Matematická analýza podporovaná programom wxMaxima

Rudolf Blaško
Žilinská univerzita v Žiline

Project: Innovative Open Source Courses for Computer Science

31. 5. 2021

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Obsah

Innovative Open Source Courses for Computer Science

This teaching material was written as one of the outputs of the project
"Innovative Open Source Courses for Computer Science",
funded by the Erasmus+ grant no. 2019-1-PL01-KA203-065564.
The project is coordinated by West Pomeranian University of Technology in Szczecin (Poland)
and is implemented in partnership with Mendel University in Brno (Czech Republic)
and University of Žilina (Slovak Republic).
The project implementation timeline is September 2019 to December 2022.

Innovative Open Source Courses for Computer Science

Project was implemented under the Erasmus+.
Project name: "Innovative Open Source courses for Computer Science curriculum"
Project no.: 2019-1-PL01-KA203-065564
Key Action: KA2 – Cooperation for innovation and the exchange of good practices
Action Type: KA203 – Strategic Partnerships for higher education

Consortium: Zachodniopomorski uniwersytet technologiczny w Szczecinie
Mendelova univerzita v Brně
Žilinská univerzita v Žiline

Erasmus+ Disclaimer: This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

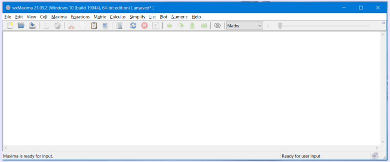
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Úvod do wxMaxima

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

Základné pojmy

- wxMaxima je dialógové rozhranie pre systém počítačovej algebry Maxima.
- wxMaxima je distribuovaný pod licenciou GPL.
- Program je možné skompilovať v rôznych OS (Windows, GNU/Linux, MacOS X, ...).
- xMaxima je grafické rozhranie pre Maxima napísané v Tcl/Tk.
- Maxima patrí medzi Open Source programy s otvoreným zdrojovým kódom.
- Predkompilovaný program pre GNU/Linux a Windows je k dispozícii zadarmo na webovej stránke SourceForge `https://sourceforge.net/projects/maxima/files/`.
- Po spustení prostredia wxMaxima sa na obrazovke objaví okno s menu v hornej časti.
- Pod menu sa nachádza priestor, kde môžeme zadávať príkazy a kde sa zobrazujú výstupy.



Základné pojmy

- Príkazy zadávame na samostatné riadky (vstupné riadky).

  Ich realizácia je zabezpečená súčasným stlačením kláves Shift a Enter alebo kliknutím v menu na ikonu ➡ (Send the current cell to maxima).

- Vstupné riadky sú uvedené ako (%i1).
- Výstupné riadky sú uvedené ako (%o1).
- Čísla pre vstupný riadok a príslušný výstupný riadok sú rovnaké a na základe nich sa môžeme odvolávať na obsah týchto riadkov.

```
(%i1) First input line.
(%o1) First output line.
(%i2) Second input line.
(%o2) Second output line.
```

Základné pojmy

- Príkazy sa vykonávajú na nových samostatných riadkoch (výstupných riadkoch).
- Príkazy na vstupných riadkoch môžu byť ukončené symbolom ; alebo symbolom $, ktorý potláča zobrazenie príslušného výstupu.

```
(%i1) solve(0=x+2,x);
```

(%o1) $[x = -2]$

```
(%i2) %i1;
```

(%o2) $\mathtt{solve}(0 = x + 2, x)$

```
(%i3) %o1;
```

(%o3) $[x = -2]$

Základné pojmy

Výstup môžeme uložiť v rôznych tvaroch a následne použiť v iných programoch.

(%o3) $[x=-\frac{2}{3}, x=0]$

Výstup (%o3) z predchádzajúceho okna môžeme:

- Kopírovať pomocou `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovať ako text (možno použiť napr. pre editor rovníc MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovať ako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovať ako MathML, obrázok, RTF, SVG...

Prostredie wxMaxima má dobre prepracovaný help pre používateľa, ktorý nájdete v menu `Help`. Help otvoríme aj stlačením klávesy `F1`.

Návod nájdeme aj na stránke
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základné pojmy

Výstup môžeme uložiť v rôznych tvaroch a následne použiť v iných programoch.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup (%o3) z predchádzajúceho okna môžeme:

- Kopírovať pomocou `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovať ako text (možno použiť napr. pre editor rovníc MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovať ako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovať ako MathML, obrázok, RTF, SVG...

Prostredie wxMaxima má dobre prepracovaný help pre používateľa, ktorý nájdete v menu `Help`. Help otvoríme aj stlačením klávesy `F1`.

Návod nájdeme aj na stránke `https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základné pojmy

Výstup môžeme uložiť v rôznych tvaroch a následne použiť v iných programoch.

(%o3) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

Výstup (%o3) z predchádzajúceho okna môžeme:

- Kopírovať pomocou `Ctrl C` a `Ctrl V`, resp. kopírovať ako text (možno použiť napr. pre editor rovníc MSWord): `x=-2/3,x=0`,
- Kopírovať ako LaTeX `\[x=-\frac{2}{3}\operatorname{,}x=0\]`,
- Kopírovať ako MathML, obrázok, RTF, SVG. . .

Prostredie wxMaxima má dobre prepracovaný help pre používateľa, ktorý nájdete v menu `Help`. Help otvoríme aj stlačením klávesy `F1`.

Návod nájdeme aj na stránke
`https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_369.html`.

Základné príkazy

- Pomocou `apropos` zistíme presný názov príkazu pomocou časti jeho názvu.

```
(%i1) apropos("plot")
(%o1) [barsplot,boxplot,contour_plot,get_plot_option,gnuplot,...
```

- Príkaz `describe` vypíše popis zadaného príkazu.

```
(%i1) describe(plot2d)$
      -- Function: plot2d
      plot2d (<expr><,<range_x><,<options><)
      plot2d (<expr_<>=<expr_<>,<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([parametric,<expr_x><,<expr><_y,<range><],<options><)
      plot2d ([discrete,<points><],<options><)
      plot2d ([contour,<expr><],<range_x><,<range_y><,<options><)
      plot2d ([<type_<>,...,<type_n><],<options><)
      There are 5 types of plots that can be plotted by 'plot2d':
            1. Explicit functions. 'plot2d' ...
      ...
```

Základné príkazy

- Výrazy sa zadávajú pomocou bežných znakov operácií, relácií a funkcií.
- Argumenty funkcií a príkazov sú v zátvorkách.
- Symbol násobenia `*` musí byť zadaný!
- Umocnenie sa zadáva znakom `^` alebo dvojicou `**`.
- Symbol `:` sa používa na priradenie hodnoty napravo do výrazu naľavo.
- Nasledujúce príkazy riešia rovnicu $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou premennou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocou príkazu `kill` môžeme z pamäte odstrániť premenné so všetkými ich priradeniami a vlastnosťami.

```
(%i1) kill(a,b)
       /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Základné príkazy

- Výrazy sa zadávajú pomocou bežných znakov operácií, relácií a funkcií.
- Argumenty funkcií a príkazov sú v zátvorkách.
- Symbol násobenia `*` musí byť zadaný!
- Umocnenie sa zadáva znakom `^` alebo dvojicou `**`.
- Symbol `:` sa používa na priradenie hodnoty napravo do výrazu naľavo.
- Nasledujúce príkazy riešia rovnicu $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou premennou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocou príkazu `kill` môžeme z pamäte odstrániť premenné so všetkými ich priradeniami a vlastnosťami.

```
(%i1) kill(a,b)
       /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Základné príkazy

- Výrazy sa zadávajú pomocou bežných znakov operácií, relácií a funkcií.
- Argumenty funkcií a príkazov sú v zátvorkách.
- Symbol násobenia `*` musí byť zadaný!
- Umocnenie sa zadáva znakom `^` alebo dvojicou `**`.
- Symbol `:` sa používa na priradenie hodnoty napravo do výrazu naľavo.
- Nasledujúce príkazy riešia rovnicu $2x + 3x^2 = 0$ s neznámou premennou x.

```
(%i1) a:2$ b:3$ solve(a*x+b*x^2=0,x);
```

(%o1) $[x = -\frac{2}{3}, x = 0]$

- Pomocou príkazu `kill` môžeme z pamäte odstrániť premenné so všetkými ich priradeniami a vlastnosťami.

```
(%i1) kill(a,b)
       /* removes all bindings from the arguments a,b */
(%i2) kill(all) /* removes all items on all infolists */
```

Základné príkazy

- V menu View a podmenu Display equations môžeme zmeniť zobrazenia výstupných riadkov na tvary in 2D (implicitný tvar), as 1D ASCII alebo as ASCII Art.
- Nastavenia výstupu môžete zmeniť aj príkazom set_display.

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('none)$
```

(%o1) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ /* in 2D */

```
(%i1) x/sqrt(x^2+1);set_display('ascii)$
```

(%o1) $x/\mathrm{sqrt}(x^2+1)$ /* as 1D ASCII */

```
(%i2) x/sqrt(x^2+1);set_display('xml)$
             x
(%o2)   ----------         /* as ASCII Art */
              2
        sqrt(x  + 1)
```

Práca s číslami a základné konštanty

- Maxima dokáže pracovať s reálnymi číslami v numerickom alebo symbolickom tvare.
- Spôsob zápisu reálnych čísel je možné nastaviť v menu `Numeric` pomocou prepínača `Numeric Output` medzi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavenie premennej `numer` určuje spôsob zobrazenia.
- Štandardne sa zobrazuje 16 číslic (vrátane desatinnej čiarky).
- Presnosť zobrazenia je definovaná premennou `fpproc` a ovplyvňuje zobrazenie pomocou `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy rovnako.
- Štandardne sa komplexné čísla zadávajú v algebraickom tvare (`rectform`). Pomocou príkazu `polarform` ich môžeme previesť do trigonometrického (exponenciálneho) tvaru.

(%i1) `z:1+%i;`

(z) $i+1$

(%i2) `polarform(z)+rectform(z);`

(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Práca s číslami a základné konštanty

- Maxima dokáže pracovať s reálnymi číslami v numerickom alebo symbolickom tvare.
- Spôsob zápisu reálnych čísel je možné nastaviť v menu `Numeric` pomocou prepínača `Numeric Output` medzi numerickým a symbolickým zobrazením.
- Nastavenie premennej `numer` určuje spôsob zobrazenia.
- Štandardne sa zobrazuje 16 číslic (vrátane desatinnej čiarky).
- Presnosť zobrazenia je definovaná premennou `fpproc` a ovplyvňuje zobrazenie pomocou `bfloat`. Výstup `float` zobrazuje ždy rovnako.
- Štandardne sa komplexné čísla zadávajú v algebraickom tvare (`rectform`). Pomocou príkazu `polarform` ich môžeme previesť do trigonometrického (exponenciálneho) tvaru.

```
(%i1) z:1+%i;
```
(z) $i+1$

```
(%i2) polarform(z)+rectform(z);
```
(%o2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}+i+1$

Práca s číslami a základné konštanty

- Číselné konštanty e, π, i (imaginárna jednotka) majú prefix `%`, t.j. `%e`, `%pi`, `%i`.
  To platí aj keď sú súčasťou alebo výsledkom výpočtov.
- Maxima má preddefinované konštanty `inf`, `minf` pre reálne nekonečná ∞, $-\infty$.
- Maxima má preddefinovanú konštantu `infinity` pre komplexné nekonečno.
- Logické konštanty `true` a `false` predstavujú pravdu a nepravdu.

(%i1) `%pi+%i+%e;`

(%o1) $\pi + \%i + \%e$

(%i2) `[minf,inf];`

(%o2) $[-\infty, \infty]$

(%i3) `infinity;`

(%o3) *infinity*

Priradenia a funkcie

- Maxima obsahuje oveľa viac funkcií ako štandardné programovacie jazyky. Sú to nielen samotné funkcie, ale aj rôzne funkcie na ich podporu.
- Operátor `:` používame na priraďovanie hodnôt alebo výrazov premenným.
- Funkcie definujeme pomocou priradenia `:=`.

(%i1) `f(x):=x^2+2*x+3;`

(%o1) $f(x) := x^2 + 2x + 3$

(%i6) `f(x);f(y);f(x+1);`
`f(-2);f(1);`

(%o2) $x^2 + 2x + 3$

(%o3) $y^2 + 2y + 3$

(%o4) $(x+1)^2 + 2(x+1) + 3$

(%o5) 3

(%o6) 6

Práca s výrazmi

Mnohokrát potrebujeme zmeniť podmienky iba lokálne pre konkrétny výpočet bez zmeny globálneho nastavenia. Na tento účel má Maxima veľmi efektívny príkaz `ev`.

- Príkaz `ev` umožňuje definovať špecifické prostredie v rámci jedného príkazu.
- Po zadaní príkazu `ev(a,b1,b2,..., bn)` sa vyhodnotí výraz `a` pri splnení podmienok `b1`, `b2`, ..., `bn`.
- Týmito podmienkami môžu byť rovnice, priradenia, funkcie, prepínače (logické nastavenia).

Príklad ukazuje príklad riešenia kvadratickej rovnice pomocou príkazu `solve`.

- Premenné `a`, `b`, `c` po vykonaní príkazu `ev` nemajú priradené hodnoty.

(%i1) `ev(solve(a*x^2+b*x+c=0,x),a:2,b:-1,c=-3);`

(%o1) $[x=\frac{3}{2}, x=-1]$

(%i2) `solve(a*x^2+b*x+c=0,x);`

(%o2) $[x=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}, x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}]$

Práca s výrazmi

Substituovať výrazy môžeme pomocou príkazov `subst(a,b,c)` a `ratsubst(a,b,c)`.

- Výraz `a` bude nahradený výrazom `b` a následne dosadený do výrazu `c`.
- Pri použití príkazu `subst` musí byť `b` najjednoduchšou časťou (atómom) resp. kompletným podvýrazom výrazu `c`.
- V príklade nie je podvýraz `x+y` úplný (chýba `z`).
- Príkaz `ratsubst` výsledný výraz aj upraví.

(%i2) `subst(x+y,a,a^2+b^2); ratsubst(x+y,a,a^2+b^2);`

(%o1) $(y+x)^2+b^2$

(%o2) $y^2+2xy+x^2+b^2$

(%i4) `subst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(a,x+y,x+y+z);`

(%o3) $z+y+x$

(%o4) $z+a$

Limity a derivácie

V menu Calculus nájdeme funkcie na riešenie základných problémov matematickej analýzy (limity, derivácie, integrály, súčty radov, . . .).

Limity vypočítame pomocou príkazu `limit`.

- Posledný parameter určuje smer jednostranných limít, má hodnoty `plus` alebo `minus` a je voliteľný.

  Ak nie je zadaný, Maxima počíta limitu ako komplexnú.
- Príkazom `limit(f(x),x,a)` vypočítame limitu $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Príkazom `limit(f(x),x,a,plus)` vypočítame limitu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

```
(%i4) limit(1/x,x,0);      limit(1/x,x,0,plus);
          limit(1/x,x,0,minus);  limit(1/x,t,0);
```

(%o1) *infinity*

(%o2) ∞

(%o3) $-\infty$

(%o4) $\frac{1}{x}$

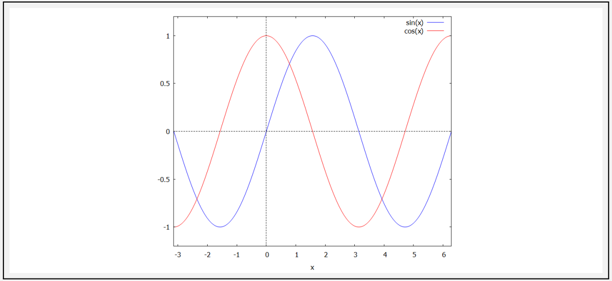
Grafy funkcií

Graf funkcie môžeme vykresliť niekoľkými spôsobmi.

- Najjednoduchší spôsob je zvoliť v menu `Plot` podmenu `Plot 2d ...`.
- Ak zvolíme `Format=gnuplot`, funkcia sa vykreslí príkazom `plot2d` do nového okna pomocou programu Open Source `Gnuplot`.

  `Gnuplot` sa automaticky nainštaluje spolu s Maxima.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, gnuplot])$
```

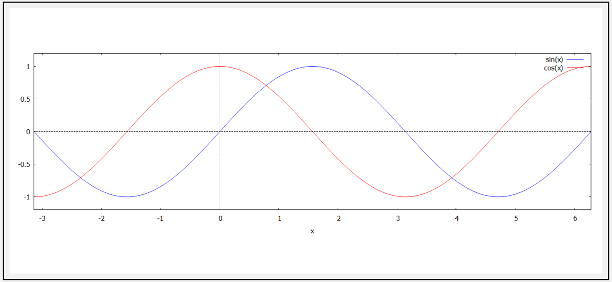


Grafy funkcií

Grafy funkcií nie sú zobrazené v reálnom pomere osí x a y, ale sú optimalizované pre obrazovku.

