s výrazmi

- Funkcia `expand` roznásobí príslušné členy vo výraze.
  Funkcia `faktor` naopak výraz rozloží.
  Funkcia `gfactor` to robí nad poľom komplexných čísel.

```
(%i1) f(x):=(x+1)*(x^2-4)*(x^2+4)$
(%i3) ratsimp(f(x));expand(f(x));
```

(%o2) $x^5+x^4-16x-16$

(%o3) $x^5+x^4-16x-16$

```
(%i6) factor(f(x));gfactor(f(x));factor(100);
```

(%o4) $(x-2)(x+1)(x+2)(x^2+4)$

(%o5) $(x-2)(x+1)(x+2)(x-2\%i)(x+2\%i)$

(%o6) $2^2 5^2$

- Racionálnu lomenú funkciu rozložíme na parciálne zlomky pomocou `partfrac`.

```
(%i1) partfrac((x+1)/(x^2-2*x+1),x);
```

(%o1) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$

05. Práca s výrazmi

Substituovať výrazy môžeme pomocou príkazov `subst(a,b,c)` a `ratsubst(a,b,c)`.

- Výraz `a` bude nahradený výrazom `b` a následne dosadený do výrazu `c`.
- Pri použití príkazu `subst` musí byť `b` najjednoduchšou časťou (atómom) resp. kompletným podvýrazom výrazu `c`.
- V príklade nie je podvýraz `x+y` úplný (chýba `z`).
- Príkaz `ratsubst` výsledný výraz aj upraví.

(%i2) `subst(x+y,a,a^2+b^2); ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);`

(%o1) $(y+x)^2+b^2$

(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$

(%i4) `subst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(a,x+y,x+y+z);`

(%o3) $z+y+x$

(%o4) $z+a$

06. Limity a derivácie

V menu `Calculus` nájdeme funkcie na riešenie základných problémov matematickej analýzy (limity, derivácie, integrály, súčty radov, ...).

Limity vypočítame pomocou príkazu `limit`.

- Posledný parameter určuje smer jednostranných limít, má hodnoty `plus` alebo `minus` a je voliteľný.

  Ak nie je zadaný, Maxima počíta limitu ako komplexnú.

- Príkazom `limit(f(x),x,a)` vypočítame limitu $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

- Príkazom `limit(f(x),x,a,plus)` vypočítame limitu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

```
(%i4) limit(1/x,x,0);      limit(1/x,x,0,plus);
            limit(1/x,x,0,minus);  limit(1/x,t,0);
```

(%o1) *infinity*

(%o2) ∞

(%o3) $-\infty$

(%o4) $\frac{1}{x}$

06. Limity a derivácie

Ak pred príkazom použijeme apostrof ’, tento príkaz sa nevykoná, iba sa zobrazí.

```
(%i2) limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
      'limit(((1-n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
```

(%o1) 0

(%o2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-n}{3n+1}\right)^{4n+1}$

```
(%i2) 2+3; '2+3;
```

(%o1) 5

(%o2) 5

```
(%i4) solve(x+1=0,x);'solve(x+1=0,x);
```

(%o3) $[x=-1]$

(%o4) $solve(x+1=0,x)$

06. Limity a derivácie

Derivácie sa počítajú pomocou príkazu `diff`.

Parameter, ktorý určuje rád derivácie, je voliteľný.

```
(%i4) f(x):=2*x^4-3*x+sin(x);
      print("f'=",diff(f(x),x),
            "=",diff(f(x),x,1))$
      print("f''=",diff(diff(f(x),x),x),
            "=",diff(f(x),x,2),
            "=",diff(f(x),x,1,x,1))$
      print("f^(10)=",diff(f(x),x,10),
            "=",diff(f(x),x,1,x,9))$
```

(%o1) $f(x) := 2x^4 - 3x + \sin(x)$

$f' = \cos(x) + 8x^3 - 3 = \cos(x) + 8x^3 - 3$

$f'' = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x) = 24x^2 - \sin(x)$

$f\hat{}(10) = -\sin(x) = -\sin(x)$

06. Limity a derivácie

Parciálne derivácie počítame pomocou rovnakého príkazu `diff`.

```
(%i3) g(x,y):=x^3*y^2-1;
      print("g'_x=",diff(g(x,y),x),
            ", respectively
              g'_y=",diff(g(x,y),y,1))$
      print( "g''_(xx)=",diff(g(x,y),x,2),
            ", g''_(yx)=",diff(g(x,y),y,1,x,1),
            ", g''_(xy)=",diff(g(x,y),x,1,y,1),
            ", g''_(yy)=",diff(g(x,y),y,1,y,1))$
```

(%o1) $g(x,y) := x^3y^2 - 1$

$g'\_x = 3x^2y^2$, respectively $g'\_y = 2x^3y$

$g''\_(xx) = 6xy^2$, $g''\_(yx) = 6x^2y$, $g''\_(xy) = 6x^2y$, $g''\_(yx) = 2x^3$

06. Limity a derivácie

Taylorov polynóm n-tého stupňa vypočítame pomocou príkazu `taylor`.

- Tento príkaz nájdeme v menu `Calculus` a podmenu `Get Series...`.
- Taylorov rad funkcie f stupňa n v strede c vypočítame príkazom `taylor(f(x),x,c,n)`.
- Jeho koeficienty vypočítame pomocou príkazu `coeff`.
- Použitie tohto príkazu závisí od príkazu `taylor`.

```
(%i1) t1:taylor(sin(x),x,0,5); t2:taylor(sin(x),x,-1,4);
```

(t1) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots$

(t2) $-\sin(1)+\cos(1)(x+1)+\frac{\sin(1)(x+1)^2}{2}-\frac{\cos(1)(x+1)^3}{6}-\frac{\sin(1)(x+1)^4}{24}+\cdots$

```
(%i3) print(coeff(sin(x),x,5)," and ",coeff(t1,x,5),
          " and ",coeff(t2,x,5))$
```

0 and $\frac{1}{120}$ and $\frac{\cos(1)}{120}$

06. Limity a derivácie

V príklade je vypočítaný Taylorov polynóm daného polynómu iným spôsobom.

Príkaz `taylor` dáva na koniec tri bodky, aj keď je vývoj ukončený.

(%i1) `f(x):=2*x^5-x^4-3*x^3-x+1;`

(%o1) $f(x) := 2x^5 - x^4 + (-3)x^3 - x + 1$

(%i2) `tp1:taylor(f(x),x,-1,5);`

(tp1) $2 + 4(x+1) - 17(x+1)^2 + 21(x+1)^3 - 11(x+1)^4 + 2(x+1)^5 + \cdots$

(%i4) `ratsimp(tp1);expand(tp1);`

(%o3) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%o4) $2x^5 - x^4 - 3x^3 - x + 1$

(%i6) `tpx:ratsubst(t,x+1,f(x));subst(x+1,t,tpx);`

(tpx) $2t^5 - 11t^4 + 21t^3 - 17t^2 + 4t + 2$

(tp2) $2(x+1)^5 - 11(x+1)^4 + 21(x+1)^3 - 17(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$

(%i7) `tp1-tp2;`

(%o7) $0 + \cdots$

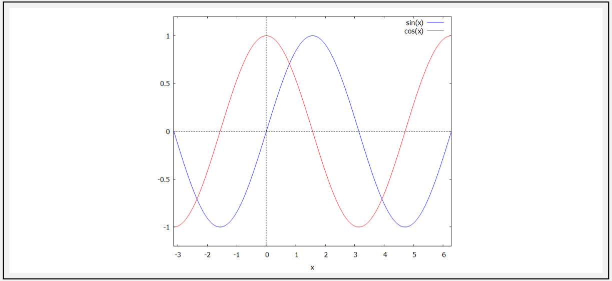
07. Grafy funkcií

Graf funkcie môžeme vykresliť niekoľkými spôsobmi.

- Najjednoduchší spôsob je zvoliť v menu `Plot` podmenu `Plot 2d ...`.
- Ak zvolíme `Format=gnuplot`, funkcia sa vykreslí príkazom `plot2d` do nového okna pomocou programu Open Source `Gnuplot`.

  `Gnuplot` sa automaticky nainštaluje spolu s Maxima.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, gnuplot])$
```

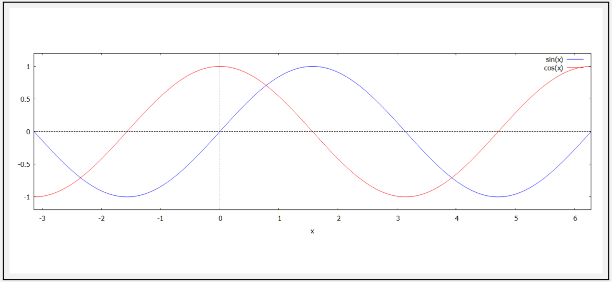


07. Grafy funkcií

Grafy funkcií nie sú zobrazené v reálnom pomere osí x a y, ale sú optimalizované pre obrazovku.

- Pre správne zobrazenie môžeme použiť napr. parameter `same_xy`.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, gnuplot],[same_xy])$
```

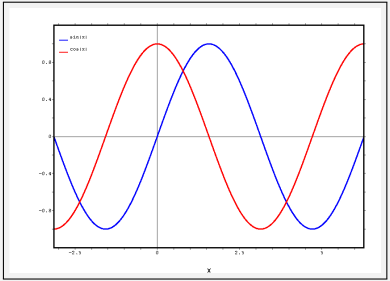


07. Grafy funkcií

Ak zvolíme `Format=wxmaxima`:

- Maxima vykreslí graf pomocou príkazu `plot2d` do nového okna.
- Obrázok môžeme uložiť iba do postscript-u.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, xmaxima])$
```



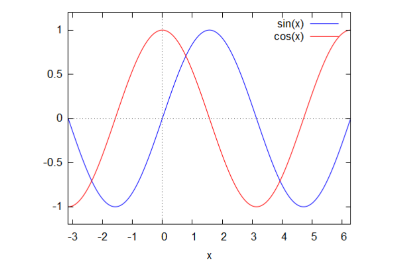
07. Grafy funkcií

Ak zvolíme `Format=inline`:

- Maxima nakreslí graf pomocou príkazu `wxplot2d` do svojho prostredia.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
          [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1)



Príkazy `plot2d` a `wxplot2d` majú rovnakú syntax a oveľa viac parametrov.

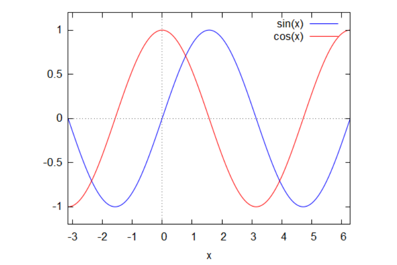
- Parametre zistíme napríklad príkazom `describe(plot2d)`.

07. Grafy funkcií

Ak zvolíme $\boxed{\texttt{Format=inline}}$:

- Maxima nakreslí graf pomocou príkazu `wxplot2d` do svojho prostredia.

```
(%i1)  wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
           [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1) 

Príkazy `plot2d` a `wxplot2d` majú rovnakú syntax a oveľa viac parametrov.

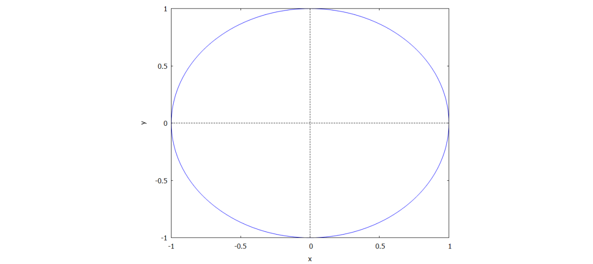
- Parametre zistíme napríklad príkazom `describe(plot2d)`.

07. Grafy funkcií

Ak chceme zobraziť implicitnú funkciu, musíme načítať knižnicu `implicit_plot`.

- V novších verziách (minimálne wxMaxima 21.05.2) to už nie je potrebné.

```
(%i1) load(implicit_plot);
(%o1) ../share/contrib/implicit_plot.lisp
(%i2) implicit_plot(x^2+y^2-1, [x,-1,1], [y,-1,1])$
      implicit_plot is now obsolete. Using plot2d instead:
      plot2d (y^2+x^2-1=0, [x,-1,1], [y,-1,1])
```



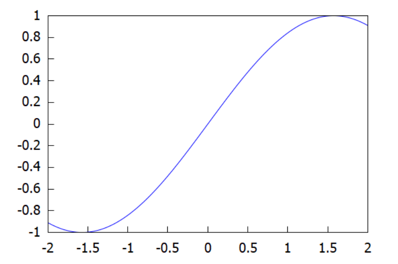
07. Grafy funkcií

Graf funkcie môžeme vykresliť viacerými spôsobmi.

- Výhodnejšie je použiť príkazy `wxdraw2d` alebo `draw2d` a výstup presmerovať na `Gnuplot`.
- Tieto príkazy majú mierne odlišnú syntax ako `wxplot2d`, `plot2d`.
  Parametre tlače sú jednoduchšie a prehľadnejšie.
- Vykresľovaná funkcia musí byť v príkaze `explicit`, `parametric` alebo `implicit`.

```
(%i1) wxdraw2d(explicit((sin(x)),x,-2,2))$
```

(%o1)

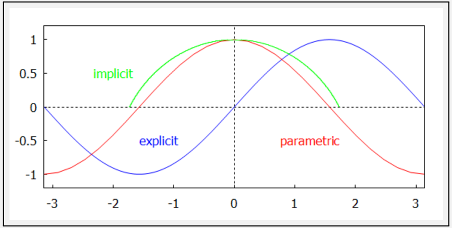


07. Grafy funkcií

Kreslenie pomocou príkazov `wxdraw2d` a `draw2d`.

- Pre správne zobrazenie môžeme použiť napr. parameter `proportional_axes`.