- Pre správne zobrazenie môžeme použiť napr. parameter `same_xy`.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
      [plot_format, gnuplot],[same_xy])$
```

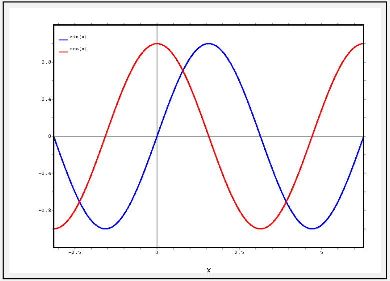


Grafy funkcií

Ak zvolíme $\boxed{\texttt{Format=wxmaxima}}$:

- Maxima vykreslí graf pomocou príkazu `plot2d` do nového okna.
- Obrázok môžeme uložiť iba do postscript-u.

```
(%i1) plot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],[y,-1.2,1.2],
          [plot_format, xmaxima])$
```

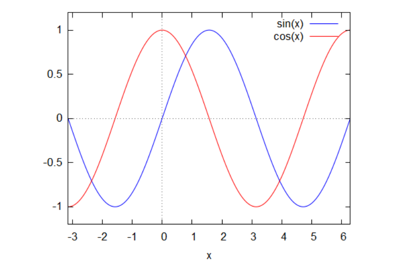


Grafy funkcií

Ak zvolíme $\boxed{\texttt{Format=inline}}$:

- Maxima nakreslí graf pomocou príkazu `wxplot2d` do svojho prostredia.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
          [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1) 

Príkazy `plot2d` a `wxplot2d` majú rovnakú syntax a oveľa viac parametrov.

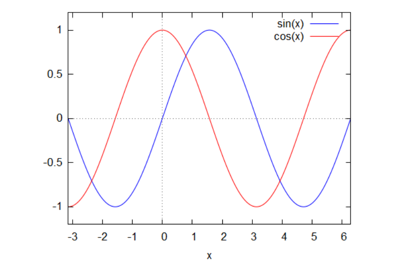
- Parametre zistíme napríklad príkazom `describe(plot2d)`.

Grafy funkcií

Ak zvolíme `Format=inline`:

- Maxima nakreslí graf pomocou príkazu `wxplot2d` do svojho prostredia.

```
(%i1) wxplot2d([sin(x),cos(x)],[x,-%pi,2*%pi],
        [y,-1.2,1.2])$
```

(%o1) 

Príkazy `plot2d` a `wxplot2d` majú rovnakú syntax a oveľa viac parametrov.

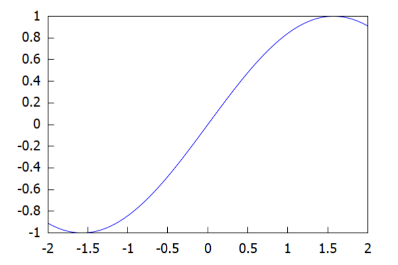
- Parametre zistíme napríklad príkazom `describe(plot2d)`.

Grafy funkcií

Graf funkcie môžeme vykresliť viacerými spôsobmi.

- Výhodnejšie je použiť príkazy `wxdraw2d` alebo `draw2d` a výstup presmerovať na `Gnuplot`.
- Tieto príkazy majú mierne odlišnú syntax ako `wxplot2d`, `plot2d`.
  Parametre tlače sú jednoduchšie a prehľadnejšie.
- Vykresľovaná funkcia musí byť v príkaze `explicit`, `parametric` alebo `implicit`.

```
(%i1) wxdraw2d(explicit((sin(x)),x,-2,2))$
```

(%o1) 

Postupnosti a rady

Postupnosti môžeme v Maxime vytvoriť niekoľkými spôsobmi.

- Postupnosti môžeme vytvoriť napríklad príkazom `makelist` alebo príkazmi cyklu `for..do`.
- Príkaz `makelist` vytvorí zoznam, ktorý môžeme zobraziť aj ako celok aj po členoch.

```
(%i2) S1:makelist(2*n^2-1,n,1,10);
      S2:makelist(2*n^2-1,n,2,10,2);
(S1)  [1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 161, 199]
(S2)  [7, 31, 71, 127, 199]
(%i4) S1[1];S2[1];S1[10];
(%o3) 1
(%o4) 7
(%o5) 199
(%i6) S1[12];
      inpart: invalid index 12 of list or matrix.
      -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

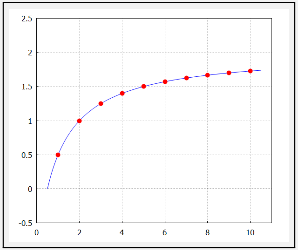
Postupnosti a rady

- Postupnosť je vygenerovaná aj so svojimi vzormi a potom sa vykreslí pomocou `draw2d`.
- Usporiadané dvojice sú v hranatých zátvorkách a potom sú zobrazené ako body v rovine.

(%i1)
```
S1:makelist([n,(2*n-1)/(n+1)],n,1,10);
```

(S1) $[[1, \frac{1}{2}], [2, 1], [3, \frac{5}{4}], [4, \frac{7}{5}], [5, \frac{3}{2}], [6, \frac{11}{7}], [7, \frac{13}{8}], [8, \frac{5}{3}], [9, \frac{17}{10}], [10, \frac{19}{11}]]$

(%i2)
```
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[0,11],yrange=[-0.5,2.5],
color=blue,explicit((2*n-1)/(n+1),n,0.5,10.5),
point_type=7,color=red,points(S1))$
```



Postupnosti a rady

- Pomocou príkazu `for..do` vypíšeme niekoľko členov postupnosti $\left\{2n^2-1\right\}_{n=1}^{\infty}$.

```
(%i1) (for n:1 thru 15 do (a_n: 2*n^2-1, print(a_n)) )$
      1
      7
      17
      31
      49
      71
      97
      127
      161
      199
      241
      287
      337
      391
      449
```

Postupnosti a rady

Súčet radu môžeme vypočítať príkazom `sum`.
Tento príkaz nájdete v menu $\boxed{\texttt{Calculus}}$ a podmenu $\boxed{\texttt{Calculate Sum...}}$.

- Pomocou príkazu `sum` vypočítame konečný aj nekonečný súčet.

(%i1) `sum(2*n^2-1,n,1,8);`
(%o1) 400

- Maxima dokáže vypočítať presný súčet niektorých nekonečných radov.

(%i2) `sum(1/k^2,k,1,inf);`

`sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum;`

(%o1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

(%o2) $\frac{\pi^2}{6}$

Reálne funkcie

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

Základné pojmy

- **Binárna relácia** f medzi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$, potom sa relácia f nazýva **funkcia** (**zobrazenie**) z množiny A do množiny B, označenie $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ alebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá premenná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá premenná, hodnota funkcie.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definičný obor funkcie f (množina vzorov).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnôt funkcie f (množina obrazov).
- Relácie a funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc.
- $f = g$ predstavuje ekvivalenciu $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  t.j. $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Základné pojmy

- **Binárna relácia** f medzi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$, potom sa relácia f nazýva **funkcia** (**zobrazenie**) z množiny A do množiny B, označenie $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ alebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá premenná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá premenná, hodnota funkcie.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B\colon [x; y] \in f\}$ Definičný obor funkcie f (množina vzorov).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f)\colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnôt funkcie f (množina obrazov).
- Relácie a funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc.
- $f = g$ predstavuje ekvivalenciu $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  t.j. $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Základné pojmy

- **Binárna relácia** f medzi množinami $A \neq \emptyset$ a $B \neq \emptyset$ je každé $f \subset A \times B$.
- Ak pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$, potom sa relácia f nazýva **funkcia** (**zobrazenie**) z množiny A do množiny B, označenie $f\colon A \to B$.

  Zapisujeme $[x; y] \in f$ alebo $y = f(x)$.
- $x \in A$ Vzor, nezávislá premenná, argument.
- $y \in B$ Obraz, závislá premenná, hodnota funkcie.
- $D(f) = \{x \in A, \exists y \in B \colon [x; y] \in f\}$ Definičný obor funkcie f (množina vzorov).
- $H(f) = \{y \in B, \exists x \in D(f) \colon [x; y] \in f\}$ Obor hodnôt funkcie f (množina obrazov).
- Relácie a funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc.
- $f = g$ predstavuje ekvivalenciu $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$,

  t.j. $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Základné pojmy

- $\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

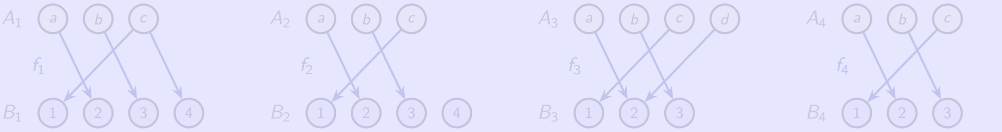
  Funkcia f je injekcia, resp. prostá funkcia (rôzne vzory majú rôzne obrazy).

- $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon y = f(x)$

  Funkcia f je surjekcia, resp. funkcia na množinu B (každý obraz má vzor).

- f je injekcia a surjekcia súčasne (prostá funkcia na množinu B)

  Funkcia f je bijekcia (injekcia a surjekcia).



$f_1 = \{[a;2],[b;3],[c;1],[c;4]\}$	$f_2 = \{[a;2],[b;3],[c;1]\}$	$f_3 = \{[a;2],[b;3],[c;1],[d;2]\}$	$f_4 = \{[a;2],[b;3],[c;1]\}$
Nie je funkcia (je relácia).	Je injekcia.	Je surjekcia.	Je bijekcia.

Základné pojmy

- $\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

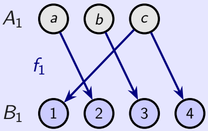
  Funkcia f je injekcia, resp. prostá funkcia (rôzne vzory majú rôzne obrazy).

- $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$

  Funkcia f je surjekcia, resp. funkcia na množinu B (každý obraz má vzor).

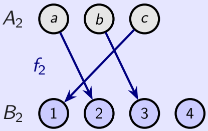
- f je injekcia a surjekcia súčasne (prostá funkcia na množinu B)

  Funkcia f je bijekcia (injekcia a surjekcia).



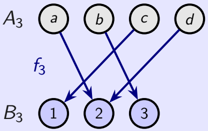
$f_1 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [c;4]\}$

Nie je funkcia
(je relácia).



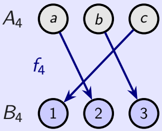
$f_2 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$

Je injekcia.



$f_3 = \{[a;2], [b;3], [c;1], [d;2]\}$

Je surjekcia.



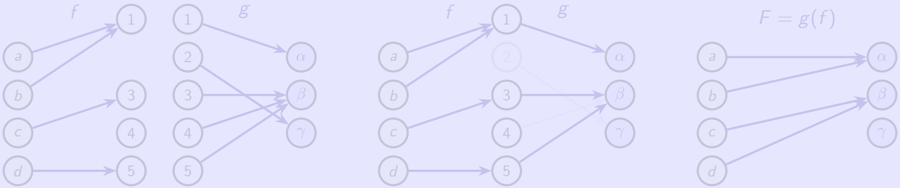
$f_4 = \{[a;2], [b;3], [c;1]\}$

Je bijekcia.

Základné pojmy

Funkcie $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $H(f) \subset C$.

- Funkcia $F = g(f)\colon A \to D$, ktorá priradí každému $x \in A$ hodnotu $z = g(y) = g(f(x)) \in D$, kde $y = f(x)$, sa nazýva **zloženie** (**kompozícia**) funkcií f a g.
- Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka.
- Funkcia g sa nazýva vonkajšia zložka.



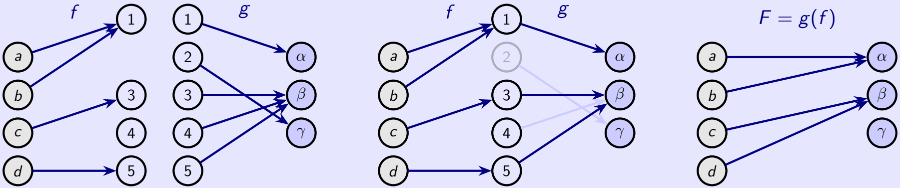
$$f = \{[a;1]\,,[b;1]\,,[c;3]\,,[d;5]\},\ g = \{[1;\alpha]\,,[2;\gamma]\,,[3;\beta]\,,[4;\beta]\,,[5;\beta]\},$$

$$\text{zloženie } F = g(f) = \{[a;\alpha]\,,[b;\alpha]\,,[c;\beta]\,,[d;\beta]\}.$$

Základné pojmy

Funkcie $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $H(f) \subset C$.

- Funkcia $F = g(f)\colon A \to D$, ktorá priradí každému $x \in A$ hodnotu $z = g(y) = g(f(x)) \in D$, kde $y = f(x)$, sa nazýva **zloženie** (**kompozícia**) funkcií f a g.
- Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka.
- Funkcia g sa nazýva vonkajšia zložka.



$$f = \{[a;1],[b;1],[c;3],[d;5]\},\ g = \{[1;\alpha],[2;\gamma],[3;\beta],[4;\beta],[5;\beta]\},$$

zloženie $F = g(f) = \{[a;\alpha],[b;\alpha],[c;\beta],[d;\beta]\}$.

Základné pojmy

Funkcia $f\colon A \to B$, $C \subset A$.

- Zobrazenie $h\colon C \to B$ také, že pre všetky $x \in C$ platí $f(x) = h(x)$, sa nazýva **zúženie (reštrikcia)** f **na množinu** C, označenie $h = f|_C$.

Funkcia $f\colon A \to B$ je bijekcia.

- Zobrazenie $g\colon B \to A$ také, že $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,

  t.j. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, sa nazýva **inverzná funkcia k** f, označenie $g = f^{-1}$.

Množina A je **ekvivalentná** s množinou B, ak existuje bijekcia $f\colon A \to B$, označenie $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A je prázdna.	A je konečná.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A je spočítateľne konečná.	
$A \sim N$	A je spočítateľne nekonečná.	A je nekonečná.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A je nespočítateľná.	
$A = \emptyset$ alebo $A \sim N_n$ alebo $A \sim N$	A is spočítateľná.	

Základné pojmy

Funkcia $f\colon A \to B$, $C \subset A$.

- Zobrazenie $h\colon C \to B$ také, že pre všetky $x \in C$ platí $f(x) = h(x)$, sa nazýva **zúženie (reštrikcia)** f **na množinu** C, označenie $h = f|_C$.

Funkcia $f\colon A \to B$ je bijekcia.

- Zobrazenie $g\colon B \to A$ také, že $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,
  t.j. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, sa nazýva **inverzná funkcia k** f, označenie $g = f^{-1}$.

Množina A je **ekvivalentná** s množinou B, ak existuje bijekcia $f\colon A \to B$, označenie $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A je prázdna.	A je konečná.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A je spočítateľne konečná.	
$A \sim N$	A je spočítateľne nekonečná.	A je nekonečná.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A je nespočítateľná.	
$A = \emptyset$ alebo $A \sim N_n$ alebo $A \sim N$	A is spočítateľná.	

Základné pojmy

Funkcia $f\colon A \to B$, $C \subset A$.

- Zobrazenie $h\colon C \to B$ také, že pre všetky $x \in C$ platí $f(x) = h(x)$, sa nazýva **zúženie (reštrikcia)** f **na množinu** C, označenie $h = f|_C$.

Funkcia $f\colon A \to B$ je bijekcia.

- Zobrazenie $g\colon B \to A$ také, že $[y; x] \in g \Leftrightarrow [x; y] \in f$,
  t.j. $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$, sa nazýva **inverzná funkcia k** f, označenie $g = f^{-1}$.

Množina A je **ekvivalentná** s množinou B, ak existuje bijekcia $f\colon A \to B$, označenie $A \sim B$.

$A = \emptyset$	A je prázdna.	A je konečná.
$A \sim N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in N$	A je spočítateľne konečná.	
$A \sim N$	A je spočítateľne nekonečná.	A je nekonečná.
$A \neq \emptyset$ a $A \not\sim N_n$ a $A \not\sim N$	A je nespočítateľná.	
$A = \emptyset$ alebo $A \sim N_n$ alebo $A \sim N$	A is spočítateľná.	

Základné pojmy

- $N = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ Prirodzené čísla.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ Celé čísla.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Racionálne čísla.
  Súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch racionálnych čísel (s nenulovým menovateľom) je opäť racionálne číslo. Racionálne číslo (zlomok) môže mať niekoľko rôznych vyjadrení.
- $I = R - Q$ Iracionálne čísla.
  Súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch iracionálnych čísel môže byť iracionálny aj racionálny.
- $R = (-\infty; \infty)$ Reálne čísla.
  Množina R je nekonečná, ale všetky jej prvky, t.j. čísla, sú konečné (počet prvkov množiny R nemožno vyjadriť číslom).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozšírená množina reálnych čísel.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ pre $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nedefinujeme $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ pre $a \in R$ (neurčité výrazy).

Základné pojmy

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n{+}1, \ldots\}$ Prirodzené čísla.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ Celé čísla.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Racionálne čísla.
  Súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch racionálnych čísel (s nenulovým menovateľom) je opäť racionálne číslo. Racionálne číslo (zlomok) môže mať niekoľko rôznych vyjadrení.
- $I = R - Q$ Iracionálne čísla.
  Súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch iracionálnych čísel môže byť iracionálny aj racionálny.
- $R = (-\infty; \infty)$ Reálne čísla.
  Množina R je nekonečná, ale všetky jej prvky, t.j. čísla, sú konečné (počet prvkov množiny R nemožno vyjadriť číslom).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozšírená množina reálnych čísel.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ pre $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nedefinujeme $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ pre $a \in R$ (neurčité výrazy).

Základné pojmy

- $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ Prirodzené čísla.
- $Z = \{m - n, m, n \in N\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ Celé čísla.
- $Q = \{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$ Racionálne čísla.

  Súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch racionálnych čísel (s nenulovým menovateľom) je opäť racionálne číslo. Racionálne číslo (zlomok) môže mať niekoľko rôznych vyjadrení.
- $I = R - Q$ Iracionálne čísla.

  Súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch iracionálnych čísel môže byť iracionálny aj racionálny.
- $R = (-\infty; \infty)$ Reálne čísla.

  Množina R je nekonečná, ale všetky jej prvky, t.j. čísla, sú konečné (počet prvkov množiny R nemožno vyjadriť číslom).
- $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ Rozšírená množina reálnych čísel.
- $\infty + \infty = \infty$, $a \pm \infty = \pm\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $b \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$ pre $a, b \in R$, $b > 0$.
- Nedefinujeme $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$ pre $a \in R$ (neurčité výrazy).

Postupnosti (reálnych čísel)

Funkcia f, $D(f) = N$
$f = \{[n; f(n)], n \in N\}$
} **Postupnosť**, pre $n \in N$ značíme $a_n = f(n)$,
t.j. $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Postupnosť f je spočítateľná (nekonečná).
- $a_n \in f$ Člen postupnosti predstavuje $[n; f(n)]$,
  teda súčasne vzor (poradie n) a obraz $a_n = f(n)$.

Postupnosť (reálnych čísel) je každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in R$, t.j. $f: N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Explicitné zadanie: Všeobecné vyjadrenie $a_n = f(n)$, $n \in N$.
  $a_n = n^2$, $n \in N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
- Rekurentné zadanie: Zadanie a_1 a zadanie a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.
  $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$
  definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Postupnosti (reálnych čísel)

Funkcia f, $D(f) = N$

$f = \{[n; f(n)], n \in N\}$

$\Big\}$ **Postupnosť**, pre $n \in N$ značíme $a_n = f(n)$,
t.j. $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Postupnosť f je spočítateľná (nekonečná).
- $a_n \in f$ Člen postupnosti predstavuje $[n; f(n)]$,
  teda súčasne vzor (poradie n) a obraz $a_n = f(n)$.

Postupnosť (reálnych čísel) je každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in R$, t.j. $f: N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Explicitné zadanie: Všeobecné vyjadrenie $a_n = f(n)$, $n \in N$.
  $a_n = n^2$, $n \in N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
- Rekurentné zadanie: Zadanie a_1 a zadanie a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.
  $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$
  definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Postupnosti (reálnych čísel)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Funkcia } f,\ D(f) = N \\ f = \{[n; f(n)]\,, n \in N\}\end{array}\right\}$$ **Postupnosť**, pre $n \in N$ značíme $a_n = f(n)$,
t.j. $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $f \sim N$ Postupnosť f je spočítateľná (nekonečná).
- $a_n \in f$ Člen postupnosti predstavuje $[n; f(n)]$,
  teda súčasne vzor (poradie n) a obraz $a_n = f(n)$.

Postupnosť (reálnych čísel) je každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in R$, t.j. $f\colon N \to R$, $D(f) \subset R$.

- Explicitné zadanie: Všeobecné vyjadrenie $a_n = f(n)$, $n \in N$.
  $a_n = n^2$, $n \in N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
- Rekurentné zadanie: Zadanie a_1 a zadanie a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.
  $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \in N$
  definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, čísla $a, b \in R$.

- $\forall n \in N$: $a \leq a_n$ a je dolné ohraničenie, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohrainčená zdola.
- $\forall n \in N$: $a_n \leq b$ b je horné ohraničenie, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola a zhora $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\forall n \in N$: $a_n < a_{n+1}$ Rastúca.
$a_n > a_{n+1}$ Klesajúca.
} Ostro monotónna.

$\forall n \in N$: $a_n \leq a_{n+1}$ Neklesajúca.
$a_n \geq a_{n+1}$ Nerastúca.
$a_n = a_{n+1}$ Konštantná (stacionárna).
} Monotónna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ nie je monotónna.

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, čísla $a, b \in R$.

- $\forall n \in N$: $a \leq a_n$ — a je dolné ohraničenie, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohrainčená zdola.
- $\forall n \in N$: $a_n \leq b$ — b je horné ohraničenie, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola a zhora — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\left.\begin{array}{lll}
\forall n \in N\text{: } & a_n < a_{n+1} & \text{Rastúca.} \\
 & a_n > a_{n+1} & \text{Klesajúca.}
\end{array}\right\} \text{Ostro monotónna.} \\
\begin{array}{lll}
\forall n \in N\text{: } & a_n \leq a_{n+1} & \text{Neklesajúca.} \\
 & a_n \geq a_{n+1} & \text{Nerastúca.} \\
 & a_n = a_{n+1} & \text{Konštantná (stacionárna).}
\end{array}
\end{array}
\right\} \text{Monotónna postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.
$$

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ nie je monotónna.

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$, čísla $a, b \in R$.

- $\forall n \in N$: $a \leq a_n$ $\quad$ a je dolné ohraničenie, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohrainčená zdola.
- $\forall n \in N$: $a_n \leq b$ $\quad$ b je horné ohraničenie, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola a zhora $\quad$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{lll} \forall n \in N: & a_n < a_{n+1} & \text{Rastúca.} \\ & a_n > a_{n+1} & \text{Klesajúca.} \end{array}\right\} \text{Ostro monotónna.} \\ \begin{array}{lll} \forall n \in N: & a_n \leq a_{n+1} & \text{Neklesajúca.} \\ & a_n \geq a_{n+1} & \text{Nerastúca.} \\ & a_n = a_{n+1} & \text{Konštantná (stacionárna).} \end{array} \end{array}\right\} \text{Monotónna postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ nie je monotónna.

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Ak $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ je rastúca postupnosť (prirodzených čísel, indexov), potom sa $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť (vybraná postupnosť z)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podpostupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$ sú napríklad:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \dots\} = \{3, 7, 11, \dots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \dots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1,3,5,7,9,11,13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3,7,11,15,19,23,27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7,11,15,19,23,27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101 109 235 637
```

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

- Ak $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ je rastúca postupnosť (prirodzených čísel, indexov), potom sa $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť** (**vybraná postupnosť z**) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podpostupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ sú napríklad:

- $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{3, 7, 11, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$.
- $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$.

```
(%i2) a(n):=2*n-1$ makelist(a(n),n,1,7);
(%o2) [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]
(%i3) makelist(a(2*n),n,1,7);
(%o3) [3, 7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i4) makelist(a(2*n),n,2,7);
(%o4) [7, 11, 15, 19, 23, 27]
(%i5) print(a(51),a(55),a(118),a(319))$
      101  109  235  637
```

Postupnosti (reálnych čísel)

Pre každé okolie $O(a)$ existuje nekonečne veľa členov $a_n \in O(a)$,
potom sa $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ nazýva **hromadný bod** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Množinu všetkých hromadných bodov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme E.

$\sup E = \limsup_{n\to\infty} a_n$ — **Limes superior** (horná limita) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\inf E = \liminf_{n\to\infty} a_n$ — **Limes inferior** (dolná limita) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\left.\right\}$ Existujú vždy.

$\sup E = \inf E = \lim_{n\to\infty} a_n$ — **Limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (množina E má jediný prvok).

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu.
- Ak $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje, potom je jediná.

Postupnosti (reálnych čísel)

Pre každé okolie $O(a)$ existuje nekonečne veľa členov $a_n \in O(a)$,
potom sa $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ nazýva **hromadný bod** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Množinu všetkých hromadných bodov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme E.

$\sup E = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ — **Limes superior** (horná limita) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\inf E = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ — **Limes inferior** (dolná limita) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Limes superior} \\ \text{Limes inferior}\end{array}\right\}$ Existujú vždy.

$\sup E = \inf E = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ — **Limita** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (množina E má jediný prvok).

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu.
- Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, potom je jediná.

Postupnosti (reálnych čísel)

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$ — Existuje konečná limita, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. $\Big\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ — Existuje nekonečná limita, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$.

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ — Neexistuje limita, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.

$\Big\}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Zmena konečného počtu (pridanie, vynechanie, výmena poradia atď.) členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vplyv na konvergenciu alebo divergenciu tejto postupnosti.

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pre } q > 0. \\ \lim_{n\to\infty} n^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pre } q = 0. \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pre } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Geometrická postupnosť.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pre } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pre } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pre } q \in (0; 1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q < -1. \end{cases}$$

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pre } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pre } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pre } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Geometrická postupnosť.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pre } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pre } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pre } q \in (0; 1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q < -1. \end{cases}$$

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna. $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R^*$.

$$L = \lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} \infty^q = \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pre } q > 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pre } q = 0. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pre } q < 0\ (-q > 0). \end{cases}$$

Geometrická postupnosť.

$$L = \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} q^n \to \infty. & \Rightarrow \bullet\ L = \infty \text{ pre } q > 1. \\ q^n = 1^n = 1. & \Rightarrow \bullet\ L = 1 \text{ pre } q = 1. \\ q^n \to 0. & \Rightarrow \bullet\ L = 0 \text{ pre } q \in (0;1). \\ q^n = q^{2k} = 1,\ q^n = q^{2k+1} = -1. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q = -1. \\ q^n = q^{2k} \to \infty,\ q^n = q^{2k+1} \to -\infty. & \Rightarrow \bullet\ \nexists \text{ pre } q < -1. \end{cases}$$

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a < 1, \\ \infty & \text{pre } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a < 1, \\ \infty & \text{pre } a > 1. \end{cases}$

Dôležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$

- Číslo e sa nazýva **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je približne $2,718\,281\,827$.

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

- $a_n \geq 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a < 1, \\ \infty & \text{pre } a > 1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n \in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a < 1, \\ \infty & \text{pre } a > 1. \end{cases}$

Dôležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$

- Číslo e sa nazýva **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je približne $2{,}718\,281\,827$.

Postupnosti (reálnych čísel)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $a_n > 0,\ n\in N.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

- $a_n \geq 0,\ n\in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a\in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a<1, \\ \infty & \text{pre } a>1. \end{cases}$
- $a_n > 0,\ n\in N,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a\in R^*.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pre } a<1, \\ \infty & \text{pre } a>1. \end{cases}$

Dôležité limity. $a, b\in R,\ a>0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{b}{n}\right)^n = e^b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) = \ln e = 1.$

- Číslo e sa nazýva **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je približne 2,718 281 827.

Číselné rady

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť,

potom sa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazýva **(nekonečný číselný) rad**.

- Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k=\sum_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k=\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vzťah medzi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Číselné rady

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť,

potom sa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazýva **(nekonečný číselný) rad**.

- Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Vzťah medzi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    $\ldots$
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Číselné rady

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť,

potom sa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazýva **(nekonečný číselný) rad**.

- Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Jednoduchým príkladom sú zlomky a periodické čísla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}_{s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ (k\text{-ty čiastočný súčet})} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}_{r_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i \ (k\text{-ty zvyšok})}$$

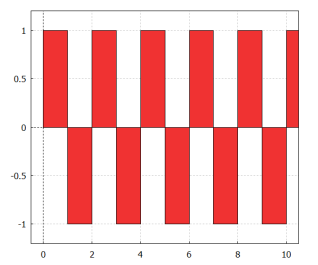
- $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ Postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Vzťah medzi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný.
  - $s_1 = a_1 = s_0 + a_1$.
  - $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$.
  - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$.

    ...
  - $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n$.
  - $a_1 = s_1 - s_0$, kde $s_0 = 0$.
  - $a_2 = s_2 - s_1$.
  - $a_3 = s_3 - s_2$.
  - $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \in N$.

Číselné rady

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

(%i1)
```
a(n):=(-1)^(n+1)$
rec:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i)]),i,1,11)$
draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
xrange=[-.5,10.5],yrange=[-1.2,1.2],
border=true,color=black,fill_color=red,rec)$
```



Číselné rady

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (ak existuje) sa nazýva **súčet** radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$ Existuje konečná limita, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k súčtu s, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ Existuje nekonečná limita, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $\pm\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Limita neexistuje, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.

$\Bigg\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Číselné rady

$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R^*$ (ak existuje) sa nazýva **súčet** radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$ Existuje konečná limita, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k súčtu s, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow s$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. $\Bigg\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ Existuje nekonečná limita, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $\pm\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \pm\infty$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ Limita neexistuje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje. $\Bigg\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$.

Číselné rady

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Zmena konečného počtu (pridanie, vynechanie, výmena poradia atď.) členov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá vplyv na konvergenciu alebo divergenciu radu.
- Ale má vplyv na jeho súčet.

Harmonický rad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$ (Harmonický rad má nekonečný súčet.)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty.$ (Harmonický rad diverguje do nekonečna.)

Číselné rady

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Zmena konečného počtu (pridanie, vynechanie, výmena poradia atď.) členov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá vplyv na konvergenciu alebo divergenciu radu.
- Ale má vplyv na jeho súčet.

Harmonický rad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$ (Harmonický rad má nekonečný súčet.)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty.$ (Harmonický rad diverguje do nekonečna.)

Číselné rady

Pre nekonečné rady neplatia niektoré pravidlá, napr. asociatívny zákon:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=\begin{cases}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0,\\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\quad=1+0+0+\cdots=1.\end{cases}$$

Geometrický rad.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}=1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q}$ pre všetky $q\in(-1;1)$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n,\ s_n=(1+q+\cdots+q^{n-1})\frac{1-q}{1-q}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1}$ pre $q\neq 1$.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases}\frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{\infty-1}{q-1}=\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty \quad \text{pre } q>1.\\ 1+1+1+1+\cdots\to\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty \quad \text{pre } q=1.\\ \frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{0-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\frac{1}{1-q} \quad \text{pre } q\in(-1;1).\\ -1+1-1+1-1+\cdots. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists \quad \text{pre } q=-1.\\ \frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1},\ \frac{1}{q}\to 0,\ q^{n-1}\to\pm\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists \quad \text{pre } q<-1.\end{cases}$$

Číselné rady

Pre nekonečné rady neplatia niektoré pravidlá, napr. asociatívny zákon:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=\begin{cases}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0,\\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\quad=1+0+0+\cdots=1.\end{cases}$$

Geometrický rad.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} q^{n}=1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q}$ pre všetky $q\in(-1;1)$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}=\lim_{n\to\infty} s_n$, $s_n=(1+q+\cdots+q^{n-1})\frac{1-q}{1-q}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1}$ pre $q\neq 1$.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}=\lim_{n\to\infty} s_n=\begin{cases}\frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{\infty-1}{q-1}=\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty \quad \text{pre } q>1.\\ 1+1+1+1+\cdots\to\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\infty \quad \text{pre } q=1.\\ \frac{q^n-1}{q-1}\to\frac{0-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}. & \Rightarrow\ \bullet\ S=\frac{1}{1-q} \quad \text{pre } q\in(-1;1).\\ -1+1-1+1-1+\cdots. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists \quad \text{pre } q=-1.\\ \frac{\frac{1}{q}-q^{n-1}}{\frac{1}{q}-1},\ \frac{1}{q}\to 0,\ q^{n-1}\to\pm\infty. & \Rightarrow\ \bullet\ \nexists \quad \text{pre } q<-1.\end{cases}$$

Číselné rady

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4)
```
sum: sum is divergent.
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