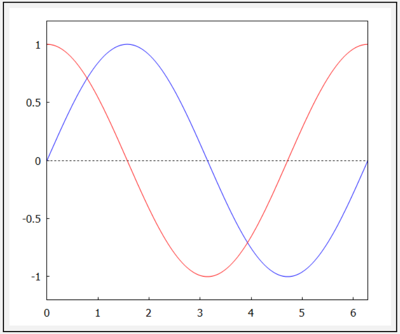
```
(%i1) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
      color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
      label(["explicit",-1.25,-.5]),
      color=red,parametric(t,cos(t),t,-%pi,%pi),
      label(["parametric",1.25,-.5]),
      color=green,implicit(x^2+(y+1)^2-4,x,-2,2,y,0,1),
      label(["implicit",-2,.5]))$
```



07. Grafy funkcií

- Príkaz `draw2d`.

```
(%i1) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
      color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
      color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

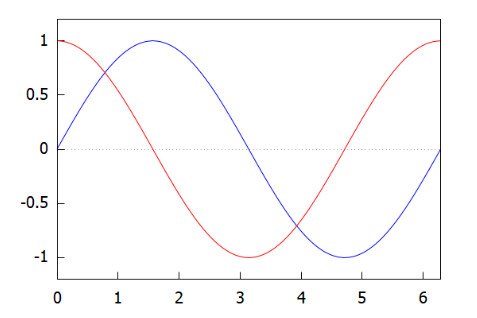


07. Grafy funkcií

- Príkaz `wxdraw2d`.

(%i1)
```
wxdraw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,0,2*%pi),
color=red,explicit((cos(x)),x,0,2*%pi))$
```

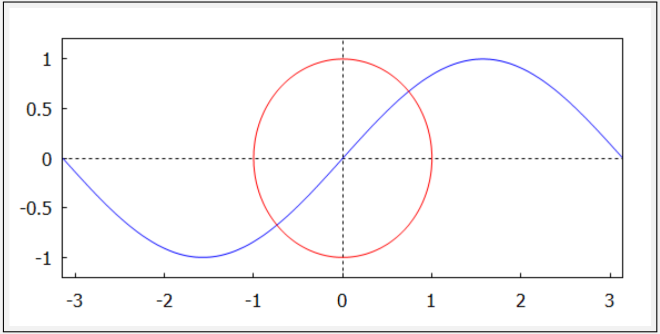
(%o1)



07. Grafy funkcií

- Rovnakým spôsobom nakreslíme parametrickú krivku alebo funkciu.

(%i1)
```
draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-%pi,%pi],yrange=[-1.2,1.2],
color=blue,explicit((sin(x)),x,-%pi,%pi),
color=red,nticks=300,
parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))$
```



08. Postupnosti a rady

Postupnosti môžeme v Maxime vytvoriť niekoľkými spôsobmi.

- Postupnosti môžeme vytvoriť napríklad príkazom `makelist` alebo príkazmi cyklu `for..do`.
- Príkaz `makelist` vytvorí zoznam, ktorý môžeme zobraziť aj ako celok aj po členoch.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);
      S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S2[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 7
(%o5) 199
(%i6) S1[12];
      inpart: invalid index 12 of list or matrix.
      -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

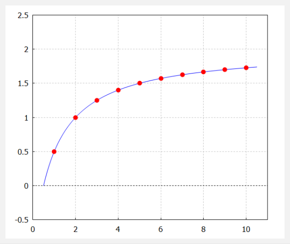
08. Postupnosti a rady

- Postupnosť je vygenerovaná aj so svojimi vzormi a potom sa vykreslí pomocou `draw2d`.
- Usporiadané dvojice sú v hranatých zátvorkách a potom sú zobrazené ako body v rovine.

```
(%i1) S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);
```

(S1) $[[1, \frac{1}{2}], [2, 1], [3, \frac{5}{4}], [4, \frac{7}{5}], [5, \frac{3}{2}], [6, \frac{11}{7}], [7, \frac{13}{8}], [8, \frac{5}{3}], [9, \frac{17}{10}], [10, \frac{19}{11}]]$

```
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
      color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
      point_type=7,color=red,points(S1))$
```



08. Postupnosti a rady

- Pomocou príkazu `for..do` vypíšeme niekoľko členov postupnosti $\left\{2n^2 - 1\right\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 15 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
      1
      7
      17
      31
      49
      71
      97
      127
      161
      199
      241
      287
      337
      391
      449
```

08. Postupnosti a rady

- Pekným príkladom použitia príkazu `for..do` je Fibonacciho postupnosť.

```
(%i3) a0:0$ a1:1$ (for i:1 thru 14
          do (an:a1+a0,print(an),a1:a0,a0:an))$
      1
      1
      2
      3
      5
      8
      13
      21
      34
      55
      89
      144
      233
      377
```

08. Postupnosti a rady

Súčet radu môžeme vypočítať príkazom `sum`.
Tento príkaz nájdete v menu $\boxed{\texttt{Calculus}}$ a podmenu $\boxed{\texttt{Calculate Sum...}}$.

- Pomocou príkazu `sum` vypočítame konečný aj nekonečný súčet.

```
(%i1) sum(2*n^2-1,n,1,8);
(%o1) 400
```

- Maxima dokáže vypočítať presný súčet niektorých nekonečných radov.

```
(%i2) sum(1/k^2,k,1,inf);
      sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum;
```

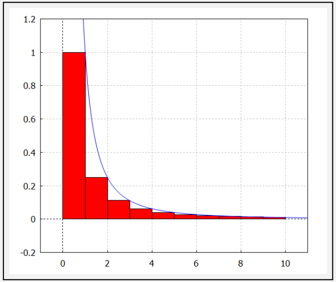
(%o1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

(%o2) $\frac{\pi^2}{6}$

08. Postupnosti a rady

- Číselný rad $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ možno graficky zobraziť nasledovne.

```
(%i1)  a(n):=1/n^2$
       rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,10)$
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-1,11],yrange=[-0.2,1.2],
       border=true,color=black,fill_color=red,rec,
       color=blue,explicit(a(n),n,0,11))$
```



02. Reálne funkcie

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

01. Základné pojmy

- **Binárna relácia** f medzi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$, potom sa relácia f nazýva **funkcia** (**zobrazenie**) z množiny A do množiny B, označenie $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ alebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá premenná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá premenná, hodnota funkcie.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definičný obor funkcie f (množina vzorov).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnôt funkcie f (množina obrazov).
- Relácie a funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc.
- $f = g$ predstavuje ekvivalenciu $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  t.j. $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

01. Základné pojmy

- **Binárna relácia** f medzi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$, potom sa relácia f nazýva **funkcia** (**zobrazenie**) z množiny A do množiny B, označenie $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ alebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá premenná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá premenná, hodnota funkcie.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B : [x; y] \in f\}$ Definičný obor funkcie f (množina vzorov).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f) : [x; y] \in f\}$ Obor hodnôt funkcie f (množina obrazov).
- Relácie a funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc.
- $f = g$ predstavuje ekvivalenciu $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  t.j. $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

01. Základné pojmy

- **Binárna relácia** f medzi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$, potom sa relácia f nazýva **funkcia** (**zobrazenie**) z množiny A do množiny B, označenie $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ alebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá premenná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá premenná, hodnota funkcie.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definičný obor funkcie f (množina vzorov).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnôt funkcie f (množina obrazov).
- Relácie a funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc.
- $f = g$ predstavuje ekvivalenciu $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  t.j. $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

02. Postupnosti (reálnych čísel)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}.$

- Explicitné zadanie: $a_n = 2n - 1,\ n \in N.$
- Rekurentné zadanie: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n \in N.$

```
(%i3) a(n):=2*n-1$ S:makelist(a(n),n,1,8);
 (S)  [1,3,5,7,9,11,13,15]
(%i4) an:1$ (for n:1 thru 8 do (print(an),an:an+2))$
      1
      3
      5
      7
      9
      11
      13
      15
```

02. Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Ak $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ je rastúca postupnosť (prirodzených čísel, indexov), potom sa $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť (vybraná postupnosť z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podpostupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ sú napríklad:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1,3,5,7,9,11,13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3,7,11,15,19,23,27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7,11,15,19,23,27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

02. Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Ak $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ je rastúca postupnosť (prirodzených čísel, indexov), potom sa $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť** (**vybraná postupnosť z**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podpostupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ sú napríklad:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

02. Postupnosti (reálnych čísel)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$
        Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      print("limit a(n)=",limit(a(n),n,inf))$
      limit a(n)= 0
```

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1) b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$
        Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      print("limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
      limit b(n)= ∞
```

02. Postupnosti (reálnych čísel)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

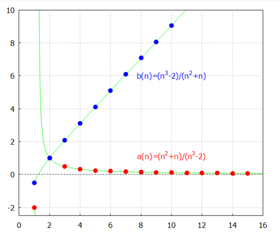
```
(%i1)  a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$
               Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
       print("limit a(n)=",limit(a(n),n,inf))$
       limit a(n)= 0
```

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

```
(%i1)  b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$
               Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
       print("limit b(n)=",limit(b(n),n,inf))$
       limit b(n)= ∞
```

02. Postupnosti (reálnych čísel)

```
(%i1) a(n):=(n^2+n)/(n^3-2)$ Sa:makelist([n,a(n)],n,1,15)$
      b(n):=(n^3-2)/(n^2+n)$ Sb:makelist([n,b(n)],n,1,15)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
             xrange=[0,16],yrange=[-2.5,10],
      color=green,explicit(a(n),n,1,16),point_type=7,
             color=red,points(Sa),
         label(["a(n)=(n^2+n)/(n^3-2)",10,a(10)+1]),
      color=green,explicit(b(n),n,1,16),point_type=7,
             color=blue,points(Sb),
         label(["b(n)=(n^3-2)/(n^2+n)",10,6]))$
```



03. Číselné rady

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť,

potom sa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazýva **(nekonečný číselný) rad**.

- Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vzťah medzi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\cdots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Číselné rady

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť,

potom sa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazýva **(nekonečný číselný) rad**.

- Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vzťah medzi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Číselné rady

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť,

potom sa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazýva **(nekonečný číselný) rad**.

- Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

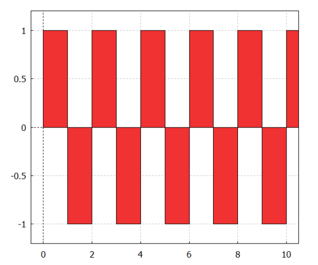
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vzťah medzi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

03. Číselné rady

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

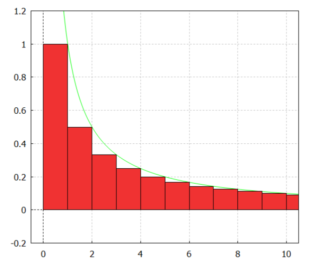
(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)$
rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



03. Číselné rady

Harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$

```
(%i1) a(n):=1/n$
      rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.2,1.2],
      color=green,explicit(a(n),n,.5,11),
      border=true,color=black,fill_color=light_red,rec)$
```



03. Číselné rady

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4)
```
sum: sum is divergent.
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

- V nasledujúcom príklade stačí meniť na začiatku hodnotu q.

```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

03. Číselné rady

```
(%i4)  sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
       sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4) sum: sum is divergent.

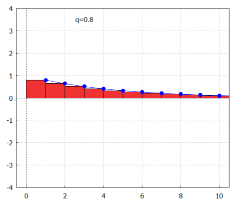
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);

- V nasledujúcom príklade stačí meniť na začiatku hodnotu q.

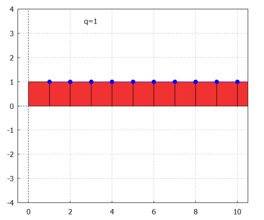
```
(%i1)  q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
       reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
       border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
       label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
       color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
       point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

03. Číselné rady

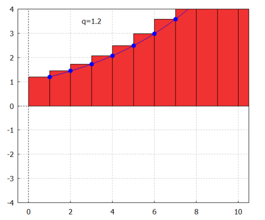
Príkazy zobrazia nasledujúce grafy:



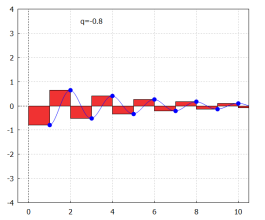
$q = 0.8$



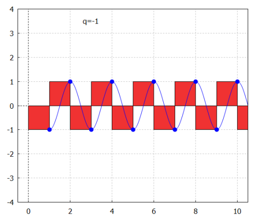
$q = 1$



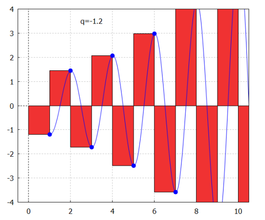
$q = 1.2$



$q = -0.8$



$q = -1$



$q = -1.2$

03. Číselné rady

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in N$ (**nezáporné členy**) má vždy súčet $0 \leq s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \infty$.

Porovnávacie kritérium. $0 \leq a_n \leq b_n,\ n \in N$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

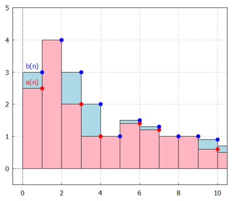
Limitný tvar. $0 \leq a_n \leq b_n,\ n \in N$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p$, $0 < p < \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$ $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Leftrightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

03. Číselné rady

(%i1)
```
a:[2.5,4,2,1,1,1.4,1.2,1,1,0.6,0.5]$
pa:makelist([i,a[i]],i,1,11)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a[i]]),i,1,11)$
b:[3.0,4,3,2,1,1.5,1.3,1,1,0.9,0.7]$
pb:makelist([i,b[i]],i,1,11)$
rb:makelist(rectangle([i-1,0],[i,b[i]]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-.5,5],
border=true,color=black,fill_color=light_blue,
rb,color=black,fill_color=light_pink,ra,
point_type=7,color=red,points(pa),point_type=7,
color=blue,points(pb),color=red,label(["a(n)",.5,2.7]),
color=blue,label(["b(n)",.5,3.2]))$
```



03. Číselné rady

d'Alembertovo (podielové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

03. Číselné rady

d'Alembertovo (podielové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N$.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0; 1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty$.

Limitný tvar. $a_n > 0,\ n \in N$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$.

- $p < 1$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.
- $p > 1$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$.