- V nasledujúcom príklade stačí meniť na začiatku hodnotu q.

```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

Číselné rady

```
(%i4) sq(q):=sum(q^n,n,1,inf)$ sq(1/2),simpsum;
      sq(1/3),simpsum; sq(-1/2),simpsum; sq(2),simpsum;
```

(%o1) 1

(%o2) $\frac{1}{2}$

(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%o4) sum: sum is divergent.

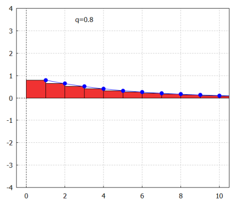
#0: sq(q=2) -- an error. To debug this try: debugmode(true);

- V nasledujúcom príklade stačí meniť na začiatku hodnotu q.

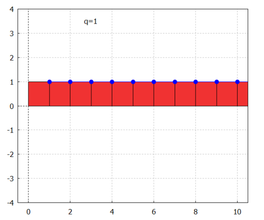
```
(%i1) q:0.8$ a(n,q):=q^n$ peca:makelist([i,a(i,q)],i,1,11)$
      reca:makelist(rectangle([i-1,0],[i,a(i,q)]),i,1,11)$
      draw2d(grid=true,xaxis=true,yaxis=true,
      xrange=[-.5,10.5],yrange=[-4,4],
      border=true,color=black,fill_color=light_red,reca,
      label([concat("q=",string(q)),3,3.5]),
      color=blue,explicit(a(n,q),n,1,11),
      point_type=7,color=blue,points(peca))$
```

Číselné rady

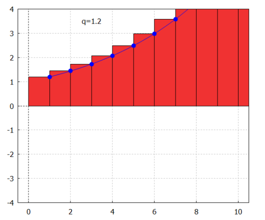
Príkazy zobrazia nasledujúce grafy:



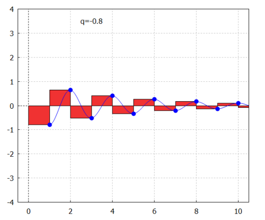
$q = 0.8$



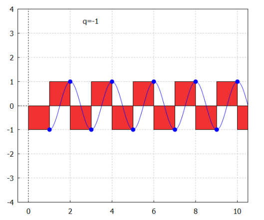
$q = 1$



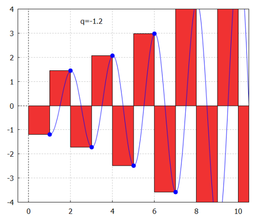
$q = 1.2$



$q = -0.8$



$q = -1$



$q = -1.2$

Číselné rady

Nutná podmienka konvergencie.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$ $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (limita neexistuje alebo je nulová).

$\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (osciluje alebo $\longrightarrow \pm\infty$).

Harmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje do nekonečna.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Geometrický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ pre $q = \frac{1}{2}$ konverguje do 2.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Číselné rady

Nutná podmienka konvergencie.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$ $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (limita neexistuje alebo je nulová).

  $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow$ (osciluje alebo $\longrightarrow \pm\infty$).

Harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje do nekonečna.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ pre $q = \frac{1}{2}$ konverguje do 2.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Číselné rady

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in N$ (**nezáporné členy**) má vždy súčet $0 \leq s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \infty$.

Porovnávacie kritérium. $0 \leq a_n \leq b_n,\ n \in N$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $0 \leq a_n \leq b_n,\ n \in N$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p,\ 0 < p < \infty.$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$ $\Leftrightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow .$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$ $\Leftrightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \longrightarrow \infty.$

Číselné rady

d'Alembertovo (podielové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow .$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow .$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

Číselné rady

d'Alembertovo (podielové) kritérium. $a_n > 0,\ n \in N.$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $a_n > 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$

Číselné rady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

Číselné rady

Cauchyho (odmocninové) kritérium. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,\ n \in N$, kde $q \in (0;1)$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $1 \leq \sqrt[n]{a_n},\ n \in N.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty.$

Limitný tvar. $a_n \geq 0,\ n \in N.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p.$

- $p < 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow.$
- $p > 1. \Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longrightarrow.$

Pre $p = 1$ nevieme rozhodnúť.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} = 1.$

Číselné rady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pre $a > 0$.

d'Alembertovo podielové kritérium:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pre $a > 0$.

Cauchyho odmocninové kritérium:

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$ $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longrightarrow$ pre $a > 0$.

```
(%i5) an(n,a):=a^n/n!$ a:2$ limit(an(n,a),n,inf,plus);
          limit(an(n+1,a)/an(n,a),n,inf,plus);
          limit((an(n,a))^(1/n),n,inf,plus);
(%o3) 0
(%o4) 0
(%o5) 0
```

Číselné rady

- Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolútne**, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$.
- Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje relatívne**, označenie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R}$.

Rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a_n \in R$, $n \in N$ majú vždy súčet $0 \leq s = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{A}$, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

Leibnizovo kritérium.

- $a_n \geq 0$, $n \in N$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow$.

- Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, kde $a_n \geq 0$ alebo $a_n \leq 0$ sa nazýva **rad so striedavými znamienkami**.

Číselné rady

- Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolútne**, označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{A}$.
- Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \not\longrightarrow$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje relatívne**, označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{R}$.

Rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a_n \in R$, $n \in N$ majú vždy súčet $0 \leq s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \infty$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{A}$, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \longrightarrow$. $\Rightarrow$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow$.

Leibnizovo kritérium.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n \geq 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerastúca.} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \longrightarrow.$$

- Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, kde $a_n \geq 0$ alebo $a_n \leq 0$ sa nazýva **rad so striedavými znamienkami**.

Číselné rady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$ (Anharmonický rad.)

Leibnizovo kritérium:

- $a_n = \frac{1}{n} > 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca (nerastúca).
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$

Anharmonický a harmonický rad.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$ (Anharmonický rad).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty$ (Harmonický rad).

Číselné rady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$ (Anharmonický rad.)

Leibnizovo kritérium:

- $a_n = \frac{1}{n} > 0,\ n \in N,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca (nerastúca).
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$\Rightarrow$ • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \xrightarrow{R}.$

Anharmonický a harmonický rad.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2$ (Anharmonický rad).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty$ (Harmonický rad).

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t.j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcia reálnej premennej.
- $H(f) \subset R$ Reálna funkcia.

Explicitne:
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky:
- $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkcie φ, ψ).

Implicitne:
- $f\colon F(x, y) = 0$, podmienky pre $[x; y]$ (Implicitná rovnica).

Funkcia $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkciu $f\colon y = |x|$, $x \in R$ môžeme napríklad definovať:

Explicitne:
- $y = \sqrt{x^2}$, resp.
- $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky:
- $x = t$, $y = |t|$, $t \in R$, resp.
- $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.

Implicitne:
- $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp.
- $y - |x| = 0$.

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t.j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcia reálnej premennej.
- $H(f) \subset R$ Reálna funkcia.

Explicitne: • $y = f(x),\ x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J,\ J \subset R$ (Pomocné funkcie φ, ψ).

Implicitne: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmienky pre $[x; y]$ (Implicitná rovnica).

Funkcia $f\colon y = |x|,\ x \in R$.

Funkciu $f\colon y = |x|,\ x \in R$ môžeme napríklad definovať:

Explicitne:	• $y = \sqrt{x^2}$,	resp.	• $y = \max\{-x, x\}$.
Parametricky:	• $x = t,\ y = \|t\|,\ t \in R$,	resp.	• $x = t,\ y = \sqrt{t^2},\ t \in R$.
Implicitne:	• $y^2 - x^2 = 0,\ y \geq 0$,	resp.	• $y - \|x\| = 0$.

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t.j. $f\colon D(f) \to H(f)$.

- $D(f) \subset R$ Funkcia reálnej premennej.
- $H(f) \subset R$ Reálna funkcia.

Explicitne: • $y = f(x)$, $x \in D(f)$ (Analytický vzorec).

Parametricky: • $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $J \subset R$ (Pomocné funkcie φ, ψ).

Implicitne: • $f\colon F(x, y) = 0$, podmienky pre $[x; y]$ (Implicitná rovnica).

Funkcia $f\colon y = |x|$, $x \in R$.

Funkciu $f\colon y = |x|$, $x \in R$ môžeme napríklad definovať:

Explicitne: • $y = \sqrt{x^2}$, resp. • $y = \max\{-x, x\}$.

Parametricky: • $x = t$, $y = |t|$, $t \in R$, resp. • $x = t$, $y = \sqrt{t^2}$, $t \in R$.

Implicitne: • $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. • $y - |x| = 0$.

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x \in A$: $a \leq f(x)$ — a je dolné ohraničenie, f je ohraničená zdola
- $\forall x \in A$: $f(x) \leq b$ — b je horné ohraničenie, f je ohraničená zhora
- f je ohraničená zdola a zhora — f je ohraničená

na množine A.

- nie je ohraničená zdola na množine A — f je neohraničená zdola
- nie je ohraničená zhora na množine A — f je neohraničená zhora
- nie je ohraničená na množine A — f je neohraničená

na množine A.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Lokálna vlastnosť na množine A.
- $A = D(f)$. Globálna vlastnosť (na definičnom obore).

- $f\colon y = \sin x$ je ohraničená, t.j. ohraničená na $D(f) = R$.
- $f\colon y = x^3$ je neohraničená (zdola alebo zhora), f je ohraničená napr. na $(0; 1\rangle$.

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x \in A$: $a \leq f(x)$ — a je dolné ohraničenie, f je ohraničená zdola
- $\forall x \in A$: $f(x) \leq b$ — b je horné ohraničenie, f je ohraničená zhora
- f je ohraničená zdola a zhora — f je ohraničená

na množine A.

- nie je ohraničená zdola na množine A — f je neohraničená zdola
- nie je ohraničená zhora na množine A — f je neohraničená zhora
- nie je ohraničená na množine A — f je neohraničená

na množine A.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Lokálna vlastnosť na množine A.
- $A = D(f)$. Globálna vlastnosť (na definičnom obore).

- $f\colon y = \sin x$ je ohraničená, t.j. ohraničená na $D(f) = R$.
- $f\colon y = x^3$ je neohraničená (zdola alebo zhora), f je ohraničená napr. na $\langle 0; 1\rangle$.

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in A\colon a \leq f(x) & a \text{ je dolné ohraničenie,} & f \text{ je ohraničená zdola} \\ \bullet\ \forall x \in A\colon f(x) \leq b & b \text{ je horné ohraničenie,} & f \text{ je ohraničená zhora} \\ \bullet\ f \text{ je ohraničená zdola a zhora} & & f \text{ je ohraničená} \end{array}\right\} \text{ na množine } A.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \text{nie je ohraničená zdola na množine } A & f \text{ je neohraničená zdola} \\ \bullet\ \text{nie je ohraničená zhora na množine } A & f \text{ je neohraničená zhora} \\ \bullet\ \text{nie je ohraničená na množine } A & f \text{ je neohraničená} \end{array}\right\} \text{ na množine } A.$$

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $A \neq D(f)$. Lokálna vlastnosť na množine A.
- $A = D(f)$. Globálna vlastnosť (na definičnom obore).

- $f\colon y = \sin x$ je ohraničená, t.j. ohraničená na $D(f) = R$.
- $f\colon y = x^3$ je neohraničená (zdola alebo zhora), f je ohraničená napr. na $(0; 1\rangle$.

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\}$ Lokálne infimum
- $\sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\}$ Lokálne suprémum

} na množine A.

- $\inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\}$ Globálne infimum
- $\sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\}$ Globálne suprémum

} (na definičnom obore).

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$ a bod $x_0 \in A$.

- $\forall x \in A$: $f(x_0) \leq f(x)$ Minimum.
  $f(x_0) \geq f(x)$ Maximum.
- $\forall x \in A,\ x \neq x_0$: $f(x_0) < f(x)$ Ostré minimum.
  $f(x_0) > f(x)$ Ostré maximum.

} Ostré extrémy.

} Extrémy na množine A.

$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Lokálne extrémy na množine A.

$A = D(f)$ • Globálne (absolútne) extrémy (na definičnom obore).

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet \ \inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\} & \text{Lokálne infimum} \\ \bullet \ \sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\} & \text{Lokálne suprémum} \end{array}\right\} \text{ na množine } A.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet \ \inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\} & \text{Globálne infimum} \\ \bullet \ \sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\} & \text{Globálne suprémum} \end{array}\right\} \text{ (na definičnom obore).}$$

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$ a bod $x_0 \in A$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet \ \forall x \in A\colon & f(x_0) \le f(x) & \text{Minimum.} \\ & f(x_0) \ge f(x) & \text{Maximum.} \\ \bullet \ \forall x \in A,\ x \ne x_0\colon & f(x_0) < f(x) & \left.\begin{array}{l}\text{Ostré minimum.} \\ \text{Ostré maximum.}\end{array}\right\} \text{Ostré extrémy.} \\ & f(x_0) > f(x) & \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Extrémy} \\ \quad \text{na množine } A.\end{array}$$

$A \subset D(f)$, $A \ne D(f)$ • Lokálne extrémy na množine A.

$A = D(f)$ • Globálne (absolútne) extrémy (na definičnom obore).

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- $\inf f(A) = \inf \{f(x), x \in A\}$ Lokálne infimum
- $\sup f(A) = \sup \{f(x), x \in A\}$ Lokálne suprémum

} na množine A.

- $\inf f(x) = \inf \{f(x), x \in D(f)\}$ Globálne infimum
- $\sup f(x) = \sup \{f(x), x \in D(f)\}$ Globálne suprémum

} (na definičnom obore).

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$ a bod $x_0 \in A$.

- $\forall x \in A$: $f(x_0) \leq f(x)$ Minimum.
  $f(x_0) \geq f(x)$ Maximum.
- $\forall x \in A$, $x \neq x_0$: $f(x_0) < f(x)$ Ostré minimum.
  $f(x_0) > f(x)$ Ostré maximum.

} Ostré extrémy.

} Extrémy na množine A.

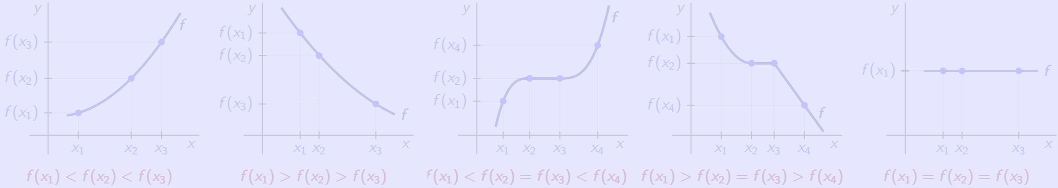
$A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$ • Lokálne extrémy na množine A.

$A = D(f)$ • Globálne (absolútne) extrémy (na definičnom obore).

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{lll}
\bullet\ \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2: & f(x_1) < f(x_2) & \text{Rastúca.} \\
 & f(x_1) > f(x_2) & \text{Klesajúca.}
\end{array}\right\} \text{Ostro monotónna.} \\
\begin{array}{lll}
\bullet\ \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2: & f(x_1) \leq f(x_2) & \text{Neklesajúca.} \\
 & f(x_1) \geq f(x_2) & \text{Nerastúca.} \\
\bullet\ \forall x_1, x_2 \in A: & f(x_1) = f(x_2) & \text{Konštantná.}
\end{array}
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Monotónna} \\ \quad\text{na množine } A.\end{array}$$



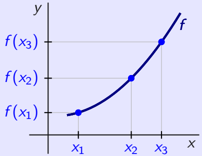
Rastúca funkcia | Klesajúca funkcia | Neklesajúca funkcia | Nerastúca funkcia | Konštantná funkcia

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

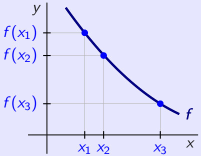
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ Rastúca. $f(x_1) > f(x_2)$ Klesajúca. $\Big\}$ Ostro monotónna.
- $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ Neklesajúca. $f(x_1) \geq f(x_2)$ Nerastúca.
- $\forall x_1, x_2 \in A$: $f(x_1) = f(x_2)$ Konštantná.

$\Bigg\}$ Monotónna na množine A.



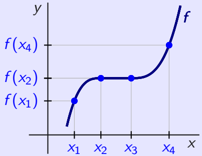
$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

Rastúca funkcia



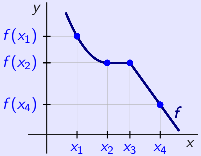
$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

Klesajúca funkcia



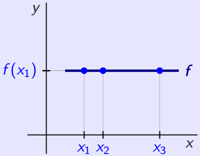
$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$

Neklesajúca funkcia



$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$

Nerastúca funkcia



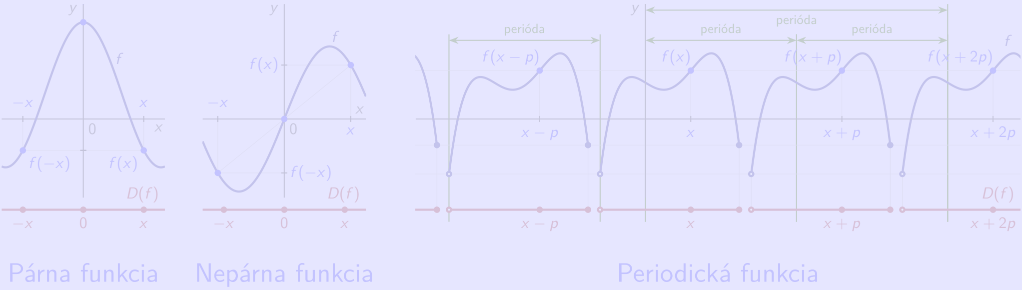
$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

Konštantná funkcia

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

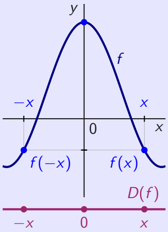
- $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f)$, $f(x) = f(-x)$ Párna funkcia.
  $f(x) = -f(-x)$ Nepárna funkcia.
- $\forall x \in D(f)$: $x \pm p \in D(f)$, $f(x) = f(x \pm p)$, $p \in R - \{0\}$ Periodická funkcia, p je perióda.



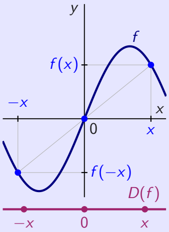
Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

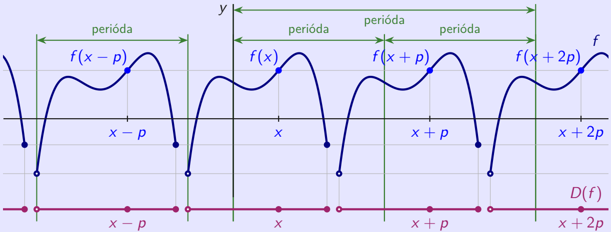
- $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f)$, $f(x) = f(-x)$ Párna funkcia.
  $f(x) = -f(-x)$ Nepárna funkcia.
- $\forall x \in D(f)$: $x \pm p \in D(f)$, $f(x) = f(x \pm p)$, $p \in R - \{0\}$ Periodická funkcia, p je perióda.



Párna funkcia



Nepárna funkcia



Periodická funkcia

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

- Priamka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spája body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \leq p(x) & \text{Konvexná} \\ & f(x) < p(x) & \text{Ostro konvexná} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \geq p(x) & \text{Konkávna} \\ & f(x) > p(x) & \text{Ostro konkávna} \end{array}\right\} \text{na intervale } I.$$

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod** f (f má **inflexiu** v bode x_0),

ak existuje okolie $O_\delta(x_0)$ také, že funkcia f:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \text{ ostro konvexná} \\ \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta) \text{ ostro konkávna} \end{array}\right\} \text{ resp. } \left\{\begin{array}{l} f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) \text{ ostro konkávna.} \\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) \text{ ostro konvexná.} \end{array}\right.$$

Funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

- Priamka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spája body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$.

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \leq p(x) & \text{Konvexná} \\ & f(x) < p(x) & \text{Ostro konvexná} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ x_1 < x < x_2: & f(x) \geq p(x) & \text{Konkávna} \\ & f(x) > p(x) & \text{Ostro konkávna} \end{array}\right\} \text{na intervale } I.$$

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

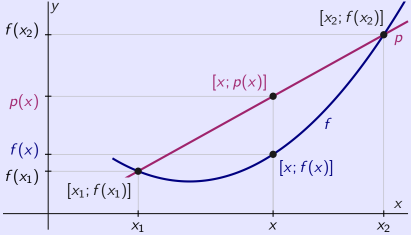
$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod** f (f má **inflexiu** v bode x_0),

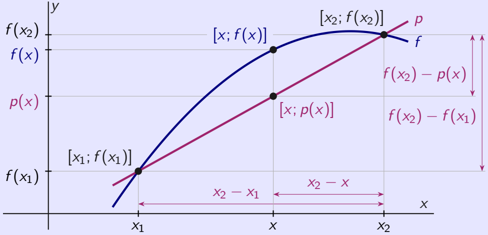
ak existuje okolie $O_\delta(x_0)$ také, že funkcia f:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \text{ ostro konvexná} \\ \bullet\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta) \text{ ostro konkávna} \end{array}\right\} \text{resp.} \left\{\begin{array}{l} f \text{ je na } O_\delta^-(x_0) \text{ ostro konkávna.} \\ f \text{ je na } O_\delta^+(x_0) \text{ ostro konvexná.} \end{array}\right.$$

Funkcie

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
- Priamka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spája body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.





Konvexná funkcia
$f(x) \leq p(x)$, $x_1 < x < x_2$

Konkávna funkcia
$f(x) \geq p(x)$, $x_1 < x < x_2$

Konvexná

Ostro konvexná

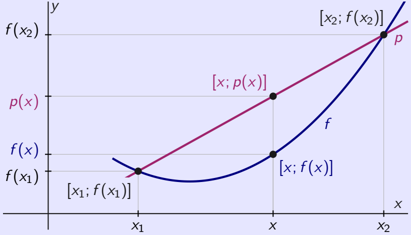
Konvexná a tiež konkávna

Konkávna

Ostro konkávna

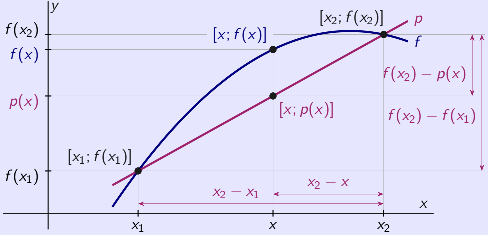
Funkcie

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $I \subset D(f)$ je interval, body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
- Priamka $p(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, $x \in R$ spája body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.



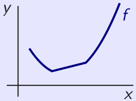
Konvexná funkcia

$f(x) \le p(x)$, $x_1 < x < x_2$

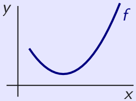


Konkávna funkcia

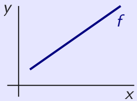
$f(x) \ge p(x)$, $x_1 < x < x_2$



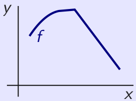
Konvexná



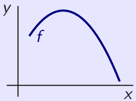
Ostro konvexná



Konvexná a tiež konkávna



Konkávna



Ostro konkávna

Elementárne funkcie I

Elementárna funkcia sa nazýva každá funkcia vytvorená pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia alebo pomocou skladania funkcií zo základných elementárnych funkcií:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Polynóm stupňa n

f_n: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- f_0: $y = a_0$, $a_0 \neq 0$ sa nazýva **konštantná funkcia**.
- f_1: $y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**.
- f_2: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická funkcia**.

Elementárne funkcie I

Elementárna funkcia sa nazýva každá funkcia vytvorená pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia alebo pomocou skladania funkcií zo základných elementárnych funkcií:

- $y = 1$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctan x$.

Polynóm stupňa n

$f_n\colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$, $a_n \neq 0$.

- $f_0\colon y = a_0$, $a_0 \neq 0$ sa nazýva **konštantná funkcia**.
- $f_1\colon y = a_0 + a_1 x$, $a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**.
- $f_2\colon y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická funkcia**.

Elementárne funkcie I

Racionálna lomená funkcia

$f\colon y=\frac{f_n(x)}{f_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m sú polynómy stupňov $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkcia

$f\colon y=x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciálna funkcia so základom $a>0$

$f\colon y=a^x$, $x \in R$.

- Najdôležitejšia je $f\colon y=\exp x=e^x$ so základom e (Eulerovo číslo).
- Graf sa nazýva **exponenciálna krivka** a prechádza bodmi $[0;1]$ a $[1;a]$.
- Grafy funkcií $y=a^x$, $y=a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.

Elementárne funkcie I

Racionálna lomená funkcia

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m sú polynómy stupňov $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkcia

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciálna funkcia so základom $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Najdôležitejšia je $f\colon y = \exp x = e^x$ so základom e (Eulerovo číslo).
- Graf sa nazýva **exponenciálna krivka** a prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcií $y = a^x$, $y = a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.

Elementárne funkcie I

Racionálna lomená funkcia

$f\colon y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$, kde f_n, f_m sú polynómy stupňov $n, m \in N \cup \{0\}$.

Mocninná funkcia

$f\colon y = x^r$, kde $r \in R$, $r \neq 0$.

Exponenciálna funkcia so základom $a > 0$

$f\colon y = a^x$, $x \in R$.

- Najdôležitejšia je $f\colon y = \exp x = \mathrm{e}^x$ so základom e (Eulerovo číslo).
- Graf sa nazýva **exponenciálna krivka** a prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.
- Grafy funkcií $y = a^x$, $y = a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.

Elementárne funkcie I

Logaritmická funkcia so základom $a > 0,\ a \neq 1$

$f\colon y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$.

- Logaritmická funkcia $y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty)$ je inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$, $x \in R$ s rovnakým základom $a > 0,\ a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Pre $a > 0,\ a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pre $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pre $x \in R$.
- Graf sa nazýva logaritmická krivka a prechádza bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ sú symetrické podľa osi x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ Prirodzený logaritmus, označenie $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (prirodzený logaritmus) majú základ e.
- Ak chceme vypočítať logaritmus s iným základom, napr. $\log_2 x$, musíme použiť konštrukciu $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

Elementárne funkcie I

Logaritmická funkcia so základom $a > 0,\ a \neq 1$

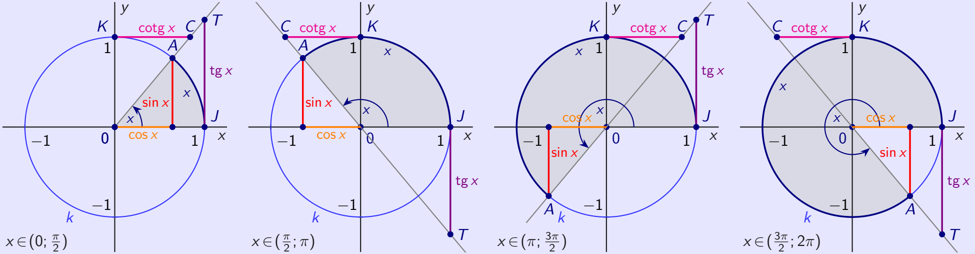
$$f\colon\ y = \log_a x,\ x \in \langle 0; \infty).$$

- Logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $x \in \langle 0; \infty)$ je inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$, $x \in R$ s rovnakým základom $a > 0$, $a \neq 1$ ($y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$).
- Pre $a > 0$, $a \neq 1$ platí: $x = a^{\log_a x}$ pre $x > 0$.
  $x = \log_a a^x$ pre $x \in R$.
- Graf sa nazýva logaritmická krivka a prechádza bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$.
- Grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x$ sú symetrické podľa osi x.
- $a = 10$. $\Rightarrow$ Dekadický logaritmus, označenie $\log x = \log_{10} x$.
- $a = \mathrm{e}$. $\Rightarrow$ Prirodzený logaritmus, označenie $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$.
  `exp(x)=%e^x` a `log(x)` (prirodzený logaritmus) majú základ e.
- Ak chceme vypočítať logaritmus s iným základom, napr. $\log_2 x$, musíme použiť konštrukciu $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.

Elementárne funkcie II

Goniometrické (trigonometrické) funkcie sú:

- **Sínus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosínus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{k\pi, k \in Z\} \to R$.

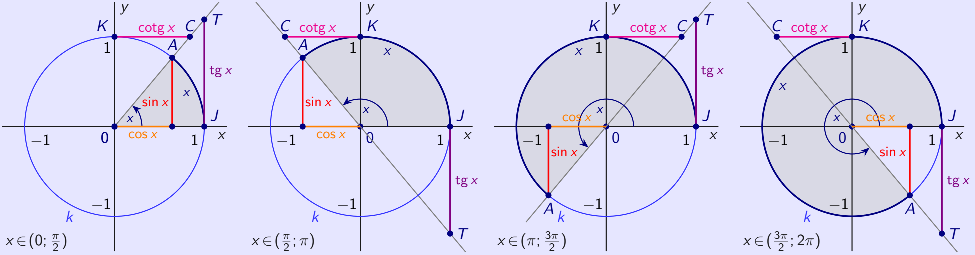


- Číslo π sa nazýva **Ludolfovo**. Jeho hodnota je približne $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π.

Elementárne funkcie II

Goniometrické (trigonometrické) funkcie sú:

- **Sínus** $y = \sin x = |AA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Kosínus** $y = \cos x = |OA_x|$: $R \to \langle -1; 1 \rangle$.
- **Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$: $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\} \to R$.
- **Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$: $R - \{ k\pi, k \in Z \} \to R$.



- Číslo π sa nazýva **Ludolfovo**. Jeho hodnota je približne $3,141\,592\,654$.
- Kružnica s polomerom $r = 1$ má obvod 2π.

Elementárne funkcie II

- V programe Maxima majú goniometrické funkcie tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcií musia byť zadané v radiánoch.
- Ak chceme použiť stupne, musíme ich najprv previesť na radiány.