03. Číselné rady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

03. Číselné rady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

03. Číselné rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow \text{ pre } a > 0.$$

d'Alembertovo podielové kritérium:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pre $a > 0.$

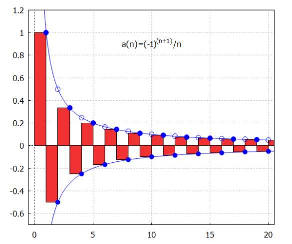
Cauchyho odmocninové kritérium:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pre $a > 0.$

```
(%i5)  an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
           limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
           limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%o3)  0
(%o4)  0
(%o5)  0
```

03. Číselné rady

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)/n$ pa:makelist([i,a(i)],i,1,21)$
ra:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,21)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,20.5],yrange=[-.7,1.2],
color=blue,explicit(abs(a(n)),n,.5,21),
explicit(-abs(a(n)),n,.5,21),
border=true,color=black,fill_color=light_red,ra,
label(["a(n)=(-1)^{(n+1)}/n",10,.9]),
point_type=6,color=blue,points(abs(pa)),point_type=7,
color=blue,points(pa))$
```



04. Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t.j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcia reálnej premennej.
- $H(f) \subset R$ Reálna funkcia.

Explicitne:
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky:
- $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkcie φ, ψ).

Implicitne:
- $f\colon F(x, y) = 0$, podmienky pre $[x; y]$ (Implicitná rovnica).

Funkcia $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkciu $f\colon y = |x|$, $x \in R$ môžeme napríklad definovať:

Explicitne:	• $y = \sqrt{x^2}$,	resp.	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametricky:	• $x = t$, $y = \lvert t\rvert$, $t \in R$,	resp.	• $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
Implicitne:	• $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,	resp.	• $y - \lvert x\rvert = 0$.

04. Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t.j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcia reálnej premennej.
- $H(f) \subset R$ Reálna funkcia.

Explicitne: • $y = f(x),\ x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J,\ J \subset R$ (Pomocné funkcie φ, ψ).

Implicitne: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmienky pre $[x; y]$ (Implicitná rovnica).

Funkcia $f\colon y = |x|,\ x \in R$.

Funkciu $f\colon y = |x|,\ x \in R$ môžeme napríklad definovať:

Explicitne: • $y = \sqrt{x^2}$, resp. • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky: • $x = t,\ y = |t|,\ t \in R$, resp. • $x = t,\ y = \sqrt{t^2},\ t \in R$.

Implicitne: • $y^2 - x^2 = 0,\ y \geq 0$, resp. • $y - |x| = 0$.

04. Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t.j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcia reálnej premennej.
- $H(f) \subset R$ Reálna funkcia.

Explicitne: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkcie φ, ψ).

Implicitne: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmienky pre $[x; y]$ (Implicitná rovnica).

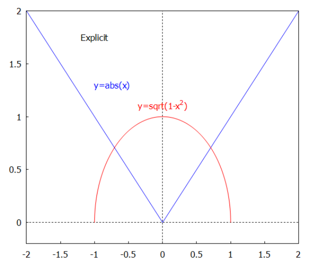
Funkcia $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkciu $f\colon y = |x|$, $x \in R$ môžeme napríklad definovať:

Explicitne:	• $y = \sqrt{x^2}$,	resp.	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametricky:	• $x = t$, $y = |t|$, $t \in R$,	resp.	• $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.
Implicitne:	• $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,	resp.	• $y - |x| = 0$.

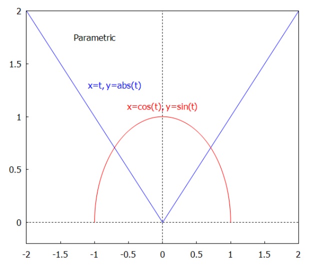
04. Funkcie

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,explicit(abs(x),x,-2,2),
label(["y=abs(x)",-.75,1.3]),
color=red,explicit(sqrt(1-x^2),x,-1,1),
label(["y=sqrt(1-x^2)",0,1.1]),
color=black,label(["Explicit",-1,1.75]))$
```



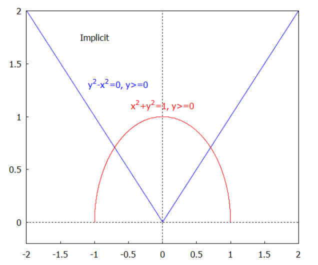
04. Funkcie

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,parametric(t,abs(t),t,-2,2),
label(["x=t, y=abs(t)",-.7,1.3]),
color=red,nticks=100,parametric(cos(t),sin(t),t,0,%pi),
label(["x=cos(t), y=sin(t)",0,1.1]),
color=black,label(["Parametric",-1,1.75]))$
```



04. Funkcie

(%i1)
```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,2],yrange=[-.2,2],
color=blue,implicit(y^2-x^2,x,-2,2,y,0,2),
label(["y^2-x^2=0, y>=0",-.65,1.3]),
color=red,implicit(x^2+y^2-1,x,-1,1,y,0,1),
label(["x^2+y^2=1, y>=0",0,1.1]),
color=black,label(["Implicit",-1,1.75]))$
```



05. Elementárne funkcie I

Elementárna funkcia sa nazýva každá funkcia vytvorená pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia alebo pomocou skladania funkcií zo základných elementárnych funkcií:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Polynóm stupňa n

f_n: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- f_0: $y = a_0$, $a_0 \neq 0$ sa nazýva **konštantná funkcia**.
- f_1: $y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**.
- f_2: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická funkcia**.

05. Elementárne funkcie I

Elementárna funkcia sa nazýva každá funkcia vytvorená pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia alebo pomocou skladania funkcií zo základných elementárnych funkcií:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

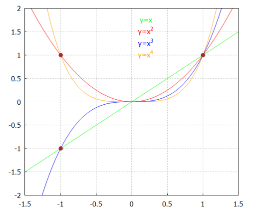
Polynóm stupňa n

$f_n\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon y = a_0$, $a_0 \neq 0$ sa nazýva **konštantná funkcia**.
- $f_1\colon y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**.
- $f_2\colon y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická funkcia**.

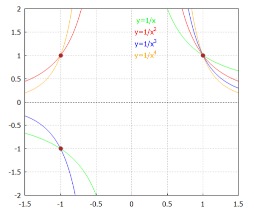
05. Elementárne funkcie I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(x,x,-1.5,1.5),
label(["y=x",.2,1.75]),
color=red,explicit(x^2,x,-1.5,1.5),
label(["y=x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(x^3,x,-1.5,1.5),
label(["y=x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(x^4,x,-1.5,1.5),
label(["y=x^4",.2,1]),color=brown,
point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



05. Elementárne funkcie I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2,2],
color=green,explicit(1/x,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x",.2,1.75]),
color=red,explicit(1/x^2,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^2",.2,1.5]),
color=blue,explicit(1/x^3,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^3",.2,1.25]),
color=orange,explicit(1/x^4,x,-1.5,1.5),
label(["y=1/x^4",.2,1]),color=brown,
point_type=7,points([[-1,-1],[-1,1],[1,1]]))$
```



05. Elementárne funkcie I

Racionálna lomená funkcia

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m sú polynómy stupňov $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkcia

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciálna funkcia so základom $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Najdôležitejšia je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ so základom e (Eulerovo číslo).
- Graf sa nazýva **exponenciálna krivka** a prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcií $y = a^x$, $y = a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.

05. Elementárne funkcie I

Racionálna lomená funkcia

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m sú polynómy stupňov $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkcia

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciálna funkcia so základom $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Najdôležitejšia je $f\colon y = \exp x = e^x$ so základom e (Eulerovo číslo).
- Graf sa nazýva **exponenciálna krivka** a prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcií $y = a^x$, $y = a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.

05. Elementárne funkcie I

Racionálna lomená funkcia

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m sú polynómy stupňov $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkcia

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

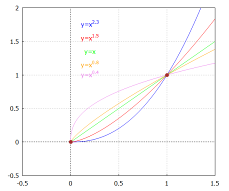
Exponenciálna funkcia so základom $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Najdôležitejšia je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ so základom e (Eulerovo číslo).
- Graf sa nazýva **exponenciálna krivka** a prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcií $y = a^x$, $y = a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.

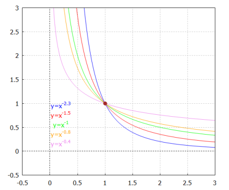
05. Elementárne funkcie I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,1.5],yrange=[-.5,2],
color=blue,explicit(x^2.3,x,0,1.5),
label(["y=x^{2.3}",.2,1.75]),
color=red,explicit(x^1.5,x,0,1.5),
label(["y=x^{1.5}",.2,1.55]),
color=green,explicit(x,x,-0,1.5),
label(["y=x",.2,1.35]),
color=orange,explicit(x^.8,x,0,1.5),
label(["y=x^{0.8}",.2,1.15]),
color=violet,explicit(x^.4,x,0,1.5),
label(["y=x^{0.4}",.2,1]),
color=brown,point_type=7,points([[0,0],[1,1]]))$
```



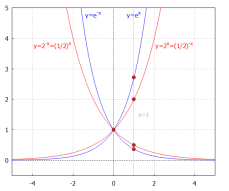
05. Elementárne funkcie I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,3],yrange=[-.5,3],
color=blue,explicit(x^-2.3,x,0,3),
label(["y=x^{-2.3}",.2,.95]),
color=red,explicit(x^-1.5,x,0,3),
label(["y=x^{-1.5}",.2,.75]),
color=green,explicit(x^-1,x,-0,3),
label(["y=x^{-1}",.2,.55]),
color=orange,explicit(x^-.8,x,0,3),
label(["y=x^{-0.8}",.2,.35]),
color=violet,explicit(x^-.4,x,0,3),
label(["y=x^{-0.4}",.2,.15]),
color=brown,point_type=7,points([[1,1]]))$
```



05. Elementárne funkcie I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-.5,5],
color=blue,explicit(%e^x,x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.75]),
explicit(%e^(-x),x,-5,5),
label(["y=e^{-x}",-1,4.75]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x=(1/2)^{-x}",3,3.75]),
explicit(2^(-x),x,-5,5),
label(["y=2^{-x}=(1/2)^x",-3,3.75]),
color=grey,parametric(1,t,t,-.5,5),
label(["x=1",1.5,1.5]),color=brown,point_type=7,
points([[0,1],[1,1/2],[1,2],[1,1/%e],[1,%e]]))$
```



05. Elementárne funkcie I

```
(%i1) exp(x)+%e^x;exp(1);
```

(%o1) $2\%e^x$

(%o2) $\%e$

```
(%i5) log(x);log(2);log(%e);
```

(%o3) $\log(x)$

(%o4) $\log(2)$

(%o5) 1

```
(%i8) log_2(x):=log(x)/log(2);log_2(2);log_2(%e);
```

(%o6) $\log\_2(x) := \frac{\log(x)}{\log(2)}$

(%o7) 1

(%o8) $\frac{1}{\log(2)}$

05. Elementárne funkcie I

Logaritmická funkcia so základom $a > 0,\ a \neq 1$

$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$.

- Logaritmická funkcia $y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$ je inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$, $x \in R$ s rovnakým základom $a > 0,\ a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Pre $a > 0,\ a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pre $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pre $x \in R$.
- Graf sa nazýva logaritmická krivka a prechádza bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ sú symetrické podľa osi x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ Prirodzený logaritmus, označenie $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (prirodzený logaritmus) majú základ e.
- Ak chceme vypočítať logaritmus s iným základom, napr. $\log_2 x$, musíme použiť konštrukciu $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

05. Elementárne funkcie I

Logaritmická funkcia so základom $a > 0,\ a \neq 1$

$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$.

- Logaritmická funkcia $y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$ je inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$, $x \in R$ s rovnakým základom $a > 0,\ a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Pre $a > 0,\ a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pre $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pre $x \in R$.
- Graf sa nazýva logaritmická krivka a prechádza bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ sú symetrické podľa osi x.
- $a = 10.\quad \Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}.\quad \Rightarrow$ Prirodzený logaritmus, označenie $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (prirodzený logaritmus) majú základ e.
- Ak chceme vypočítať logaritmus s iným základom, napr. $\log_2 x$, musíme použiť konštrukciu $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

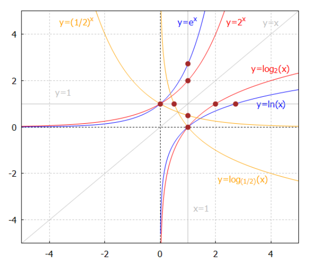
05. Elementárne funkcie I

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(exp(x),x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.5]),
explicit(log(x),x,.01,5),label(["y=ln(x)",4,1]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x",2.75,4.5]),
explicit(log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_2(x)",4,2.5]),
color=orange,explicit((1/2)^x,x,-5,5),
label(["y=(1/2)^x",-3,4.5]),
explicit(-log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/2)}(x)",3,-2.25]),
color=grey,parametric(t,t,t,-5,5),label(["y=x",4,4.5]),
parametric(1,t,t,-5,5),label(["x=1",1.5,-3.5]),
parametric(t,1,t,-5,5),label(["y=1",-3.5,1.5]),
color=brown,point_type=7,points([[1,0],[0,1],
[1,2],[2,1],[1,1/2],[1/2,1],[1,%e],[%e,1]]))$
```

05. Elementárne funkcie I

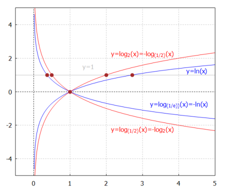
- Grafy exponenciálnych a logaritmických funkcií z predchádzajúcej strany.

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(exp(x),x,-5,5),
label(["y=e^x",1,4.5]),
explicit(log(x),x,.01,5),label(["y=ln(x)",4,1]),
color=red,explicit(2^x,x,-5,5),
label(["y=2^x",2.75,...
```
the command continues (previous page)



05. Elementárne funkcie I

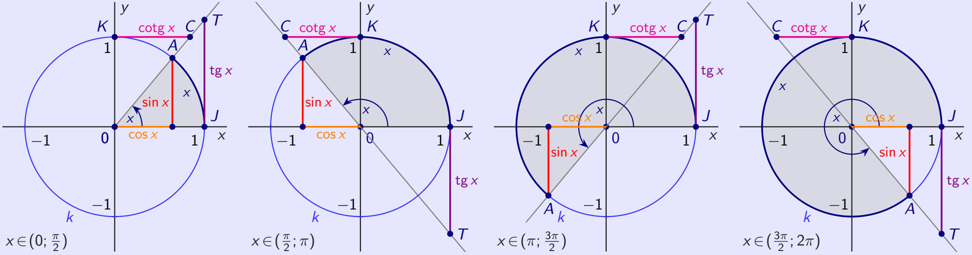
(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(log(x),x,.01,5),
label(["y=ln(x)",4.5,1.25]),
explicit(-log(x),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/e))}(x)=-ln(x)",4,-.75]),
color=red,explicit(log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_2(x)=-log_{(1/2)}(x)",3,2.25]),
explicit(-log(x)/log(2),x,.01,5),
label(["y=log_{(1/2)}(x)=-log_2(x)",3,-2.25]),
color=grey,parametric(t,1,t,-.5,5),
label(["y=1",1.5,1.5]),color=brown,point_type=7,
points([[1,0],[1/2,1],[2,1],[1/%e,1],[%e,1]])$
```



06. Elementárne funkcie II

Goniometrické (trigonometrické) funkcie sú:

- **Sínus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosínus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{ k\pi, k \in Z \} \to R$.

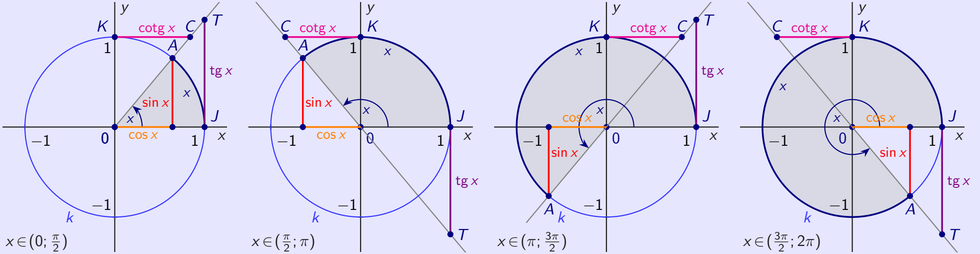


- Číslo π sa nazýva **Ludolfovo**. Jeho hodnota je približne $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π.

06. Elementárne funkcie II

Goniometrické (trigonometrické) funkcie sú:

- **Sínus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosínus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{ k\pi, k \in Z \} \to R$.



- Číslo π sa nazýva **Ludolfovo**. Jeho hodnota je približne $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π.

06. Elementárne funkcie II

- V programe Maxima majú goniometrické funkcie tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcií musia byť zadané v radiánoch.
- Ak chceme použiť stupne, musíme ich najprv previesť na radiány.

(%i3) `tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);`
`ratsimp(tangrad(22.5));`

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

`rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125`

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Na zjednodušenie práce s goniometrickými funkciami môžeme použiť príkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` alebo `spangl`, ktoré obsahujú ďalšiu podporu pre prácu s goniometrickými funkciami.
- Balíčky načítame do systému pomocou príkazu `load`.

06. Elementárne funkcie II

- V programe Maxima majú goniometrické funkcie tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcií musia byť zadané v radiánoch.
- Ak chceme použiť stupne, musíme ich najprv previesť na radiány.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
      ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

```
rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125
```

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Na zjednodušenie práce s goniometrickými funkciami môžeme použiť príkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` alebo `spangl`, ktoré obsahujú ďalšiu podporu pre prácu s goniometrickými funkciami.
- Balíčky načítame do systému pomocou príkazu `load`.

06. Elementárne funkcie II

(%i1) `tan(%pi/4);tan(%pi/6);tan(%pi/8);`

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i4) `ratsimp(tan(%pi/8));`

(%o4) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(%i5) `trigsimp(tan(%pi/8));`

(%o5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

(%i6) `load(spangl);`

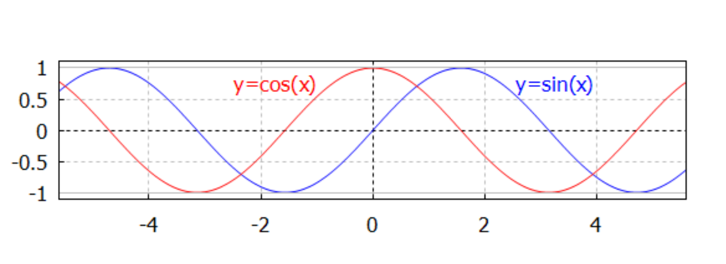
(%o6) *../share/trigonometry/spangl.mac*

(%i7) `tan(%pi/8);`

(%o7) $\sqrt{2}-1$

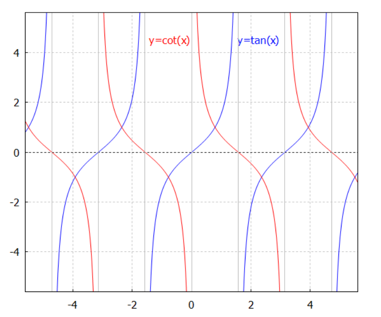
06. Elementárne funkcie II

(%i1)
```
draw2d(proportional_axes=xy,grid=true,
xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],yrange=[-1.1,1.1],
color=blue,explicit(sin(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=sin(x)",3.25,.75]),
color=red,explicit(cos(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=cos(x)",-1.75,.75]),
color=grey,parametric(t,1,t,-3*%pi,3*%pi),
parametric(t,-1,t,-3*%pi,3*%pi))$
```



06. Elementárne funkcie II

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],
yrange=[-1.75*%pi-.1,1.75*%pi+.1],
color=blue,explicit(tan(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=tan(x)",2.25,4.5]),
color=red,explicit(cot(x),x,-3*%pi,3*%pi),
label(["y=cot(x)",-.75,4.5]),
color=grey,    /* asymptotes */
parametric(0,t,t,-6,6),
parametric(%pi/2,t,t,-6,6),
parametric(-%pi/2,t,t,-6,6),
parametric(%pi,t,t,-6,6),
parametric(-%pi,t,t,-6,6),
parametric(3*%pi/2,t,t,-6,6),
parametric(-3*%pi/2,t,t,-6,6))$
```



06. Elementárne funkcie II

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2\sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám:

- **Arkussínus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1\rangle \to \langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$.
- **Arkuskosínus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1\rangle \to \langle 0; \pi\rangle$.
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú injektívne. Je potrebné ich vhodne zúžiť.

06. Elementárne funkcie II

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám:

- **Arkussínus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- **Arkuskosínus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arkustangens** $y = \mathrm{arctg}\, x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \mathrm{arccotg}\, x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú injektívne. Je potrebné ich vhodne zúžiť.

06. Elementárne funkcie II

- Cyklometrické funkcie majú tvar `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`.
- Na tomto mieste môžeme spomenúť funkciu `atan2(x,y)` definovanú vzťahom arctg $\frac{x}{y}$.

(%i4) `asin(1);asin(1),numer;`
`acos(1);acos(1),numer;`

(%o1) $\frac{\pi}{2}$

(%o2) 1.570796326794897

(%o1) 0

(%o2) 0.0

(%i7) `atan2(2,4);atan(1/2);atan(1/2),numer;`

(%o5) $\mathrm{atan}(\frac{1}{2})$

(%o6) $\mathrm{atan}(\frac{1}{2})$

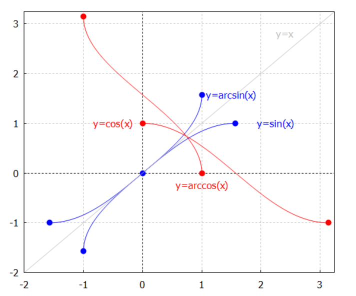
(%o7) 0.4636476090008061

Súčtové vzorce pre cyklometrické funkcie.

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pre $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}$ pre $x \in R$.

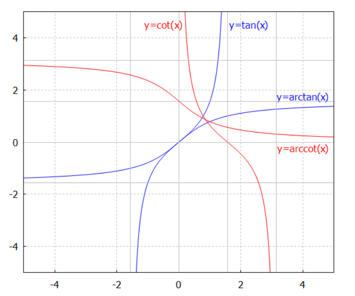
06. Elementárne funkcie II

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-2,%pi+.1],yrange=[-2,%pi+.1],
color=blue,explicit(sin(x),x,-%pi/2,%pi/2),
label(["y=sin(x)",2.25,1]),explicit(asin(x),x,-1,1),
label(["y=arcsin(x)",1.5,%pi/2]),
point_type=7, points([[0,0],[1,%pi/2],
[-1,-%pi/2],[%pi/2,1],[-%pi/2,-1]]),
color=red,explicit(cos(x),x,0,%pi),
label(["y=cos(x)",-.5,1]),
explicit(acos(x),x,-1,1),
label(["y=arccos(x)",1,-.25]),
point_type=7,
points([[0,1],[1,0],
[%pi,-1],[-1,%pi]]),
color=grey,
parametric(t,t,t,-5,5),
label(["y=x",2.4,2.8]))$
```



06. Elementárne funkcie II

(%i1)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-5,5],yrange=[-5,5],
color=blue,explicit(tan(x),x,-%pi/2+.01,%pi/2-.01),
label(["y=tan(x)",2.25,4.5]),explicit(atan(x),x,-5,5),
label(["y=arctan(x)",4,1.75]),color=grey,
parametric(t,-%pi/2,t,-5,5),parametric(t,%pi/2,t,-5,5),
parametric(-%pi/2,t,t,-5,5),parametric(%pi/2,t,t,-5,5),
color=red,explicit(cot(x),x,.01,%pi-.01),
label(["y=cot(x)",-.5,4.5]),
explicit(%pi/2-atan(x),x,-5,5),
label(["y=arccot(x)",4,-.25]),
color=grey,
parametric(t,0,t,-5,5),
parametric(t,%pi,t,-5,5),
parametric(0,t,t,-5,5),
parametric(%pi,t,t,-5,5))$
```



06. Elementárne funkcie II

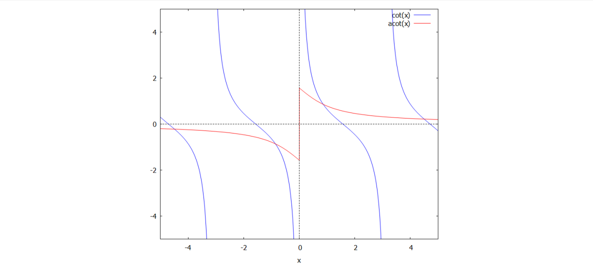
- Musíme si dať pozor na nepresnú interpretáciu funkcie arkuskotangens.

(%i4)
```
acot(-1)$
print("acot(-1)=",acot(-1),"is bad")$
%pi/2-atan(-1)$
print("acot(-1)=",%pi/2-atan(-1),"is ok")$
```

$acot(-1) = -\frac{\pi}{4}$ *is bad*

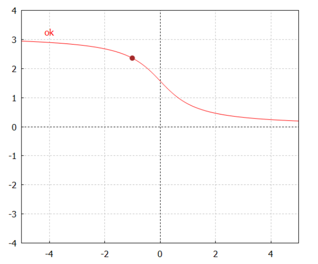
$acot(-1) = -\frac{3\pi}{4}$ *is ok*

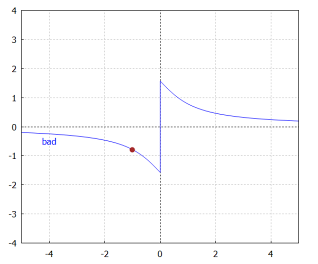
(%i5)
```
plot2d([cot(x),acot(x)],[x,-5,5],[y,-5,5])$
```



06. Elementárne funkcie II

```
(%i1) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],color=red,
      explicit(%pi/2-atan(x),x,-5,5),label(["ok",-4,3.25]),
      color=brown,point_type=7,
      points([[-1,%pi/2-atan(-1)]]))$
(%i2) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],color=blue,
      explicit(acot(x),x,-5,5),label(["bad",-4,-.5]),
      color=brown,point_type=7,points([[-1,acot(-1)]]))$
```





06. Elementárne funkcie II

Hyperbolické funkcie sú:

- **Hyperbolický sínus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $R \to R$.
- **Hyperbolický kosínus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti ako goniometrické funkcie.

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus hyperbolické. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

06. Elementárne funkcie II

Hyperbolické funkcie sú:

- **Hyperbolický sínus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $\quad R \to R$.
- **Hyperbolický kosínus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $\quad R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $\quad R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $\quad R - \{0\} \to R - \langle -1; 1 \rangle$.

- Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti ako goniometrické funkcie.

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus hyperbolické. $\quad x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm\, e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

06. Elementárne funkcie II

Moivreov vzorec. $x \in R,\ n \in N.$

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$

- Hyperbolické funkcie sú `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` a k nim inverzné hyperbolometrické funkcie sú `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

```
(%i4) sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;
(%o1) sinh(x)
(%o2) 1
(%o3) 0
(%o4) 1.313035285499331
(%i8) asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;
(%o5) asinh(x)
(%o6) 0
(%o7) 0
(%o8) 1.01844096363052
```

06. Elementárne funkcie II

Hyperbolometrické funkcie sú inverzné ku hyperbolickým funkciám:

- **Argument sínus hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right):\quad R \to R.$$
- **Argument kosínus hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right):\quad \langle 1;\infty) \to \langle 0;\infty).$$
- **Argument tangens hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argtgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x}:\qquad (-1;1) \to R.$$
- **Argument kotangens hyperbolický**
  $$y = \operatorname{argcotgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x+1}{x-1}:\qquad R - \langle -1;1\rangle \to R - \{0\}.$$

```
(%i3) ash(x):=log(x+sqrt(x^2+1))$
      a:2$ asinh(a)-ash(a),numer;
(%o3) 0.0
```

07. Limita funkcie

- Pri vyšetrovaní funkcie je potrebné charakterizovať jej lokálne vlastnosti v rôznych intervaloch a v okoliach dôležitých bodov.
- Funkcia f nemusí byť definovaná v bode, okolo ktorého ju vyšetrujeme.

Bod $a \in R^*$ sa nazýva **hromadný bod** množiny $A \subset R$,
ak pre každé okolie $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Nasledujúca definícia pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho.

Funkcia f **má v bode** $a \in R^*$ **limitu** $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, potom existuje (aspoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

07. Limita funkcie

- Pri vyšetrovaní funkcie je potrebné charakterizovať jej lokálne vlastnosti v rôznych intervaloch a v okoliach dôležitých bodov.
- Funkcia f nemusí byť definovaná v bode, okolo ktorého ju vyšetrujeme.

Bod $a \in R^*$ sa nazýva **hromadný bod** množiny $A \subset R$, ak pre každé okolie $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Nasledujúca definícia pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho.

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, potom existuje (aspoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$ a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

07. Limita funkcie

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $O(a)$ je okolie.

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$: • $f(x) = g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokiaľ existujú.

• $f(x) \leq g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokiaľ existujú.

$\forall x \in O(a),\ x \neq a$: • $f(x) < g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokiaľ existujú.

Veta o dvoch policajtoch.

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$, $O(a)$ je okolie.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in O(a),\ x \neq a:\ h(x) \leq f(x) \leq g(x). \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b, \text{ kde } b \in R^*. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

- ∞ je hromadný bod definičného oboru $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- $x > 0. \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

07. Limita funkcie

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o1) 0
```

```
(%i1) f(x):=sin(x)/x$ for i:1 thru 10 do
          (x:100^i, print(x," ",ev(f(x),numer)))$
```

$100 \;\; -0.0050636564110975 88$

$10000 \;\; -3.056143888882521 \cdot 10^{-5}$

$1000000 \;\; -3.499935021712929 \cdot 10^{-7}$

$100000000 \;\; 9.31639027109726 \cdot 10^{-9}$

$10000000000 \;\; -4.875060250875107 \cdot 10^{-11}$

$1000000000000 \;\; -6.112387023768895 \cdot 10^{-13}$

$100000000000000 \;\; -2.094083074964523 \cdot 10^{-15}$

$10000000000000000 \;\; 7.796880066069787 \cdot 10^{-17}$

$1000000000000000000 \;\; -9.929693207404051 \cdot 10^{-19}$

$100000000000000000000 \;\; -6.452512852657808 \cdot 10^{-21}$

07. Limita funkcie

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

- 0 je hromadný bod $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- $0 < x < \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.
- $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. $\Rightarrow \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0$. $\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x} = 1$.
- $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. $\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,0);
(%o1) 1
(%i2) limit(sin(x)/x,x,inf);
(%o2) 0
(%i3) limit(sin(x)/x,x,minf);
(%o3) 0
```

07. Limita funkcie

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right) = 1.$

```
(%i2) limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0);limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1) und              /* undefined */
(%o2) 1
```

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} \cdot \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{x^2+4} = \frac{3\cdot 0+2}{0+4} = \frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$

```
(%i3) limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
      limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
      limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
(%o1) 1
(%o2) 1/2
(%o3) 1/2
```

07. Limita funkcie

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)=1.$

```
(%i2)  limit(x*(%e^(1/x)-1),x,0);limit(x*(%e^(1/x)-1),x,inf);
(%o1)  und              /* undefined */
(%o2)  1
```

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}\cdot\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2}{x^2+4}=\frac{3\cdot 0+2}{0+4}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$

```
(%i3)  limit((x-2)/(x^2-3*x+2),x,2);
       limit((3*x+2*1/x)/(x+4*1/x),x,0);
       limit((x^2-3*x+2)/(x^2-2*x),x,2);
(%o1)  1
(%o2)  1/2
(%o3)  1/2
```

07. Limita funkcie

- $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+x\cdot\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}.$$

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}=\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}=1+1=2.$$

```
(%i3) limit(x/(sqrt(1+x)-sqrt(1-x)),x,0);
      limit((1-sqrt(1-x))/x,x,0);
      limit((\sqrt(x^2-1)+sqrt(x^2+1))/x,x,inf);
(%o1) 1
(%o2) 1/2
(%o3) 2
```

07. Limita funkcie

- $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \begin{bmatrix}\text{Subst.} & x = z^{12} \\ x\to 1, & z\to 1\end{bmatrix} = \lim_{z\to1}\frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1} = \lim_{z\to1}\frac{z^4-1}{z^3-1}$$
$$= \lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to1}\frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

```
(%i1) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
(%o1) 4/3
```

Ak použijeme substitúciu $x = z^{12}$, môžeme limitu zjednodušiť.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$
      g(z):=subst(z^12,x,f(x))$
      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
(%o1) lim_{z->1} (z^4-1)/(z^2·|z|-1)          /* z is positive, z=|z| */
(%o2) 4/3
```

07. Limita funkcie

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \begin{bmatrix} \text{Subst.} & x = z^{12} \\ x \to 1, & z \to 1 \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^3-1}$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to 1} \frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+z+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

```
(%i1) limit((x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1),x,1);
```
(%o1) $\frac{4}{3}$

Ak použijeme substitúciu $x = z^{12}$, môžeme limitu zjednodušiť.

```
(%i2) f(x):=(x^(1/3)-1)/(x^(1/4)-1)$
      g(z):=subst(z^12,x,f(x))$
      'limit(g(z),z,1); limit(g(z),z,1);
```
(%o1) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^2\cdot|z|-1}$ `/* z is positive, z=|z| */`

(%o2) $\frac{4}{3}$

07. Limita funkcie

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1-\infty^{-2}}+2^0=\frac{5}{1-0}+1=6.$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{a}=e^{a}$ pre $a\in R$.

```
(%i4) limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(2/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(-2/log(x)),x,0,plus);
```

(%o1) 6
(%o2) e^{a}
(%o3) e^{2}
(%o4) e^{-2}

V poslednom príklade sme vypočítali limitu výrazu 0^0 (tzv. neurčitý výraz).