```
(%i3) tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5);
      ratsimp(tangrad(22.5));
```

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

```
rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125
```

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Na zjednodušenie práce s goniometrickými funkciami môžeme použiť príkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` alebo `spangl`, ktoré obsahujú ďalšiu podporu pre prácu s goniometrickými funkciami.
- Balíčky načítame do systému pomocou príkazu `load`.

Elementárne funkcie II

- V programe Maxima majú goniometrické funkcie tvar `sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`, `cot(x)`.
- Argumenty goniometrických funkcií musia byť zadané v radiánoch.
- Ak chceme použiť stupne, musíme ich najprv previesť na radiány.

(%i3) `tangrad(x):=tan(x/180*%pi); tangrad(22.5); ratsimp(tangrad(22.5));`

(%o1) $\mathrm{tangrad}(x) := \tan\left(\frac{x}{180}\pi\right)$

(%o2) $\tan(0.125\pi)$

`rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125`

(%o3) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

- Na zjednodušenie práce s goniometrickými funkciami môžeme použiť príkazy `trigsimp`, `trigrat`, `trigexpand`, `trigreduce` a balíčky `atrig1`, `ntrig` alebo `spangl`, ktoré obsahujú ďalšiu podporu pre prácu s goniometrickými funkciami.
- Balíčky načítame do systému pomocou príkazu `load`.

Elementárne funkcie II

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám:

- **Arkussínus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- **Arkuskosínus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arkustangens** $y = \operatorname{arctg} x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú injektívne. Je potrebné ich vhodne zúžiť.

Elementárne funkcie II

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus. $x, y \in R$.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$.
- $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cdot \cos x$.
- $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám:

- **Arkussínus** $y = \arcsin x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- **Arkuskosínus** $y = \arccos x$: $\langle -1; 1 \rangle \to \langle 0; \pi \rangle$.
- **Arkustangens** $y = \mathrm{arctg}\, x$: $R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.
- **Arkuskotangens** $y = \mathrm{arccotg}\, x$: $R \to (0; \pi)$.

- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú injektívne. Je potrebné ich vhodne zúžiť.

Elementárne funkcie II

- Cyklometrické funkcie majú tvar `asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`, `acot(x)`.
- Na tomto mieste môžeme spomenúť funkciu `atan2(x,y)` definovanú vzťahom arctg $\frac{x}{y}$.

(%i4) `asin(1);asin(1),numer;`
`acos(1);acos(1),numer;`

(%o1) $\frac{\pi}{2}$

(%o2) 1.570796326794897

(%o1) 0

(%o2) 0.0

(%i7) `atan2(2,4);atan(1/2);atan(1/2),numer;`

(%o5) $\mathrm{atan}(\frac{1}{2})$

(%o6) $\mathrm{atan}(\frac{1}{2})$

(%o7) 0.4636476090008061

Súčtové vzorce pre cyklometrické funkcie.

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pre $x \in \langle -1; 1\rangle$.
- $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}$ pre $x \in R$.

Elementárne funkcie II

Hyperbolické funkcie sú:

- **Hyperbolický sínus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}$: $R \to R$.
- **Hyperbolický kosínus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1 \rangle$.

- Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti ako goniometrické funkcie.

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus hyperbolické. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Elementárne funkcie II

Hyperbolické funkcie sú:

- **Hyperbolický sínus** $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\, e^x}$: $R \to R$.
- **Hyperbolický kosínus** $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\, e^x}$: $R \to \langle 1; \infty)$.
- **Hyperbolický tangens** $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: $R \to (-1; 1)$.
- **Hyperbolický kotangens** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: $R - \{0\} \to R - \langle -1; 1\rangle$.

- Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti ako goniometrické funkcie.

Súčtové vzorce pre sínus a kosínus hyperbolické. $x, y \in R$.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$.
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$.
- $\sinh x \pm \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm e^{\pm x}$.
- $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
- $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Elementárne funkcie II

Moivreov vzorec. $x \in R,\ n \in N.$

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$

- Hyperbolické funkcie sú `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)` a k nim inverzné hyperbolometrické funkcie sú `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`.

(%i4) `sinh(x);cosh(0);tanh(0);coth(1),numer;`

(%o1) $\sinh(x)$

(%o2) 1

(%o3) 0

(%o4) 1.313035285499331

(%i8) `asinh(x);acosh(1);atanh(0);acoth(1.3),numer;`

(%o5) $\mathrm{asinh}(x)$

(%o6) 0

(%o7) 0

(%o8) 1.018440963663052

Elementárne funkcie II

Hyperbolometrické funkcie sú inverzné ku hyperbolickým funkciám:

- **Argument sínus hyperbolický**
$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\colon \quad R \to R.$$
- **Argument kosínus hyperbolický**
$$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\colon \quad \langle 1; \infty) \to \langle 0; \infty).$$
- **Argument tangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{argtgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1+x}{1-x}\colon \qquad (-1; 1) \to R.$$
- **Argument kotangens hyperbolický**
$$y = \operatorname{argcotgh} x = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{x+1}{x-1}\colon \qquad R - \langle -1; 1\rangle \to R - \{0\}.$$

```
(%i3) ash(x):=log(x+sqrt(x^2+1))$
      a:2$ asinh(a)-ash(a),numer;
(%o3) 0.0
```

Limita funkcie

- Pri vyšetrovaní funkcie je potrebné charakterizovať jej lokálne vlastnosti v rôznych intervaloch a v okoliach dôležitých bodov.
- Funkcia f nemusí byť definovaná v bode, okolo ktorého ju vyšetrujeme.

Bod $a \in R^*$ sa nazýva **hromadný bod** množiny $A \subset R$,
ak pre každé okolie $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Nasledujúca definícia pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho.

Funkcia f **má v bode** $a \in R^*$ **limitu** $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, potom existuje (aspoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

Limita funkcie

- Pri vyšetrovaní funkcie je potrebné charakterizovať jej lokálne vlastnosti v rôznych intervaloch a v okoliach dôležitých bodov.
- Funkcia f nemusí byť definovaná v bode, okolo ktorého ju vyšetrujeme.

Bod $a \in R^*$ sa nazýva **hromadný bod** množiny $A \subset R$,
ak pre každé okolie $O(a)$ existuje $x \in O(a) \cap A$, $x \neq a$.

Nasledujúca definícia pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho.

Funkcia f **má v bode** $a \in R^*$ **limitu** $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, potom existuje (aspoň jedna) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, $x_n \in D(f) - \{a\}$
a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

Limita funkcie

Limitu môžeme charakterizovať pomocou okolí $O(a)$ a $O(b)$.

Funkcia f **má v bode** $a \in R^*$ **limitu** $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pre každé okolie $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \begin{cases} a \in R^*. & \begin{cases} a \in R. & \text{Limita vo vlastnom bode } a. \\ a = \pm\infty. & \text{Limita v nevlastnom bode } a. \end{cases} \\ b \in R^*. & \begin{cases} b \in R. & \text{Vlastná (konečná) limita.} \\ b = \pm\infty. & \text{Nevlastná (nekonečná) limita.} \end{cases} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, kde $a \in R^*$, $b \in R$.

$\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

Limita funkcie

Limitu môžeme charakterizovať pomocou okolí $O(a)$ a $O(b)$.

Funkcia f **má v bode** $a \in R^*$ **limitu** $b \in R^*$, označenie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadný bod množiny $D(f)$.
- Pre každé okolie $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \begin{cases} a \in R^*. & \begin{cases} a \in R. & \text{Limita vo vlastnom bode } a. \\ a = \pm\infty. & \text{Limita v nevlastnom bode } a. \end{cases} \\ b \in R^*. & \begin{cases} b \in R. & \text{Vlastná (konečná) limita.} \\ b = \pm\infty. & \text{Nevlastná (nekonečná) limita.} \end{cases} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, kde $a \in R^*$, $b \in R$.

$\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

Limita funkcie

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $O(a)$ je okolie.

$\forall x \in O(a)$, $x \neq a$:
- $f(x) = g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokiaľ existujú.
- $f(x) \leq g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokiaľ existujú.

$\forall x \in O(a)$, $x \neq a$:
- $f(x) < g(x)$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pokiaľ existujú.

Veta o dvoch policajtoch.

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$, $O(a)$ je okolie.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in O(a),\ x \neq a\text{: } h(x) \leq f(x) \leq g(x). \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b, \text{ kde } b \in R^*. \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ \text{Existuje } \lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

- ∞ je hromadný bod definičného oboru $D(f) = R - \{0\}$ funkcie $f\colon y = \frac{\sin x}{x}$.
- $x > 0. \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

Limita funkcie

Limita zloženej funkcie.

Funkcie $y = f(x)$, $y = g(x)$, $H(f) \subset D(g)$, $a, b, c \in R^*$, $O(a)$ je okolie.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u) = c. \\ \left.\begin{array}{r} \bullet \ \forall x \in O(a),\ x \neq a\colon f(x) \neq b, \\ \text{resp.} \quad \bullet \ g(b) = c. \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \ \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c.$$

Substitúcia $u = f(x)$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \left[\begin{array}{c} \text{Subst. } u = f(x) \\ x \to a,\ u \to b. \end{array}\right] = \lim\limits_{u\to b} g(u).$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $a, b, c \in R^*$, $r \in R$. $\Rightarrow$ (Ak majú výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} \left[r \cdot f(x)\right] = r \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = r \cdot b$.
- $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \circledast g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \circledast \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \circledast c$, kde $\circledast$ je $+$, $-$, $\cdot$, resp. $/$.

Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, neznamená to, že limita neexistuje.
Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.

Limita funkcie

Limita zloženej funkcie.

Funkcie $y=f(x)$, $y=g(x)$, $H(f)\subset D(g)$, $a,b,c\in R^*$, $O(a)$ je okolie.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{u\to b} g(u)=c. \\ \left.\begin{array}{r} \bullet\ \forall x\in O(a),\ x\neq a\colon f(x)\neq b, \\ \text{resp.}\quad \bullet\ g(b)=c. \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{u\to b} g(u)=c.$$

Substitúcia $u=f(x)$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\left[\begin{array}{c}\text{Subst. } u=f(x)\\ x\to a,\ u\to b.\end{array}\right]=\lim\limits_{u\to b} g(u)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, $a,b,c\in R^*$, $r\in R$. $\Rightarrow$ (Ak majú výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|b|$.
- $\lim\limits_{x\to a} \left[r\cdot f(x)\right]=r\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=r\cdot b$.
- $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x)\circledast g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\circledast\lim\limits_{x\to a} g(x)=b\circledast c$, kde $\circledast$ je $+$, $-$, $\cdot$, resp. $/$.

Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, neznamená to, že limita neexistuje.
Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.

Limita funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- $f^{-}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x<a\}}$ Zúženie funkcie f naľavo.
- $f^{+}(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a<x\}}$ Zúženie funkcie f napravo.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^{-}(x)$ Limita zľava.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^{+}(x)$ Limita sprava.

Jednostranná limita funkcie f v bode a.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (Obojstranná) limita funkcia f v bode a.