Medzi **neurčité výrazy** (počítame ich pomocou limít) patria:

- $\infty-\infty$, - $\pm\infty\cdot 0$, - $\frac{0}{0}$, - $\frac{1}{0}$, - $\frac{\pm\infty}{0}$, - $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, - 0^0, - $0^{\pm\infty}$, - $1^{\pm\infty}$, - $(\pm\infty)^0$.

07. Limita funkcie

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x^{-2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1-\infty^{-2}}+2^0=\frac{5}{1-0}+1=6.$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\frac{a}{\ln x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{a}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^a=e^a$ pre $a\in R$.

```
(%i4) limit(5*x^2/(x^2-1)+2^(1/x),x,inf);
      limit(x^(a/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(2/log(x)),x,0,plus);
      limit(x^(-2/log(x)),x,0,plus);
(%o1) 6
(%o2) e^a
(%o3) e^2
(%o4) e^-2
```

V poslednom príklade sme vypočítali limitu výrazu 0^0 (tzv. neurčitý výraz).

Medzi **neurčité výrazy** (počítame ich pomocou limít) patria:

- $\infty-\infty$, • $\pm\infty\cdot 0$, • $\frac{0}{0}$, • $\frac{1}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{0}$, • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, • 0^0, • $0^{\pm\infty}$, • $1^{\pm\infty}$, • $(\pm\infty)^0$.

07. Limita funkcie

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2)-\ln x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \ln e^2 = 2.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix} \text{Subst.} & z=tx \\ x\to 0, & z\to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\frac{z}{t}}{\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\ln(1+z)}$
$= \frac{1}{t}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{t}$ pre $t\in R,\ t\neq 0.$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix} \text{Subst.}\ z=3x+1 \\ x\to\infty, \quad z\to\infty \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}}$
$= \lim\limits_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[e^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

```
(%i3) limit(x*(log(x+2)-log(x)),x,inf);
      limit(x/log(1+t*x),x,0);
      limit(((3*x-2)/(3*x+1))^x,x,inf);
```

(%o1) 2
(%o2) $\frac{1}{t}$
(%o3) e^{-1}

07. Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti aj v iných ako vlastných bodoch:

- Pre $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodov $a \in R$, pre ktoré platí $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice (vertikálna)** grafu f,
  ak $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (aspoň jedna z limít je nekonečná).
- Priamka $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f,
  ak $\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim_{x\to \infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

Špeciálne asymptota $y = q$ sa nazýva **horizontálna asymptota**,
t.j. $k = 0$ a $\lim_{x\to -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim_{x\to \infty} f(x) = q$.

07. Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti aj v iných ako vlastných bodoch:

- Pre $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodov $a \in R$, pre ktoré platí $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice** (**vertikálna**) grafu f,
  ak $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ (aspoň jedna z limít je nekonečná).
- Priamka $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f,
  ak $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Špeciálne asymptota $y = q$ sa nazýva **horizontálna asymptota**,
t.j. $k = 0$ a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = q$.

07. Limita funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, pričom $D(f)$ je neohraničená množina.

- Priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existujú $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkcia $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Priamka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ je asymptota so smernicou $\frac{1}{4}$.

07. Limita funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, pričom $D(f)$ je neohraničená množina.

- Priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existujú $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkcia $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Priamka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ je asymptota so smernicou $\frac{1}{4}$.

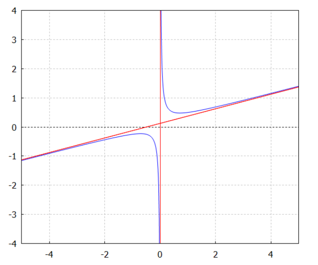
07. Limita funkcie

```
(%i10) f(x):=(2*x^2+x+1)/(8*x); km:limit(f(x)/x,x,minf)$
       kp:limit(f(x)/x,x,inf)$
       qm:limit(f(x)-km*x,x,minf)$ qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf)$
       dm(x):=km*x+qm$ dp(x):=kp*x+qp$ dm(x);dp(x);
       draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-5,5],yrange=[-4,4],
       color=blue,explicit(f(x),x,-8,0),
       explicit(f(x),x,0,8),
       color=red,parametric(0,t,t,-5,5),
       explicit(dm(x),x,-8,8),
       explicit(dp(x),x,-8,8))$
```

(%o1) $f(x) := \frac{2x^2+x+1}{8x}$

(%o8) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$

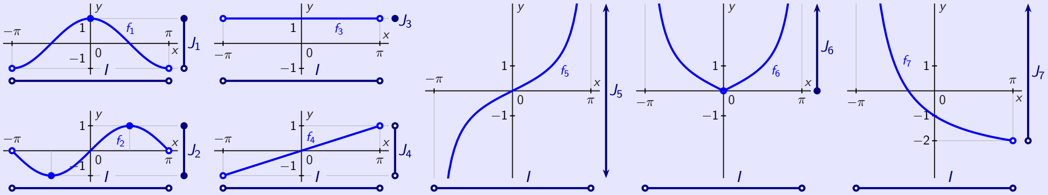
(%o9) $\frac{x}{4} + \frac{1}{8}$



08. Spojitosť funkcie

Ak je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$, potom množina $f(I)$ je interval.

- $I = \langle a; b\rangle$ je uzavretý interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ je uzavretý interval.
- I nie je uzavretý interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ môže byť intervalom ľubovoľného typu.



- $f_1(x) = \cos x$: $(-\pi; \pi) \to J_1 = (-1; 1\rangle$.
- $f_2(x) = \sin x$: $(-\pi; \pi) \to J_2 = \langle -1; 1\rangle$.
- $f_3(x) = 1$: $(-\pi; \pi) \to J_3 = \{1\}$.
- $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_4 = (-1; 1)$.
- $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $(-\pi; \pi) \to J_5 = (-\infty; \infty)$.
- $f_6(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$: $(-\pi; \pi) \to J_6 = \langle 0; \infty)$.
- $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_7 = (-2; \infty)$.

03. Diferenciálny počet

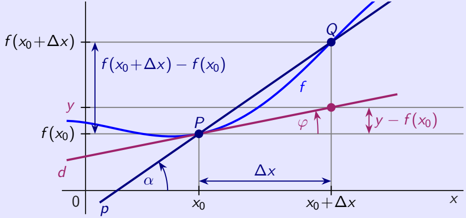
Matematická analýza podporovaná wxMaxima

01. Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ ležia na grafe f.
- Priamka PQ má smernicu $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Dotyčnica k f v bode P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$,

  kde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ je jej smernica.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$
- $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$,
  - $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$,
  - $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ smeruje k dotyčnici).

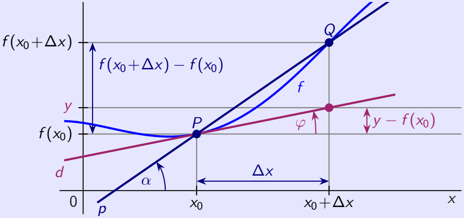
- Dotyčnica má smernicu $\operatorname{tg} \varphi = \lim\limits_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometrický význam derivácie funkcie v bode. – Smernica dotyčnice.

01. Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ ležia na grafe f.
- Priamka PQ má smernicu $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Dotyčnica k f v bode P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$,
  kde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ je jej smernica.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ smeruje k dotyčnici).

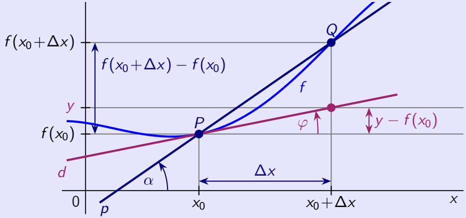
- Dotyčnica má smernicu $\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometrický význam derivácie funkcie v bode. – Smernica dotyčnice.

01. Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ ležia na grafe f.
- Priamka PQ má smernicu $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Dotyčnica k f v bode P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$ je jej smernica.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$
  - $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$,
  - $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$,
  - $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ smeruje k dotyčnici).

- Dotyčnica má smernicu $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometrický význam derivácie funkcie v bode. – Smernica dotyčnice.

01. Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **deriváciu v bode** $x_0 \in D(f)$,
označenie $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ alebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocou diferenciálov,

ak existuje • $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

- $f'(x_0) \in R$. Vlastná (konečná)
- $f'(x_0) = \infty$ alebo $f'(x_0) = -\infty$. Nevlastná (nekonečná)

$\Big\}$ derivácia f v bode x_0.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bode x_0.

Spojitosť funkcie f v bode x_0 nezaručuje existenciu $f'(x_0)$.

Funkcia f: $y = |x|$ je spojitá v bode $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

01. Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **deriváciu v bode** $x_0 \in D(f)$,
označenie $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ alebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocou diferenciálov,

ak existuje • $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ f'(x_0) \in R. & \text{Vlastná (konečná)} \\ \bullet\ f'(x_0) = \infty \text{ alebo } f'(x_0) = -\infty. & \text{Nevlastná (nekonečná)} \end{array}\right\} \text{derivácia } f \text{ v bode } x_0.$$

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bode x_0.

Spojitosť funkcie f v bode x_0 nezaručuje existenciu $f'(x_0)$.

Funkcia $f\colon y = |x|$ je spojitá v bode $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

01. Derivácia reálnej funkcie

$f'(x_0)$ predstavuje geometricky smernicu dotyčnice ku grafu f v bode x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Dotyčnica d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bode x_0.
  Dotyčnica d: $x = x_0$ bez smernice (vertikálna).

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

01. Derivácia reálnej funkcie

$f'(x_0)$ predstavuje geometricky smernicu dotyčnice ku grafu f v bode x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Dotyčnica d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bode x_0.
  Dotyčnica d: $x = x_0$ bez smernice (vertikálna).

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

01. Derivácia reálnej funkcie

V predchádzajúcom príklade sme vypočítali deriváciu $f'(x)$ ale nepodarilo sa nám ju primerane zjednodušiť. Použijeme príkaz `subst`.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `fp:subst(a,sqrt(x^2+1),f1(x));`

(fp) $\frac{\frac{x}{a}+1}{x+a}$

(%i5) `ratsimp(fp);`

(%o5) $\frac{1}{a}$

(%i6) `subst(sqrt(x^2+1),a,ratsimp(fp));`

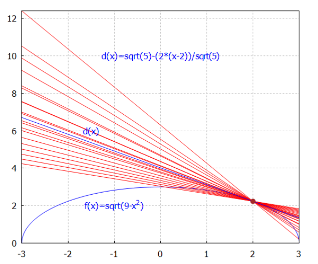
(%o6) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

01. Derivácia reálnej funkcie

Určíme dotyčnicu v bode 2 k polkružnici $y = \sqrt{9 - x^2}$.

```
(%i8) f(x):=sqrt(9-x^2)$ p(a,b):=(f(b)-f(a))/(b-a)$
      s(x,a,b):=p(a,b)*(x-a)+f(a)$
      S:makelist(explicit(s(x,2,-.15+.25*i),x,-3,3),i,1,20)$
      f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      d(x):=f(2)+subst(2,x,f1(x))*(x-2)$
      print("Secant d(x)=",d(x)," in point 2 is a blue")$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,
      color=blue,explicit(f(x),x,-3,3),color=red,S,
      color=blue,explicit(d(x),x,-3,3),
      point_type=7,color=brown,
      points([[2,f(2)]]),
      color=blue,label(["d(x)",-1.5,6]),
      label(["f(x)=sqrt(9-x^2)",-1,2]),
      label([concat("d(x)=",
            string(d(x))),0,10]))$
```

Secant $d(x) = \sqrt{5} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{5}}$ in point 2 is a blue

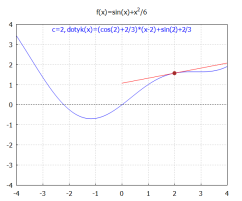


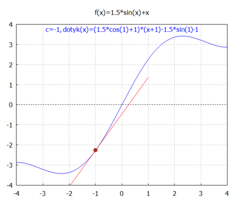
01. Derivácia reálnej funkcie

Zostrojíme dotyčnicu ku grafu funkcie f v bode c.

(%i6)
```
c:2$ f(x):=x^2/6+sin(x)$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
d(x):=f(c)+subst(c,x,f1(x))*(x-c)$
print("Secant y=d(x)=",d(x)," in point",c)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,xrange=[-4,4],
yrange=[-4,4],color=blue,explicit(f(x),x,-4,4),
color=red,explicit(d(x),x,c-2,c+2),
point_type=7,color=brown,points([[c,f(c)]]),
color=blue,title=concat("f(x)=",string(f(x))),
label([concat("c=",string(c),",
    d(x)=",string(d(x))),0,3.75]))$
```

Secant $y = d(x) = (\cos(2) + \frac{2}{3})(x - 2) + \sin(2) + \frac{2}{3}$ in point 2





02. Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Najlepšia lokálna lineárna aproximácia.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

- Aproximácia funkcie f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0
  pomocou dotyčnice d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$
  je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnej funkcie (priamky).

Vypočítajte približne $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nech $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Presne $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

02. Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Najlepšia lokálna lineárna aproximácia.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

- Aproximácia funkcie f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0
  pomocou dotyčnice d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$
  je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnej funkcie (priamky).