```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,x,0,plus);
      limit(1/x,x,0);
(%o1) -∞
(%o2) ∞
(%o3) infinity        /* Complex inf */
```

Ak $a \in R$, $b \in R^*$, potom platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b.$

Limita funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- $f^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x<a\}}$ Zúženie funkcie f naľavo.
- $f^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap(a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a<x\}}$ Zúženie funkcie f napravo.

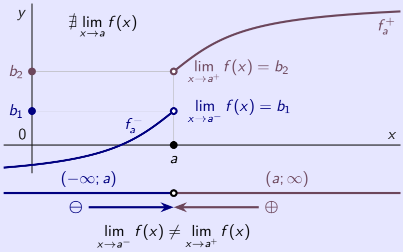
$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^-(x) & \text{Limita zľava.} \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f^+(x) & \text{Limita sprava.} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Jednostranná limita} \\ \quad \text{funkcie } f \text{ v bode } a.\end{array}$$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (Obojstranná) limita funkcia f v bode a.

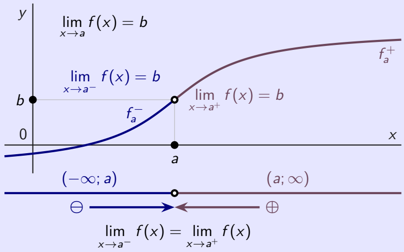
```
(%i3) limit(1/x,x,0,minus);limit(1/x,x,0,plus);
      limit(1/x,x,0);
(%o1) -∞
(%o2) ∞
(%o3) infinity      /* Complex inf */
```

Ak $a \in R$, $b \in R^*$, potom platí: • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b.$

Limita funkcie



Jednostranné limity

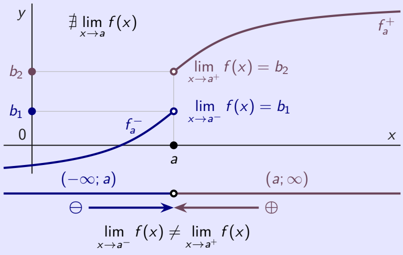


Obojstranné limity

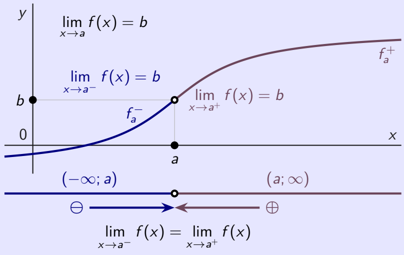
Dôležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+bx} = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right) = \ln e = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1.$

Limita funkcie



Jednostranné limity



Obojstranné limity

Dôležité limity. $a, b \in R,\ a > 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + bx} = e^b.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + x} = e.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right) = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right) = \ln e = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$

Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti aj v iných ako vlastných bodoch:

- Pre $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodov $a \in R$, pre ktoré platí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice (vertikálna)** grafu f,

  ak $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (aspoň jedna z limít je nekonečná).
- Priamka $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f,

  ak $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

Špeciálne asymptota $y = q$ sa nazýva **horizontálna asymptota**,

t.j. $k = 0$ a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = q$.

Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti aj v iných ako vlastných bodoch:

- Pre $x \to \pm\infty$.
- V okolí $O(a)$ bodov $a \in R$, pre ktoré platí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in R$.

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice** (**vertikálna**) grafu f,

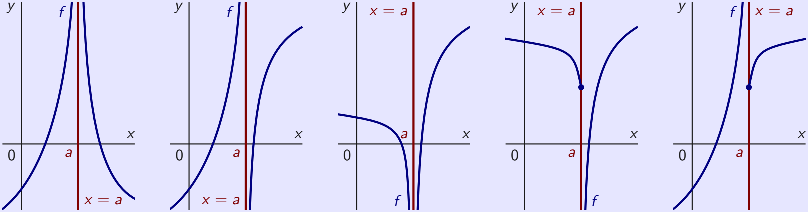
  ak $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (aspoň jedna z limít je nekonečná).
- Priamka $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f,

  ak $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

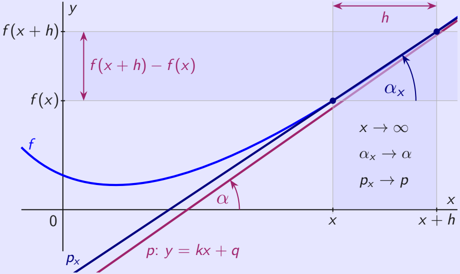
Špeciálne asymptota $y = q$ sa nazýva **horizontálna asymptota**,

t.j. $k = 0$ a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = q$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q$.

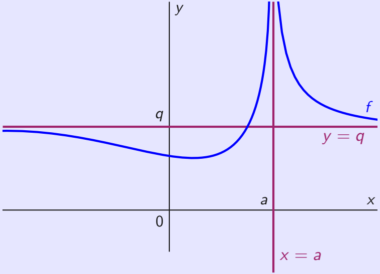
Limita funkcie



Príklady asymptôt bez smernice.



Asymptota so smernicou α.



Vertikálna asymptota $y = q$.
Horizontálna asymptota $x = a$.

Limita funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, pričom $D(f)$ je neohraničená množina.

- Priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existujú $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkcia $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Priamka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ je asymptota so smernicou $\frac{1}{4}$.

Limita funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, pričom $D(f)$ je neohraničená množina.

- Priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou grafu f.

$\Leftrightarrow$ • Existujú $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q$, $k, q \in R$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = 0. \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Funkcia $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in R$.

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{8x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{8} = \frac{2+0+0}{8} = \frac{1}{4}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{2x^2}{8x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8}.$$

- Priamka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ je asymptota so smernicou $\frac{1}{4}$.

Spojitosť funkcie

- Pojem limity funkcie f v bode a úzko súvisí so spojitosťou funkcie f v bode a.
- Spojitosť je tiež lokálnou záležitosťou v nejakom okolí $O(a)$.

Nasledujúca definícia spojitosti pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho.

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

- Ak je $a \in D(f)$ izolovaný bod, potom funkcia f je spojitá v bode a.

(Potom existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.)

Spojitosť môžeme charakterizovať pomocou okolí $O(a)$ a $O(f(a))$.

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre každé okolie $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$ platí $f(x) \in O(f(a))$, t.j. $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Spojitosť funkcie

- Pojem limity funkcie f v bode a úzko súvisí so spojitosťou funkcie f v bode a.
- Spojitosť je tiež lokálnou záležitosťou v nejakom okolí $O(a)$.

Nasledujúca definícia spojitosti pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho.

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

- Ak je $a \in D(f)$ izolovaný bod, potom funkcia f je spojitá v bode a.
(Potom existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.)

Spojitosť môžeme charakterizovať pomocou okolí $O(a)$ a $O(f(a))$.

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre každé okolie $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že
pre všetky $x \in O(a)$ platí $f(x) \in O(f(a))$, t.j. $f(O(a)) \subset O(f(a))$.

Spojitosť funkcie

Ak je $a \in D(f)$ hromadný bod, potom sa definícia spojitosti zhoduje s definíciou limity.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $a \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$.

- Funkcia f je spojitá v bode a. $\Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, $r \in R$.

$\Rightarrow$ • $|f|$, • $f \pm g$, • rf, • fg, • $\frac{f}{g}$ pre $g(a) \neq 0$ sú spojité v bode a.

Spojitosť zloženej funkcie.

- Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.
- Funkcia g je spojitá v bode $b = f(a) \in D(g)$.
- $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a.

Spojitosť funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$.

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x\leq a\}}$ Zúženie funkcie f naľavo.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a\leq x\}}$ Zúženie funkcie f napravo.

- $f_a^-(x)$ spojitá v bode a — Spojitosť zľava.
- $f_a^+(x)$ spojitá v bode a — Spojitosť sprava.

  } Jednostranná spojitosť funkcie f v bode a.
- $f(x)$ spojitá v bode a — (Obojstranná) spojitosť funkcie f v bode a.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, v ktorom je f ohraničená.
- Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Funkcia f nemusí byť ohraničená na A.

Funkcia f sa nazýva **spojitá na množine** $A \subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode $a \in A$.

Spojitosť funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$.

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f)\cap(-\infty;a\rangle} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ x\leq a\}}$ Zúženie funkcie f naľavo.
- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f)\cap\langle a;\infty)} = f(x)|_{\{x\in D(f),\ a\leq x\}}$ Zúženie funkcie f napravo.

- $f_a^-(x)$ spojitá v bode a — Spojitosť zľava.
- $f_a^+(x)$ spojitá v bode a — Spojitosť sprava.

Jednostranná spojitosť funkcie f v bode a.

- $f(x)$ spojitá v bode a — (Obojstranná) spojitosť funkcie f v bode a.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $a \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

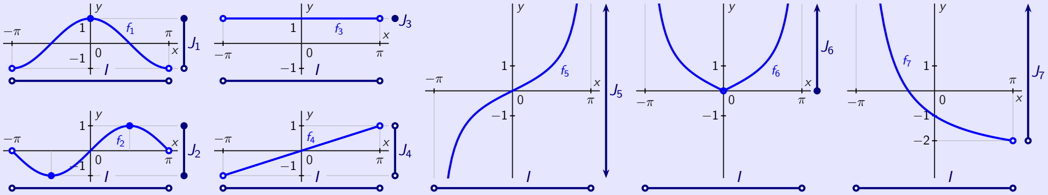
- Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Existuje $O(a)$, v ktorom je f ohraničená.
- Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$.
  $\Rightarrow$ • Funkcia f nemusí byť ohraničená na A.

Funkcia f sa nazýva **spojitá na množine** $A \subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode $a \in A$.

Spojitosť funkcie

Ak je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$, potom množina $f(I)$ je interval.

- $I = \langle a; b\rangle$ je uzavretý interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ je uzavretý interval.
- I nie je uzavretý interval. $\Rightarrow$ • $f(I)$ môže byť intervalom ľubovoľného typu.



- $f_1(x) = \cos x$: $(-\pi; \pi) \to J_1 = (-1; 1\rangle$.
- $f_2(x) = \sin x$: $(-\pi; \pi) \to J_2 = \langle -1; 1\rangle$.
- $f_3(x) = 1$: $(-\pi; \pi) \to J_3 = \{1\}$.
- $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_4 = (-1; 1)$.
- $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $(-\pi; \pi) \to J_5 = (-\infty; \infty)$.
- $f_6(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$: $(-\pi; \pi) \to J_6 = \langle 0; \infty)$.
- $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$: $(-\pi; \pi) \to J_7 = (-2; \infty)$.

Spojitosť funkcie

Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $a \in R$ (bod nespojitosti).

- Odstrániteľná nespojitosť

  Existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in R$, $b \neq f(a)$.

- Neodstrániteľná nespojitosť I. typu

  $$\left.\begin{array}{l}\text{Existujú } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b^- \in R \\ \text{a } \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b^+ \in R\end{array}\right\} b^- \neq b^+.$$

  Rozdiel $c = b^+ - b^-$ sa nazýva skok funkcie f v bode a.

- Neodstrániteľná nespojitosť II. typu

  $$\left.\begin{array}{l}\text{Aspoň jedna } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \\ \text{alebo } \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\end{array}\right\} \text{neexistuje alebo je nekonečná.}$$

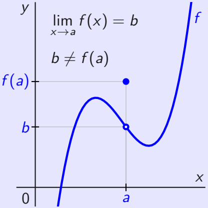
  Asymptotická nespojitosť, ak aspoň jedna z jednostranných limít je nekonečná.

Funkcia f je nespojitá v bode $a \in R$.

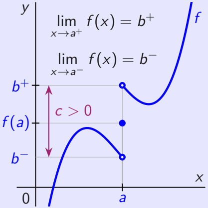
Obraz $f(a)$ môže, ale nemusí existovať.

Spojitosť funkcie

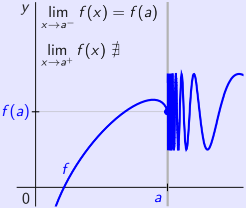
- Nespojitosť funkcie f v bode a.



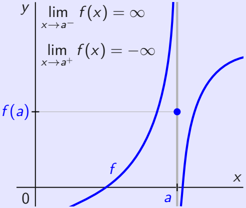
Odstrániteľná nespojitosť.



Neodstrániteľná nespojitosť I. typu.



Neodstrániteľná nespojitosť II. typu.



Neodstrániteľná nespojitosť II. typu. (asymptotická nespojitosť).

Cauchyho veta o nulovom bode.

- Funkcia f je spojitá na $\langle a; b\rangle$.
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (a; b)$ také, že $f(c) = 0$.

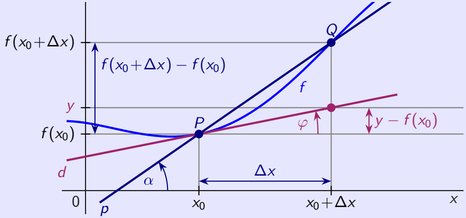
Diferenciálny počet

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ ležia na grafe f.
- Priamka PQ má smernicu $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Dotyčnica k f v bode P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,
  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je jej smernica.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$
- $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$,
  - $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$,
  - $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ smeruje k dotyčnici).

- Dotyčnica má smernicu $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

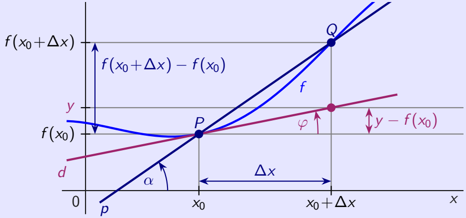
Geometrický význam derivácie funkcie v bode. – Smernica dotyčnice.

Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ ležia na grafe f.
- Priamka PQ má smernicu $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Dotyčnica k f v bode P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,

  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je jej smernica.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$
- $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$,
  - $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$,
  - $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ smeruje k dotyčnici).

- Dotyčnica má smernicu $\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

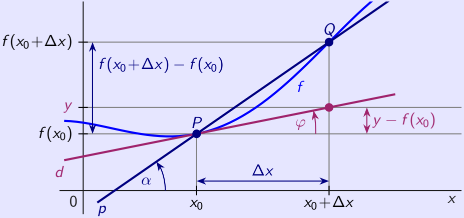
Geometrický význam derivácie funkcie v bode. – Smernica dotyčnice.

Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.

- Body $P = [x_0; f(x_0)]$, $Q = [x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x)]$ ležia na grafe f.
- Priamka PQ má smernicu $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Dotyčnica k f v bode P má tvar d_P: $y - f(x_0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$,

  kde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{\Delta x}$ je jej smernica.



- $Q \to P$. $\Rightarrow$ • $\Delta x \to 0$.
  - $x_0 + \Delta x \to x_0$, • $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.
  - $\alpha \to \varphi$, • $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$.
  - $PQ \to d_P$ (PQ smeruje k dotyčnici).

- Dotyčnica má smernicu $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\alpha\to\varphi} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Geometrický význam derivácie funkcie v bode. – Smernica dotyčnice.

Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **deriváciu v bode** $x_0 \in D(f)$,
označenie $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ alebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocou diferenciálov,

ak existuje • $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

- $f'(x_0) \in R$. Vlastná (konečná)
- $f'(x_0) = \infty$ alebo $f'(x_0) = -\infty$. Nevlastná (nekonečná)

$\left.\right\}$ derivácia f v bode x_0.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bode x_0.

Spojitosť funkcie f v bode x_0 nezaručuje existenciu $f'(x_0)$.

Funkcia $f\colon y = |x|$ je spojitá v bode $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má **deriváciu v bode** $x_0 \in D(f)$,
označenie $f'(x_0)$, resp. $y'(x_0)$ alebo $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$ pomocou diferenciálov,

ak existuje • $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = x - x_0 \\ x \to x_0, \quad h \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

- $f'(x_0) \in R$. Vlastná (konečná)
- $f'(x_0) = \infty$ alebo $f'(x_0) = -\infty$. Nevlastná (nekonečná)

} derivácia f v bode x_0.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_o \in D(f)$.

- Existuje $f'(x_0) \in R$ (konečná). $\Rightarrow$ • f je spojitá v bode x_0.

Spojitosť funkcie f v bode x_0 nezaručuje existenciu $f'(x_0)$.

Funkcia $f\colon y = |x|$ je spojitá v bode $x_0 = 0$.

- Ale neexistuje $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Derivácia reálnej funkcie

$f'(x_0)$ predstavuje geometricky smernicu dotyčnice ku grafu f v bode x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Dotyčnica d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bode x_0.
  Dotyčnica d: $x = x_0$ bez smernice (vertikálna).

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

(%o3) $\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Derivácia reálnej funkcie

$f'(x_0)$ predstavuje geometricky smernicu dotyčnice ku grafu f v bode x_0.

- $f'(x_0) \in R$. Dotyčnica d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$.
- $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bode x_0.
  Dotyčnica d: $x = x_0$ bez smernice (vertikálna).

Vypočítame deriváciu funkcie $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(%i1) `f(x):=log(x+sqrt(x^2+1));`

(%o1) $f(x) := \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(%i3) `f_1(x):=diff(f(x),x);f_1(x);`

(%o2) $f\_1(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$

(%o3) $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(%i4) `ratsimp(f1(x));`

(%o4) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$.

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivácia zľava.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivácia sprava.

} Jednostranné derivácie funkcie f v bode x_0.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Obojstranná) derivácia funkcie f v bode x_0.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset \{x_0 \in D(f), f'(x_0) \text{ is finite}\}$, $A \neq \emptyset$.

- Potom $y = f'(x)$, $x \in A$ je funkcia a nazýva sa **derivácia** funkcie f na množine A, označenie $f' = \frac{df}{dx}$, resp. $y' = \frac{dy}{dx}$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x_0 \in A$: $f'(x_0) \in R$ (konečná derivácia). $\Rightarrow$ • Funkcia f je spojitá na množine A.

Exponenciálna funkcia f: $y = e^x$, $x \in R$.

- $[e^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ pre všetky $x \in R$.

Derivácia reálnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$.

- $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivácia zľava.
- $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Derivácia sprava.

} Jednostranné derivácie funkcie f v bode x_0.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Obojstranná) derivácia funkcie f v bode x_0.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset \{x_0 \in D(f), f'(x_0) \text{ is finite}\}$, $A \neq \emptyset$.

- Potom $y = f'(x)$, $x \in A$ je funkcia
  a nazýva sa **derivácia** funkcie f na množine A, označenie $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, resp. $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

- $\forall x_0 \in A$: $f'(x_0) \in R$ (konečná derivácia). $\Rightarrow$ • Funkcia f je spojitá na množine A.

Exponenciálna funkcia f: $y = e^x$, $x \in R$.

- $[e^x]' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ pre všetky $x \in R$.

Derivácia reálnej funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

- $[c]' = 0$ pre $x \in R$, $c \in R$.
- $[x^n]' = nx^{n-1}$ pre $x \in R$, $n \in N$.
- $[e^x]' = e^x$ pre $x \in R$.
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ pre $x > 0$.
- $[\sin x]' = \cos x$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in Z$.
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$.
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$ pre $x \in R$.
- $[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in (-1; 1)$.
- $[x]' = 1$ pre $x \in R$.
- $[x^a]' = ax^{a-1}$ pre $x > 0$, $a \in R$.
- $[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R$, $a > 0$.
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$ pre $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- $[\cos x]' = -\sin x$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \neq k\pi$, $k \in Z$.
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$.
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ pre $x \in R$.
- $[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \neq 0$.
- $[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pre $x > 1$.
- $[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in R - \langle -1; 1 \rangle$.

Pre praktické potreby je potrebné vzorce sa naučiť naspamäť.

Derivácia reálnej funkcie

Pri praktickom výpočte derivácii používame rôzne vzorce a pravidlá.

Pravidlá pre derivácie.

Funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \neq \emptyset$, bod $x_0 \in A$, číslo $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ for $g(x_0) \neq 0$,

- $(cf)' = cf'$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \neq \emptyset$.

- $[fgh]' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = [f'g + fg']h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcia f má deriváciu $f'(x) \neq 0$ na množine $A \neq \emptyset$.

- $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Derivácia reálnej funkcie

Pri praktickom výpočte derivácii používame rôzne vzorce a pravidlá.

Pravidlá pre derivácie.

Funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \neq \emptyset$, bod $x_0 \in A$, číslo $c \in R$. $\Rightarrow$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ for $g(x_0) \neq 0$,

- $(cf)' = cf'$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \neq \emptyset$.

- $[fgh]' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = [f'g + fg']h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcia f má deriváciu $f'(x) \neq 0$ na množine $A \neq \emptyset$.

- $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Derivácia reálnej funkcie

Derivácia inverznej funkcie.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ je bijekcia, $I \subset R$ je interval, $x_0 \in I$ je vnútorný bod.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je spojitá na } I. \\ \bullet\ f'(x_0) \neq 0 \text{ je konečná.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Funkcia $f\colon y = e^x$, $x \in R$ je spojitá a rastúca, $f'(x) = e^x \neq 0$ pre $x \in R$.

- $f^{-1}\colon x = \ln y$, $y \in (0; \infty)$.
- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[e^x]'}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^x}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ pre $y \in (0; \infty)$.

Funkcia $f\colon y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá a rastúca,

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0 \text{ pre } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

- $f^{-1}\colon x = \arcsin y$, $y \in (-1; 1)$.
- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\Big|_{x=\arcsin y}$
  $= \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ pre $y \in (-1; 1)$.

Derivácia reálnej funkcie

Derivácia inverznej funkcie.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ je bijekcia, $I \subset R$ je interval, $x_0 \in I$ je vnútorný bod.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ je spojitá na } I. \\ \bullet\ f'(x_0) \neq 0 \text{ je konečná.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Funkcia $f\colon y = e^x$, $x \in R$ je spojitá a rastúca, $f'(x) = e^x \neq 0$ pre $x \in R$.

- $f^{-1}\colon x = \ln y$, $y \in (0; \infty)$.
- $[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[e^x]'}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^x}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$ pre $y \in (0; \infty)$.

Funkcia $f\colon y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je spojitá a rastúca,

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0 \text{ pre } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

- $f^{-1}\colon x = \arcsin y$, $y \in (-1; 1)$.
- $[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\Big|_{x=\arcsin y}$
  $= \frac{1}{\sqrt{1-[\sin \arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ pre $y \in (-1; 1)$.

Derivácia reálnej funkcie

Derivácia zloženej funkcie.

Funkcie $u = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(u)$, $u \in D(g)$ také, že $H(f) \subset D(g)$, zložená funkcia $y = F(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_0 \in D(f),\ u_0 = f(x_0). \\ \bullet\ f'(x_0),\ g'(u_0) \text{ sú konečné.} \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet\ F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

- $[a^x]' = \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- $[x^a]' = \left[e^{\ln x^a}\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$, $x > 0$, $a \in R$.
- $[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x]$, $x > 0$.
- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in R$.

$x \in D(f)$, $f(x) > 0$, existuje $f'(x)$. $\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot \left[\ln f(x)\right]'$ (Logaritmická derivácia funkcie f).

Derivácia reálnej funkcie

Derivácia zloženej funkcie.

Funkcie $u = f(x)$, $x \in D(f)$, $y = g(u)$, $u \in D(g)$ také, že $H(f) \subset D(g)$,
zložená funkcia $y = F(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$.

- $x_0 \in D(f)$, $u_0 = f(x_0)$.
- $f'(x_0)$, $g'(u_0)$ sú konečné.

$\Rightarrow$ • $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

- $[a^x]' = \left[e^{\ln a^x}\right]' = \left[e^{x \ln a}\right]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = a^x \cdot \ln a$, $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- $[x^a]' = \left[e^{\ln x^a}\right]' = \left[e^{a \ln x}\right]' = e^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$, $x > 0$, $a \in R$.
- $[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x \cdot [1 + \ln x]$, $x > 0$.
- $[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
  $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in R$.

$x \in D(f)$, $f(x) > 0$, existuje $f'(x)$. $\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$\Rightarrow$ • $f'(x) = f(x) \cdot \left[\ln f(x)\right]'$ (Logaritmická derivácia funkcie f).

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

- Často potrebujeme danú funkciu f aproximovať inou jednoduchšou funkciou g tak, aby rozdiel $|f(x) - g(x)|$ bol čo najmenší.
- Väčšinou postačí **lokálna aproximácia** v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, konečná $f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0), & x \in R. \\ \bullet\ \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h, & h \in R. \end{array}\right\}$$

Diferenciál funkcie f v bode x_0.

Potom sa funkcia f nazýva **diferencovateľná** v bode x_0.

Funkcia $f\colon y = x$, $x \in R$, bod $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$ (konečná).

- $\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$ (konečná).

- $\mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, $h \in R$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, resp. $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

- Často potrebujeme danú funkciu f aproximovať inou jednoduchšou funkciou g tak, aby rozdiel $|f(x) - g(x)|$ bol čo najmenší.
- Väčšinou postačí **lokálna aproximácia** v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, konečná $f'(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x \in R. \\ \bullet\ df(x_0, h) \qquad\quad = f'(x_0) \cdot h,\ h \in R. \end{array}\right\}$$ **Diferenciál** funkcie f v bode x_0.

Potom sa funkcia f nazýva **diferencovateľná** v bode x_0.

Funkcia f: $y = x$, $x \in R$, bod $x_0 \in R$, $f'(x_0) = 1$ (konečná).

- $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$ (konečná).

- $df(x_0) = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot dx$, $h \in R$. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, resp. $f' = \frac{df}{dx}$.

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Najlepšia lokálna lineárna aproximácia.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

- Aproximácia funkcie f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 pomocou dotyčnice d: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnej funkcie (priamky).

Vypočítajte približne $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nech $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Presne $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Najlepšia lokálna lineárna aproximácia.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

- Aproximácia funkcie f v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 pomocou dotyčnice $d\colon y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$, $x \in O(x_0)$ je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnej funkcie (priamky).

Vypočítajte približne $\sqrt[6]{1,06}$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$, $x > 0$, $x_0 = 1$.
- $f(x_0) = f(1) = 1$.
- $f'(x) = [x^{1/6}]' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $x > 0$.
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6}$.
- Nech $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{x} = f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x-1) = 1 + \frac{x-1}{6} = \frac{6+x-1}{6} = \frac{x+5}{6}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[6]{1.06} = f(1.06) \approx \frac{1.06+5}{6} = \frac{6.06}{6} = 1.01$.

Presne $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$, chyba výpočtu $< 0,00025$.

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