Vypočítajte približne $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nech $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Presne $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

02. Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Premenná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.
Aproximácia funkcie f má zmysel iba pre x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

02. Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

```
(%i9)  c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
       p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
       h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
       subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Premenná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.
Aproximácia funkcie f má zmysel iba pre x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

02. Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Vypočítajte približne $\sqrt[6]{1,06}$ (iné riešenie).

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1} = (x+1)^{1/6}$, $x > -1$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0) = f(0) = 1$.
- $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.
- Nech $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x+1} = f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot (x-0) = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(0.06) \approx \frac{0.06+6}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Zmeníme prvé príkazy `c:.06`, `f(x):=(x+1)^(1/6)`, `s:0` v predchádzajúcom príklade.

```
(%i9) c:.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$ s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x}{6} + 1$

$c = 0.06 \quad f(0.06) = 1.0097588$ approx 1.01

02. Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Vypočítajte približne $\sqrt[6]{1,06}$ (iné riešenie).

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1} = (x+1)^{1/6}$, $x > -1$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0) = f(0) = 1$.
- $f'(x) = [(x+1)^{1/6}]' = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6}$.
- Nech $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x+1} = f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot (x-0) = 1 + \frac{x}{6} = \frac{x+6}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(0.06) \approx \frac{0.06+6}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Zmeníme prvé príkazy `c:.06`, `f(x):=(x+1)^(1/6)`, `s:0` v predchádzajúcom príklade.

```
(%i9) c:.06$ f(x):=(x+1)^(1/6)$ s:0$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x}{6} + 1$

$c = 0.06 \quad f(0.06) = 1.0097588$ approx 1.01

02. Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Výpočet $f^{(n)}$, $n \in N$ môže byť vo všeobecnosti veľmi prácny.

Funkcia $y = x^k$, $x \in R$, kde $k \in N$.

- $[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, $x \in R$ pre $n = 1, 2, \ldots, k$,
  $$[x^k]' = kx^{k-1},\ [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2},\ [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3},\ \ldots,\ [x^k]^{(k)} = k!.$$
- $[x^k]^{(n)} = 0$, $x \in R$ pre $n = k+1, k+2, k+3, \ldots,$
  $$[x^k]^{(k+1)} = [k!]' = 0,\ [x^k]^{(k+2)} = [x^k]^{(k+3)} = [0]' = 0,\ \ldots$$

```
(%i9) f(x,k):=x^k;fn(x,k,n):=diff(f(x,k),x,n)$
      fn(x,k,1);fn(x,k,2);fn(x,k,k);
      fn(x,5,1);fn(x,5,2);fn(x,5,5);fn(x,5,6);
```

(%o1) $f(x,k) := x^k$

(%o3) kx^{k-1}

(%o4) $(k-1)kx^{k-2}$

(%o5) $\frac{d^k}{dx^k}x^k$

(%o6) $5x^4$

(%o7) $20x^3$

(%o8) 120

(%o9) 0

03. Aplikácie derivácie funkcie

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12.$

- $f(x) = x^3 - 8$, $x \in R$, $g(x) = x - 2$, $x \in R$. $O(2)$ môžeme zvoliť ľubovoľne, napr. $O(2) = R$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f'(x) = 3x^2,\ g'(x) = 1 \text{ pre } x \in R - \{2\}.\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12.\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2} (x^3-8) = \lim\limits_{x\to 2} (x-2) = 0.\end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = 12.$$

```
(%i9) f(x):=(x^3-8)/(x-2)$
      fc(x):=num(f(x))$ fc(x);fm(x):=denom(f(x))$ fm(x);
      'limit(f(x),x,2); limit(f(x),x,2);
      'limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,2);
```

(%o3) $x^3 - 8$

(%o5) $x - 2$

(%o6) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

(%o7) 12

(%o8) $3 \lim\limits_{x\to 2} x^2$

(%o9) 12

03. Aplikácie derivácie funkcie

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

```
(%i4) f(x):=log(x)/x$
      fc(x):=num(f(x))$
      fm(x):=denom(f(x))$
      limit(diff(fc(x),x,1)/diff(fm(x),x,1),x,inf);
(%o4) 0
```

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$

  $= [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$

  $= [L'H\frac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

  $= [L'H\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \cdots$

L'Hospitalovo pravidlo nemôžeme použiť.

03. Aplikácie derivácie funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$, okolie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 je definovaný ako

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Pre $x_0 = 0$ sa nazýva **Maclaurinov polynóm**

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Zvyšok $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie f pomocou $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$. (Lagrangeov tvar.)

03. Aplikácie derivácie funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
okolie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 je definovaný ako

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Pre $x_0 = 0$ sa nazýva **Maclaurinov polynóm**

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Zvyšok $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie f pomocou $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$. (Lagrangeov tvar.)

03. Aplikácie derivácie funkcie

Vypočítame Taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Ručné derivovanie je dosť prácne.

```
(%i2) f(x):=sqrt(x^2+1)$ print("f(x)=", f(x),
      ", f'(x)=", diff(f(x),x),
      ", f''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,2)),
      ", f'''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,1);
```

$$1 + \cdots$$

```
(%i4) taylor(f(x),x,0,2);
```

$$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,3);
```

$$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

```
(%i6) taylor(f(x),x,0,4);
```

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$$

```
(%i7) taylor(f(x),x,0,18);
```

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \frac{21x^{12}}{1024} + \frac{33x^{14}}{2048} - \frac{429x^{16}}{32768} + \frac{715x^{18}}{65536} + \cdots$$

03. Aplikácie derivácie funkcie

Počítame Taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Polynóm `tp1` je deviateho stupňa (prakticky ôsmeho stupňa), preto výstup príkazu `coeff(tp1,x,10))` je číslo 0.
- Polynóm `tp2` je desiateho stupňa a výstup príkazu `coeff(tp2,x,10))` je skutočný koeficient $c_{10} = 7/256$.

```
(%i1) f(x):=sqrt(x^2+1)$
(%i2) tp1:taylor(f(x),x,0,9);
```
(tp1) $1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \cdots$

```
(%i3) print("c_3=",coeff(tp1,x,3),
            ", c_4=",coeff(tp1,x,4),
            ", c_10=",coeff(tp1,x,10))$
```
c_3= 0, c_4= $-\frac{1}{8}$, c_10= 0

```
(%i4) tp2:taylor(f(x),x,0,10);
```
(tp2) $1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} + \cdots$

```
(%i5) print("c_3=",coeff(tp2,x,3),
            ", c_4=",coeff(tp2,x,4),
            ", c_10=",coeff(tp2,x,10))$
```
c_3= 0, c_4= $-\frac{1}{8}$, c_10= $\frac{7}{256}$

03. Aplikácie derivácie funkcie

$f(x) = \ln x$, $x \in (0;\infty)$, $x_0 = 1$, $f(1) = 0$, $n \in N$.

- $f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $x > 0$.
- $f^{(2)}(x) = -x^{-2}$, $x > 0$.
- $f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $x > 0$.
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4}$, $x > 0$.

  $\dots$
- $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$, $x > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

- $f^{(1)}(1) = 1 = 0!$.
- $f^{(2)}(1) = -1 = -1!$.
- $f^{(3)}(1) = 2 \cdot 1 = 2!$.
- $f^{(4)}(1) = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -3!$.
- $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

$\Rightarrow$ • $T_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(x-1)^k}{k}$, $x \in O(1)$.

(%i1) `taylor(log(x),x,1,5);`

(%o1) $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}+\cdots$

(%i2) `taylor(log(x),x,1,8);`

(%o2) $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^7}{7}-\frac{(x-1)^8}{8}+\cdots$

03. Aplikácie derivácie funkcie

Niekedy je výhodnejšie vyjadriť $f(x) = \ln x$ v tvare Maclaurinovho polynómu.

- $f(x) = \ln x,\ x \in (0;\infty),\ x_0 = 1.$
  $$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(x-1)^k}{k},\ x \in O(1),\ n \in N.$$
- $x = t + 1,\ f(x) = f(t+1) = \ln(t+1),\ t \in (-1;\infty).$
  $$T_n(x) = T_n(t+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(t+1-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot t^k}{k},\ x \in O(1),\ t \in O(0),\ n \in N.$$
- Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in N$:
  $$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},\ x \in O(0).$$

```
(%i1) taylor(log(x+1),x,0,8);
```
(%o1) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \cdots$
```
(%i2) taylor(log(x),x,1,8);
```
(%o2) $x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^8}{8} + \cdots$
```
(%i3) taylor(log(x+1),x,1,8);
```
(%o3) $\log(2) + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{24} - \frac{(x-1)^4}{64} + \frac{(x-1)^5}{160} - \frac{(x-1)^6}{384} + \frac{(x-1)^7}{896} - \frac{(x-1)^8}{2048} + \cdots$

03. Aplikácie derivácie funkcie

Funkcie $y = \mathrm{e}^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ môžeme pomocou **Maclaurinovho polynómu** aproximovať pre všetky $x \in R$. Potrebnú presnosť dosiahneme dostatočne veľkým stupňom n.

- $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in R$.
  $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$, $x \in R$, $n \in N$.
- $f(x) = \sin x$, $x \in R$.
  $T_{2k+1}(x) = 0 + \frac{x}{1!} + 0 + \frac{-x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, $x \in R$, $n \in N$.
- $f(x) = \cos x$, $x \in R$
  $T_{2k}(x) = 1 + 0 + \frac{-x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$, $x \in R$, $n \in N$.

(%i1) `taylor(exp(x),x,0,10);`

(%o1) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

(%i2) `taylor(sin(x),x,0,10);`

(%o2) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \cdots$

(%i3) `taylor(cos(x),x,0,10);`

(%o3) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \cdots$

03. Aplikácie derivácie funkcie

Nájdeme Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$.

- Ak označíme $g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in R$, $t = x^2$, potom $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)} = g(x^2) = g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \geq 0$.
- Pre Maclaurinov polynóm $P_n(t)$ funkcie $g(t)$, $t \geq 0$ a Maclaurinov polynóm $T_{2n}(x)$ funkcie $f(x)$, $x \in R$ platí:

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x^2)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = T_{2n}(x).$$

Maclaurinov polynóm stupňa $2n$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$, $x \in R$ má tvar

- $T_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$, $x \in R$.

(%i1) `taylor(exp(x^2),x,0,10);`

(%o1) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \cdots$

(%i3) `subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,5));`

`subst(x^2,t,taylor(exp(t),t,0,10));`

(%o2) $\frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

(%o3) $\frac{x^{20}}{3628800} + \frac{x^{18}}{362880} + \frac{x^{16}}{40320} + \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

04. Vyšetrovanie priebehu funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna.

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkcia f je na I

- rastúca. $\Leftrightarrow$ pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) > 0$.
- klesajúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0$.
- neklesajúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$.
- nerastúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$.
- konštantná. $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnútorný bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- Funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

- Funkcia f môže mať lokálny extrém aj v bode, kde derivácia neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$.

04. Vyšetrovanie priebehu funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna.

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkcia f je na I

- rastúca. $\Leftrightarrow$ pre všetky $x \in I$ platí • $f'(x) > 0$.
- klesajúca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) < 0$.
- neklesajúca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \geq 0$.
- nerastúca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \leq 0$.
- konštantná. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) = 0$.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnútorný bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- Funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkcia f môže mať lokálny extrém aj v bode, kde derivácia neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$.

04. Vyšetrovanie priebehu funkcie

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• konvexná.	$\Leftrightarrow$	f' je na I	• neklesajúca.
	• konkávna.	$\Leftrightarrow$		• nerastúca.
	• ostro konvexná.	$\Leftrightarrow$		• rastúca.
	• ostro konkávna.	$\Leftrightarrow$		• klesajúca.

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f''(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• konvexná.	$\Leftrightarrow$	pre všetky $x \in I$ platí	• $f''(x) > 0$.
	• konkávna.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) < 0$.
	• ostro konvexná.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \geq 0$.
	• ostro konkávna.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \leq 0$.

Pri vyšetrovaní konvexnosti a konkávnosti funkcie f musíme preskúmať:

- Všetky body $x \in D(f)$, kde je funkcia f spojitá a pre ktoré existuje $f''(x) = 0$.
- Všetky body $x \in D(f)$, kde je funkcia f spojitá a v ktorých $f''(x)$ neexistuje.

04. Vyšetrovanie priebehu funkcie

Predchádzajúce výsledky môžeme zovšeobecniť.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k-1$, $k \in N$ (nepárne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f je rastúca v bode x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f je klesajúca v bode x_0.

  $f(x_0)$ nie je extrém.
- $n = 2k$, $k \in N$ (párne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k+1$, $k \in N$ (nepárne) .
  - x_0 je inflexný bod funkcie f.
- $n = 2k$, $k \in N$ (párne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f je ostro konvexná v bode x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f je ostro konkávna v bode x_0.

05. Priebeh funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodicita, prípadne iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti, hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je f kladná a záporná.
- f', stacionárne body, lokálne a globálne extrémy, intervaly, na ktorých f rastie, klesá a je konštantná.
- f'', inflexné body, intervaly, na ktorých je f konvexná a konkávna.
- Asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.
- Obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.

  Graf nám zvyčajne poskytne najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie. Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje.

  Mnohokrát sú ale nedostatočné, preto ich musíme doplniť vhodne zvolenými funkčnými hodnotami.

05. Priebeh funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{8x-16}{x^2}$.

```
(%i1) f(x):=(8*x-16)/x^2;
```
(%o1) $f(x) := \frac{8x-16}{x^2}$

- $D(f) = R - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

  Pomocou príkazu `denom` (denominator) zistíme, kedy je menovateľ nulový.

```
(%i3) fm:denom(f(x));solve(fm=0,x);
```
(fm) x^2

(%o3) $[x = 0]$

- f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.
- f je spojitá na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$, je nespojitá v bode 0.

05. Priebeh funkcie

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right) = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0.$

```
(%i5) limit(f(x),x,minf);limit(f(x),x,inf);
(%o4) 0
(%o5) 0
```

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = \frac{-16}{0^+} = -\infty.$

```
(%i7) limit(f(x),x,0,minus);limit(f(x),x,0,plus);
(%o6) -∞
(%o7) -∞
```

- Bod $x = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. typu.
- $x = 0$ je asymptota bez smernice.

05. Priebeh funkcie

- $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = 0. \Leftrightarrow 8x - 16 = 0. \Leftrightarrow x = 2.$
  Príkazom `num` (numerator) zistíme, kedy je čitateľ nulový.

```
(%i9) fc:num(f(x));solve(fc=0,x);
```

(fc) $8x - 16$

(%o9) $[x = 2]$

- $f(2) = 0.$
- f nie je definovaná v bode $x = 0.$
- Funkcia f nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$.
- Stačí vybrať ľubovoľné body z daných intervalov a overiť ich hodnoty (napr. -1, 1, 3).

```
(%i13) f(2);f(-1);f(1);f(3);
```

(%o10) 0

(%o11) -24

(%o12) -8

(%o13) $\frac{8}{9}$

05. Priebeh funkcie

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f(-1) = -24 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x) < 0$ pre $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 2)$, $f(1) = -8 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x) < 0$ pre $x \in (0; 2)$.
- $3 \in (2; \infty)$, $f(3) = \frac{8}{9} > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x) > 0$ pre $x \in (2; \infty)$.

- $f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x-8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i15) f1(x):=diff(f(x),x,1)$
       ratsimp(f1(x));
```
(%o15) $-\frac{8x-32}{x^3}$

- $f'(x) = \frac{32-8x}{x^3} = 0. \Leftrightarrow 32 - 8x = 0. \Leftrightarrow x = 4.$

```
(%i16) solve(f1(x)=0,x);
```
(%o16) $[x = 4]$

05. Priebeh funkcie

- f' je nespojitá v bode 0.

```
(%i18) f1m:denom(ratsimp(f1(x)));solve(f1m=0,x);
```
(f1m) x^3

(%o18) $[x = 0]$

- $f'(4) = 0$.
- f' nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$, $(4; \infty)$.
- Stačí vybrať ľubovoľné body z daných intervalov a overiť ich hodnoty (napr. -1, 1, 5).

```
(%i22) subst(4,x,f1(x));
       subst(-1,x,f1(x));subst(1,x,f1(x));subst(5,x,f1(x));
```
(%o19) 0

(%o20) -40

(%o21) 24

(%o22) $-\frac{8}{125}$

05. Priebeh funkcie

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f'(-1) = -40 < 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) < 0$, f je klesajúca pre $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 4)$, $f'(1) = 24 > 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) > 0$, f je rastúca pre $x \in (0; 4)$.
- $5 \in (4; \infty)$, $f'(5) = -\frac{8}{125} < 0$. $\Rightarrow$ • $f'(x) < 0$, f je klesajúca pre $x \in (4; \infty)$.

- f má lokálne maximum v bode $x = 4$ a tiež globálne maximum $f(4) = 1$.

```
(%i23) f(4);
(%o23) 1
```

- f nemá lokálne a ani globálne minimum.
- $f''(x) = \left[\frac{32-8x}{x^3}\right]' = \frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6} = \frac{16x^3-96x^2}{x^6} = \frac{16x-96}{x^4}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

```
(%i25) f2(x):=diff(f(x),x,2)$ ratsimp(f2(x));
(%o25) (16x-96)/x^4
```

05. Priebeh funkcie

- $f''(x) = \frac{16x-96}{x^4} = 0. \Leftrightarrow 16x - 96 = 0. \Leftrightarrow x = 6.$

```
(%i26) solve(f2(x)=0,x);
```
(%o26) $[x = 6]$

- f'' je nespojitá v bode 0.

```
(%i28) f2m:denom(ratsimp(f2(x)));solve(f2m=0,x);
```
(f2m) x^4

(%o28) $[x = 0]$

- $f''(6) = 0.$
- f'' nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Funkcia f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; \infty)$.
- Stačí vybrať ľubovoľné body z daných intervalov a overiť ich hodnoty (napr. -1, 1, 7).

05. Priebeh funkcie

```
(%i32) subst(6,x,f2(x));
       subst(-1,x,f2(x));subst(1,x,f2(x));subst(7,x,f2(x));
```

(%o29) 0
(%o30) -112
(%o31) -80
(%o32) $\frac{16}{2401}$

- $-1 \in (-\infty; 0)$, $f''(-1) = -112 < 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) < 0$, f je konkávna pre $x \in (-\infty; 0)$.
- $1 \in (0; 6)$, $f''(1) = -80 < 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) < 0$, f je konkávna pre $x \in (0; 6)$.
- $7 \in (6; \infty)$, $f''(7) = \frac{16}{2401} > 0$. $\Rightarrow$ • $f''(x) > 0$, f je konvexná pre $x \in (6; \infty)$.

- $x = 6$ je inflexný bod funkcie f.

```
(%i33) f(6);
```

(%o33) $\frac{8}{9}$

05. Priebeh funkcie

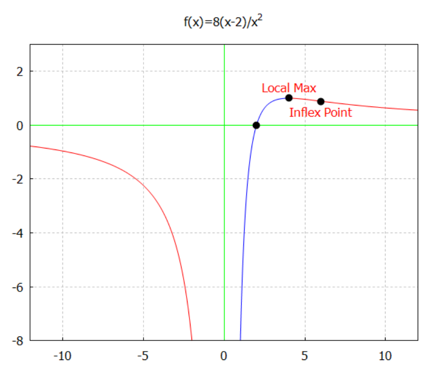
- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right) = 0 - 0 = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0\cdot x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$
- $y = kx + q = 0\cdot x + 0 = 0$, t.j. $y = 0$ je asymptota so smernicou (horizontálna).

```
(%i35) km:limit(f(x)/x,x,minf);
       qm:limit(f(x)-km*x,x,minf);
(km)   0
(qm)   0
(%i37) kp:limit(f(x)/x,x,inf);
       qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf);
(kp)   0
(qp)   0
```

- $H(f) = (-\infty; 1\rangle.$

05. Priebeh funkcie

```
(%i38) draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
       xrange=[-12,12],yrange=[-8,3],title="f(x)=8(x-2)/x^2",
       color=blue,explicit(f(x),x,0,4),
       color=red,explicit(f(x),x,-12,0),explicit(f(x),x,4,12),
       label(["Inflex Point",6,f(6)-.4],
       ["Local Max",4,f(4)+.4]),
       color=green,
       parametric(0,t,t,-8,3),
       parametric(t,0,t,-12,12),
       color=black,point_type=7,
       points([[4,f(4)],
       [6,f(6)],
       [2,f(2)]]))$
```



04. Neurčitý integrál

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

01. Základné pojmy

Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I sa líšia od seba konštantou a tvoria množinu $\{F(x) + c, c \in R\}$, pričom F je ľubovoľná primitívna funkcia.
Táto množina sa nazýva **neurčitý integrál funkcie** f **na intervale** I a označuje sa

- $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I.

$\Rightarrow$ • Existuje $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Na integrovanie sa používa príkaz `integrate`.

```
(%i1) 'integrate(1/(1+x^2),x)
```

(%o1) $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

01. Základné pojmy

```
(%i1) f(x):=1/(1-x^2); integrate(f(x),x);
```

(%o1) $\frac{1}{1-x^2}$

(%o2) $\frac{\log(x+1)}{2} - \frac{\log(x-1)}{2}$

- Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I.

Funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale I, $c \in R$.

Pre všetky $x \in I$ platí:

- $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x)$.
- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$.

```
(%i1) integrate(1/(1+x^2),x);
```

(%o1) $\operatorname{atan} x$

```
(%i2) diff(%,x);
```

(%o2) $\frac{1}{x^2+1}$

01. Základné pojmy

- $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{[\sin x]'}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + c,\ x \in R - \{k\pi,\ k \in Z\},\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c,$
  $\displaystyle x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\},\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{5}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \geq 0,\ c \in R.$

(%i1) `integrate(cot(x),x);`

(%o1) $\log(\sin x)$

(%i2) `integrate(tan(x),x);`

(%o2) $\log(\sec x)$

(%i3) `trigsimp(%);`

(%o3) $-\log(\cos x)$

(%i4) `integrate((x^3)^(1/5),x);`

(%o4) $\dfrac{5x^{5/8}}{8}$

01. Základné pojmy

- $$\int |x|\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c = \frac{x\cdot x}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{pre } x \geq 0, \\ \displaystyle\int (-x)\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + c = \frac{x\cdot(-x)}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{pre } x < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int |x|\,dx = \frac{x\,|x|}{2} + c,\ x \in R,\ c \in R.$

```
(%i1) integrate(abs(x),x);
```
(%o1) $\frac{x\,|x|}{2}$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c,\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).$ (tabuľkový integrál).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2-1),x);
```
(%o1) $\log\left(2\sqrt{x^2-1} + 2x\right)$

02. Metódy integrovania

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c,\ x \in R.$ (tabuľkový integrál).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2+1),x);
(%o1) asinh x
```

- Oba výsledky sú správne, pretože argument sínus hyperbolický je definovaný ako $y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in R$ (pozri elementárne funkcie).

Metóda rozkladu.

Funkcie F, G sú primitívne k funkciám f, g na intervale I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$.

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na intervale I a platí:

- $\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x) + bG(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- V praxi píšeme priamo $\int [af(x) + bg(x)]\,dx = aF(x) + bG(x) + c.$

02. Metódy integrovania

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right] dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$
  $x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x}\, dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x}\, dx = \int \left[x - 2 + \frac{1}{x}\right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,\ x \in R - \{0\},\ c \in R.$
- $\displaystyle\int \left[2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right] dx = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3 \operatorname{arctg} x + c,\ x \in R,\ c \in R.$

(%i1) `integrate(1/(sin(x)^2*cos(x)^2),x);`

(%o1) $\tan x - \frac{1}{\tan x}$

(%i2) `integrate((x-1)^2/x,x);`

(%o2) $\log x + \frac{x^2-4x}{2}$

(%i3) `integrate(2*cos(x)+x^3+3/(x^2+1),x);`

(%o3) $2\sin x + 3\operatorname{atan} x + \frac{x^4}{4}$

02. Metódy integrovania

Metóda per partes.

Funkcie u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$

• $[uv]' = u'v + uv'$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle uv = \int [uv]' = \int u'v + \int uv'$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v$.

- Metódu per partes môžeme použiť niekoľkokrát za sebou, ale musíme dávať pozor, aby sme sa opätovným použitím nevrátili k pôvodnému integrálu.
- Metóda per partes sa používa pomerne často. Je vhodná na integrovanie funkcií

$$P(x)\,\mathrm{e}^{ax}, \quad P(x)\cos ax, \quad P(x)\sin ax, \quad P(x)\ln Q(x), \quad P(x)\,\mathrm{arctg}\,Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ sú reálne polynómy, $a \in R$, $a \neq 0$.

- $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

02. Metódy integrovania

- $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{0+2x}{1+x^2}\,dx$
  $\displaystyle = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln \left|1+x^2\right| + c = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + c, \ x \in R, \ c \in R.$
- $\displaystyle\int x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c,$
  $x \in R, \ c \in R.$
- $\displaystyle\int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c, \ x \in R, \ c \in R.$

(%i1) `u:x; v:integrate(cos(x),x);`
(u) x
(v) $\sin x$
(%i3) `u*v-integrate(v,x);`
(%o3) $x \sin x + \cos x$
(%i4) `integrate(x*cos(x),x);`
(%o4) $x \sin x + \cos x$

02. Metódy integrovania

- $I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n \mathrm{e}^x - n\int x^{n-1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1},\ n \in N.$

$\Rightarrow$
- $I_0 = \int x^0 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$
- $I_1 = x\,\mathrm{e}^x - II_0 = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,$
- $I_2 = x^2 \mathrm{e}^x - 2II_1 = x^2 \mathrm{e}^x - 2\big[x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\big] + c = x^2 \mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + c,$
- $I_3 = x^3 \mathrm{e}^x - 3II_2 = x^3 \mathrm{e}^x - 3\big[x^2 \mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x\big] + c = x^3 \mathrm{e}^x - 3x^2 \mathrm{e}^x + 6x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x + c.$

```
(%i1) I(n,x):=integrate(x^n*exp(x),x)$
      I(0,x); I(1,x); I(2,x); I(3,x); I(4,x); I(5,x);
```

(%o2) e^x

(%o3) $(x-1)\,\mathrm{e}^x$

(%o4) $(x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^x$

(%o5) $(x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x$

(%o6) $(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)\,\mathrm{e}^x$

(%o7) $(x^5-5x^4+20x^3-60x^2-120x+120)\,\mathrm{e}^x$

02. Metódy integrovania

Metóda substitúcie.

Funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale I,

$x = \varphi(t)$ má deriváciu na intervale J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi(t)\big)$ je primitívna k funkcii $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J a platí:

- $$\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c,\ t \in J,\ c \in R.$$

I, J sú intervaly, $x = \varphi(t) : J \to I$ má deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na J,

funkcia $F(t)$ je primitívna k $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I a platí:

- $$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

- V prvom prípade nemusíme použiť inverznú substitúciu,
  ale v druhom prípade musíme použiť inverznú substitúciu $t = \varphi^{-1}(x)$.

02. Metódy integrovania

- $\displaystyle\int \sin^3 t \cos t \, dt = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in R \\ dx = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \ t \in R, \ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } t = f(x) \\ dt = f'(x) \, dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c, \ x \in D(f), \ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = f(t) \\ dx = f'(t) \, dt \end{array} \right] = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c = \ln |f(t)| + c, \ t \in D(f), \ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2 \, dx}{x^3+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 + 1 & x \in R \\ dt = 3x^2 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln |t| + c = \frac{1}{3} \ln \left| x^3 + 1 \right| + c, \ x \in R, \ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2 \, dx}{x^6+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 & x \in R \\ dt = 3x^2 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + c, \ x \in R, \ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{x^2 \, dx}{x^6-1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 & x \in R - \{\pm 1\} \\ dt = 3x^2 \, dx & t \in R - \{\pm 1\} \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right|,$
$x \in R - \{\pm 1\}, \ c \in R.$

02. Metódy integrovania

- $\displaystyle\int e^{5x}\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } 5x = t & x \in R \\ 5\,dx = dt & t \in R \end{array}\right]$

$$= \int e^t\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int e^t\,dt = \frac{1}{5}\,e^t + c = \frac{1}{5}\,e^{5x} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Vykonať substitúciu t vo wxMaxima znamená:

- Zvolíme substitúciu a použijeme `diff` na vytvorenie rozdielu dt (označenie `del(t)`), potom vyjadríme dx pomocou dt použitím príkazu `solve`.
- Vyjadríme výsledok rovnice pomocou `%[1]` a nahradíme `del(x)` pomocou `del(t)` v integrande.
- Použijeme `subst` na transformáciu celého integrandu s premennou t a potom vypočítame integrál nezabúdajúc na to, že sa očakáva iba koeficient `del(t)`.
- Do výsledného integrálu dosadíme za t hodnotu x.

02. Metódy integrovania

(%i1) `INTEGRAND:(%e^(5*x))*diff(x);`

(%o1) $e^{5x}\,\mathrm{del}(x)$

(%i2) `solve(diff(t)=diff(5*x),del(x));`

(%o2) $[\mathrm{del}(x) = \frac{\mathrm{del}(t)}{5}]$

(%i3) `%[1];`

(%o3) $\mathrm{del}(x) = \frac{\mathrm{del}(t)}{5}$

(%i5) `subst(rhs(%),del(x),INTEGRAND)$ subst(t,5*x,%);`

(%o5) $\frac{e^{t}\,\mathrm{del}(t)}{5}$

(%i6) `integrate(coeff(%,del(t)),t);`

(%o6) $\frac{e^{t}}{5}$

(%i7) `subst(5*x,u,%);`

(%o7) $\frac{e^{5x}}{5}$

(%i8) `integrate(%e^(5*x),x);`

(%o8) $\frac{e^{5x}}{5}$

02. Metódy integrovania

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t=\ln x & x\in(0;\infty) \\ & dt=\frac{dx}{x} & t\in R \end{array} \right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=\frac{1}{x} & v=\ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

(Rovnica s integrálom ako neznámym parametrom.)

$\displaystyle\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x + 2c. \Rightarrow$ • $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x>0,\ c\in R.$

$f(x)$ má na intervale I primitívnu funkciu $F(x)$, reálne číslo $a, b \in R$, $a \neq 0$.

- $\displaystyle\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{rl} \text{Subst.} & x=at+b \\ & dx=a\,dt \end{array} \right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a}+c = \frac{F(at+b)}{a}+c.$

- $\displaystyle\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{rl} \text{Subst.} & x=t+b \\ & dx=dt \end{array} \right] = \int f(x)\,dx = F(x)+c = F(t+b)+c$ pre $a=1$.

- $\displaystyle\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{rl} \text{Subst.} & x=-t \\ & dx=-dt \end{array} \right] = -\int f(x)\,dx = -F(x)+c = -F(-t)+c$ pre $a=-1$.

05. Určitý integrál

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

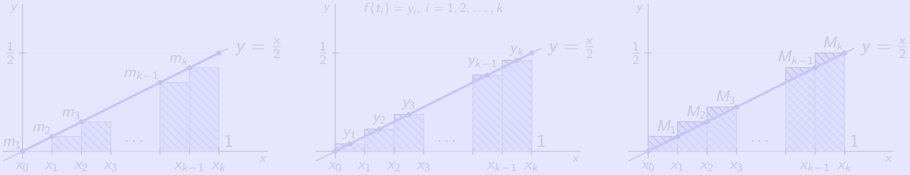
01. Základné pojmy

- Pri vyšetrovaní riemannovsky integrovateľnej funkcie f na $\langle a;b\rangle$, nepotrebujeme každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí sa obmedziť na **normálne postupnosti delení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, t.j. pre ktoré platí $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Potom pre každú voľbu bodov T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_H(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (ďalšia strana).

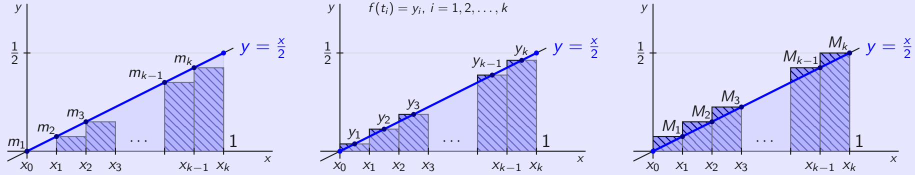
01. Základné pojmy

- Pri vyšetrovaní riemannovsky integrovateľnej funkcie f na $\langle a; b\rangle$, nepotrebujeme každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí sa obmedziť na **normálne postupnosti delení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, t.j. pre ktoré platí $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Potom pre každú voľbu bodov T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,dx.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_H(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1\frac{x\,dx}{2}=\frac{1}{4}$ (ďalšia strana).

01. Základné pojmy

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}$. Funkcia $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá, $f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

- Normálna postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, pričom $D_k = \{\frac{i}{k}\}_{i=0}^{k}$ pre $k \in N$.
- Pre $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$.

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2} = \frac{\frac{(0+k-1)k}{2}}{2k^2} = \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4k}.$$

$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k^2} = \frac{\frac{(1+k)k}{2}}{2k^2} = \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4}.$$

- zvoľme $T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ ako stredy intervalov $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$,
  t.j. $t_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{k} + \frac{i}{2}\right) = \frac{2i-1}{2k}$, potom $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$ a platí

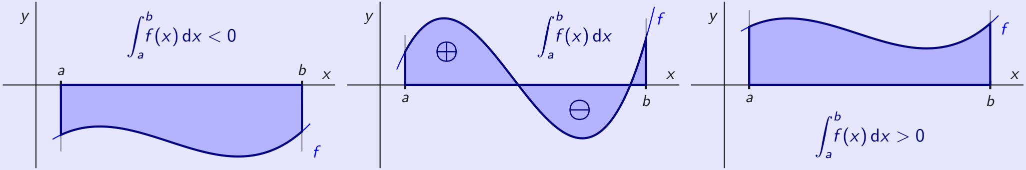
$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2} = \frac{\frac{(1+2k-1)k}{2}}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

02. Základné vlastnosti

- Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál na intervale $\langle a; b\rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určenú funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (t.j. pre f záporné) je táto oblasť záporná.



Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

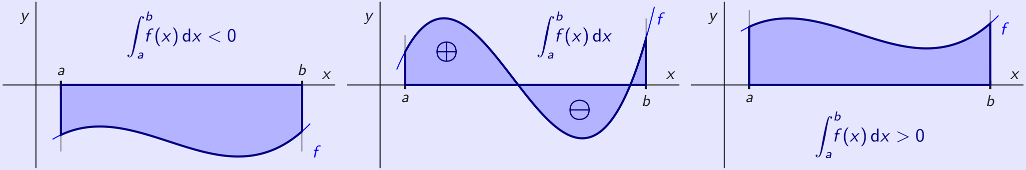
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Ak $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, potom aj $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

02. Základné vlastnosti

- Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál na intervale $\langle a; b\rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určenú funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (t.j. pre f záporné) je táto oblasť záporná.



Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

- $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$
- $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ak $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, potom aj $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

02. Základné vlastnosti

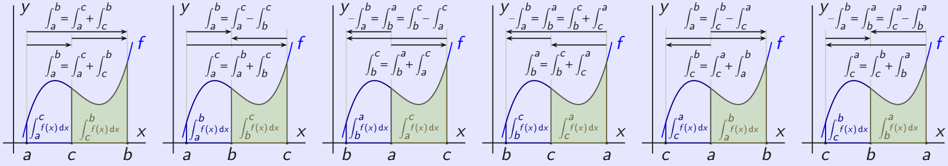
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

- $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$
- $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Aditívnosť integrálu.

Funkcia $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, body $a, b, c \in I$ sú ľubovoľné.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$



$a < c < b$ $\quad a < b < c$ $\quad b < a < c$ $\quad b < c < a$ $\quad c < a < b$ $\quad c < b < a$

Aditívnosť Riemannovho integrálu môžeme ilustrovať na vektoroch.

03. Metódy integrovania

Výpočet Riemannovho integrálu (Newton-Leibnizov vzorec).

Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

03. Metódy integrovania

Výpočet Riemannovho integrálu (Newton-Leibnizov vzorec).

Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{x^2}{2\cdot 2}\Big]_{-1}^{0} = \Big[\tfrac{x^2}{4}\Big]_{-1}^{0} = \tfrac{0^2}{4} - \tfrac{(-1)^2}{4} = \tfrac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \tfrac{1^2}{3} - \tfrac{(-1)^3}{3} = \tfrac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \Big[\ln\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big)\Big]_0^1 = \ln\big(1+\sqrt{2}\big) - \ln 1 = \ln\big(1+\sqrt{2}\big).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

03. Metódy integrovania

(%i2) `f(x):=x^2$ F:integrate(f(x),x);`

(F) $\frac{x^3}{3}$

(%i3) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o3) $\frac{2}{3}$

(%i4) `subst(1,x,F)-subst(-1,x,F);`

(%o4) $\frac{2}{3}$

(%i5) `float(subst(1,x,F)-subst(-1,x,F));`

(%o5) 0.6666666666666666

(%i6) `float(integrate(f(x),x,-1,1));`

(%o6) 0.6666666666666666

(%i7) `bfloat(integrate(f(x),x,-1,1));`

(%o7) $6.666666666666667b-1$

03. Metódy integrovania

(%i2) `f(x):=cos(x)*sin(x)$ F:integrate(f(x),x);`

(F) $-\frac{\cos x^2}{2}$

(%i3) `integrate(f(x),x,1,2);`

(%o3) $\frac{\cos 1^2}{2} - \frac{\cos 2^2}{2}$

(%i4) `subst(2,x,F)-subst(1,x,F);`

(%o4) $\frac{\cos 1^2}{2} - \frac{\cos 2^2}{2}$

(%i5) `float(integrate(f(x),x,1,2));`

(%o5) 0.05937419607911741

(%i6) `float(subst(2,x,F)-subst(1,x,F));`

(%o6) 0.05937419607911741

(%i7) `bfloat(subst(2,x,F)-subst(1,x,F));`

(%o7) $5.93741960791173 8b-2$

03. Metódy integrovania

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0$ (?!?).
- Funkcia $\frac{1}{x}$ nie je definovaná v bode 0.
- Funkcia $\frac{1}{x}$ nie je ohraničená na intervaloch $\langle -1; 0)$ a $(0; 1\rangle$.
- V tomto zmysle integrál nemôžeme vypočítať.

(%i2) `f(x):=1/x$ F:integrate(f(x),x);`

(F) $-\log x$

(%i3) `integrate(f(x),x,-1,1);`

`Principal Value`

(%o3) 0

(%i4) `subst(1,x,F)-subst(-1,x,F);`

(%o4) $-\log(-1)$

03. Metódy integrovania

- Určité integrály sa vo všeobecnosti počítajú pomocou neurčitých integrálov.
- Metódu per partes a substitučné metódy môžeme upraviť a priamo pomocou nich vypočítať určitý integrál.

  Po substitúcii sa nemusíme vracať k pôvodným premenným.

Metóda per partes.

$u, u', v, v' \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u\ = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v\ = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u\ = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v\ = \sin x \end{array}\right] = \Big[-4\pi^2\cdot 1 + 0^2\cdot 1\Big] + \Big[2x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= -4\pi^2 + \Big[4\pi\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0\Big] - \Big[-2\cos x\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 - \Big[-2\cdot 1 + 2\cdot 1\Big] = -4\pi^2.$$

03. Metódy integrovania

Metóda substitúcie. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicami a, b, J je interval s hranicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$ (Môžeme použiť oboma smermi.)

- $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;0\rangle & x\in\langle 1;2\rangle & t=2 \ \mapsto x=5 \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;2\rangle & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \tfrac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

03. Metódy integrovania

Metóda substitúcie. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicami a, b, J je interval s hranicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Môžeme použiť oboma smermi.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2t\right] dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

03. Metódy integrovania

Metóda substitúcie. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicami a, b, J je interval s hranicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$ (Môžeme použiť oboma smermi.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2t\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

04. Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$a \in R$, $m, n \in N$, $m \neq n$.

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4n}\right] = \left[\pi - 0 - 0 + 0\right] = \pi.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left[\frac{2\pi}{2} + \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4n}\right] = \left[\pi + 0 - 0 - 0\right] = \pi.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{\sin(m-n)2\pi}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)2\pi}{2(m+n)} - \frac{\sin 0}{2(m-n)} + \frac{\sin 0}{2(m+n)}\right] = 0.$$

- $$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

04. Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

(%i1) `f(x,n):=sin(n*x)^2;`

(%o1) $f(x,n) : \sin(nx)^2$

(%i2) `integrate(f(x,n),x,0,2*%pi);`

(%o2) $-\frac{\sin(4\pi n)-4\pi n}{4n}$

(%i3) `integrate(f(x,n),x,a+0,a+2*%pi);`

(%o3) $\frac{\sin(2an)-2an}{4n} - \frac{\sin((2a+4\pi)n)+(-2a-4\pi)n}{4n}$

(%i4) `ratsimp(%o3);`

(%o4) $-\frac{\sin((2a+4\pi)n)-\sin(2an)-4\pi n}{4n}$

(%i5) `integrate(f(x,4),x,0,2*%pi);`

(%o5) π

(%i6) `integrate(f(x,4),x,a+0,a+2*%pi);`

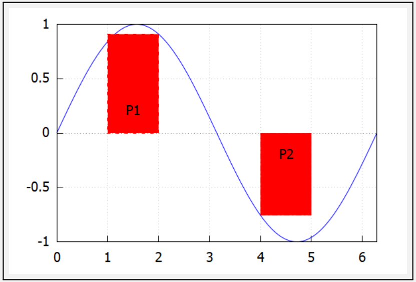
(%o6) $\frac{\sin(8a)-8a}{16} - \frac{\sin(8a)-8a-16\pi}{16}$

(%i7) `ratsimp(%);`

(%o8) π

04. Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

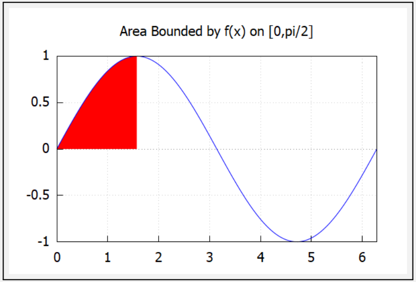
```
(%i1) f(x):=sin(x)$
      wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      color=blue, explicit(f(x),x,0,2*%pi),border=false,
      rectangle([1,0],[2,f(2)]),color=black,
      label(["P1",1.5,0.2]),
      rectangle([4,f(4)],[5,0]),color=black,
      label(["P2",4.5,-0.2]));
```



04. Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

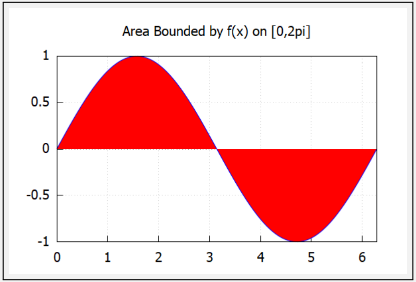
- Pripomeňme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ určuje oblasť ohraničenú $f(x)$ a osou x.

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$
wxdraw2d(grid=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
xaxis=true,yaxis=true,
title="Area Bounded by f(x) on [0,pi/2]",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(0,x,0,%pi/2),filled_func=false,
color=blue,explicit(f(x),x,0,2*%pi));
```



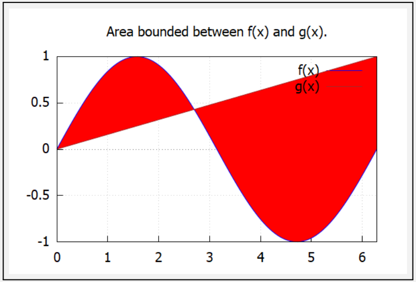
04. Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$
wxdraw2d(grid=true,xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
xaxis=true,yaxis=true,
title="Area Bounded by f(x) on [0,2pi]",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(0,x,0,2*%pi),filled_func=false,
color=blue,explicit(f(x),x,0,2*%pi));
```



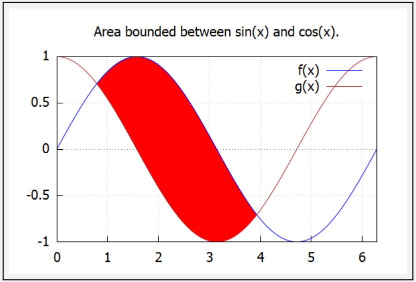
04. Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$ g(x):=x/(2*%pi)$
wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
title="Area bounded between f(x) and g(x).",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(g(x),x,0,2*%pi),
filled_func=false,color=blue,key="f(x)",
explicit(f(x),x,0,2*%pi),color=brown,key="g(x)",
explicit(g(x),x,0,2*%pi));
```



04. Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

(%i1)
```
f(x):=sin(x)$ g(x):=cos(x)$
wxdraw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,2*%pi],yrange=[-1,1],
title="Area bounded between sin(x) and cos(x).",
fill_color=red,filled_func=true,filled_func=f(x),
explicit(g(x),x,%pi/4,5*%pi/4),
filled_func=false,color=blue,key="f(x)",
explicit(f(x),x,0,2*%pi),color=brown,key="g(x)",
explicit(g(x),x,0,2*%pi));
```



Ďakujem za pozornosť.

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

beerb@frcatel.fri.uniza.sk