```
(%i9) c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
      p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
      h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
      subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Premenná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.

Aproximácia funkcie f má zmysel iba pre x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

```
(%i9)  c:1.06$ f(x):=x^(1/6)$ s:1$ f1(x):=diff(f(x),x,1)$
       p(x):=f(s)+subst(s,x,f1(x))*(x-s)$
       h(c):=print("c=",c,'f(c),"=",float(f(c)),"approx",
       subst(c,x,float(p(x))))$ fpprintprec:8$ p(x); h(c)$
```

(%o8) $\frac{x-1}{6}+1$

$c = 1.06 \quad f(1.06) = 1.0097588$ approx 1.01

Premenná `fpprintprec:8` nastaví výstup na 8 číslic.
Aproximácia funkcie f má zmysel iba pre x blízko bodu x_0.

```
(%i18) h(.9)$h(1.1)$h(1.2)$h(1.5)$h(2.0)$h(4)$h(9)$h(30)$h(64)$
```

$c = 0.9 \quad f(0.9) = 0.98259319$ approx 0.98333333
$c = 1.1 \quad f(1.1) = 1.0160119$ approx 1.0166667
$c = 1.2 \quad f(1.2) = 1.0308533$ approx 1.0333333
$c = 1.5 \quad f(1.5) = 1.0699132$ approx 1.0833333
$c = 2.0 \quad f(2.0) = 1.122462$ approx 1.1666667
$c = 4 \quad f(4) = 1.259921$ approx 1.5
$c = 9 \quad f(9) = 1.4422496$ approx 2.3333333
$c = 30 \quad f(30) = 1.7627344$ approx 5.8333333
$c = 64 \quad f(64) = 2.0$ approx 11.5

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná, potom (pokiaľ existujú):

- $y = f'(x) = f^{(1)}(x)$, $x \in A_1 \subset D(f)$, $A_1 \neq \emptyset$.
  Derivácia prvého rádu (prvá derivácia) f na množine A_1.
- $y = [f'(x)]' = f''(x) = f^{(2)}(x)$, $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$.
  Derivácia druhého rádu (druhá derivácia) f na množine A_2.
- $y = [f''(x)]' = f'''(x) = f^{(3)}(x)$, $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$.
  Derivácia tretieho rádu (tretia derivácia) f na množine A_3. $\ldots$
- $y = [f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x)$, $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$.
  Derivácia n-tého rádu (n-tá derivácia) f na množine A_n.

Špeciálne: • $y = f(x) = f^{(0)}(x)$, $x \in D(f)$. Nulová derivácia (0-tá derivácia) od f.

n-tá derivácia funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ (pokiaľ existuje):

- $f^{(n)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$, $x \in A_n$, $n \in N$.

Funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Výpočet $f^{(n)}$, $n \in N$ môže byť vo všeobecnosti veľmi prácny.

Funkcia $y = x^k$, $x \in R$, kde $k \in N$.

- $[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, $x \in R$ pre $n = 1, 2, \ldots, k$,
  $[x^k]' = kx^{k-1}$, $[x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $[x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $\ldots$, $[x^k]^{(k)} = k!$.
- $[x^k]^{(n)} = 0$, $x \in R$ pre $n = k+1, k+2, k+3, \ldots,$
  $[x^k]^{(k+1)} = [k!]' = 0$, $[x^k]^{(k+2)} = [x^k]^{(k+3)} = [0]' = 0$, $\ldots$

```
(%i9) f(x,k):=x^k;fn(x,k,n):=diff(f(x,k),x,n)$
      fn(x,k,1);fn(x,k,2);fn(x,k,k);
      fn(x,5,1);fn(x,5,2);fn(x,5,5);fn(x,5,6);
```

(%o1) $f(x,k) := x^k$

(%o3) kx^{k-1}

(%o4) $(k-1)kx^{k-2}$

(%o5) $\frac{d^k}{dx^k}x^k$

(%o6) $5x^4$

(%o7) $20x^3$

(%o8) 120

(%o9) 0

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Funkcia $y = e^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[e^x]^{(n)} = e^x$, $x \in R$ pre všetky $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Funkcia $y = \sin x$, $x \in R$.

- $[\sin x]' = \cos x$,
  $[\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x$,
  $[\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x$,
  $[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x$,
  $[\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ldots$
- $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)}$ pre $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\sin x]^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,
  $[\sin x]^{(2k-1)} = (-1)^{k+1} \cos x$, $k \in N$.

Funkcia $y = \cos x$, $x \in R$.

- $[\cos x]' = -\sin x$,
  $[\cos x]'' = [-\sin x]' = -\cos x$,
  $[\cos x]''' = [-\cos x]'' = \sin x$,
  $[\cos x]^{(4)} = [\sin x]''' = \cos x$,
  $[\cos x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = -\sin x, \ldots$
- $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)}$ pre $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\cos x]^{(2k)} = (-1)^k \cos x$,
  $[\cos x]^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x$, $k \in N$.

Leibnizov vzorec.

Funkcie f, g majú derivácie na množine A až do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$.

Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

Funkcia $y = e^x$, $x \in R$. $\Rightarrow$ • $[e^x]^{(n)} = e^x$, $x \in R$ pre všetky $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Funkcia $y = \sin x$, $x \in R$.

- $[\sin x]' = \cos x$,
  $[\sin x]'' = [\cos x]' = -\sin x$,
  $[\sin x]''' = [\cos x]'' = -\cos x$,
  $[\sin x]^{(4)} = [\cos x]''' = \sin x$,
  $[\sin x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = \cos x, \ \ldots$
- $[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)}$ pre $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\sin x]^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,
  $[\sin x]^{(2k-1)} = (-1)^{k+1} \cos x$, $k \in N$.

Funkcia $y = \cos x$, $x \in R$.

- $[\cos x]' = -\sin x$,
  $[\cos x]'' = [-\sin x]' = -\cos x$,
  $[\cos x]''' = [-\cos x]'' = \sin x$,
  $[\cos x]^{(4)} = [\sin x]''' = \cos x$,
  $[\cos x]^{(5)} = [\cos x]^{(4)} = -\sin x, \ \ldots$
- $[\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)}$ pre $n \in N \cup \{0\}$,
  $[\cos x]^{(2k)} = (-1)^k \cos x$,
  $[\cos x]^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x$, $k \in N$.

Leibnizov vzorec.

Funkcie f, g majú derivácie na množine A až do rádu $n \in N$ (vrátane).

- $[fg]^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$.

Aplikácie derivácie funkcie

Vety o strednej hodnote funkcie (Rolleho, Lagrangeova) a l'Hospitalovo pravidlo patria medzi najčastejšie aplikácie derivácie v praxi.

Rolleho veta o strednej hodnote.

- Funkcia f je spojitá na $\langle a; b\rangle$.
- $f(a) = f(b)$.
- $f'(x) \in R^*$ pre všetky $x \in (a; b)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (a; b)$: $f'(c) = 0$,
$c = a + \theta(b - a)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

Lagrangeova veta o strednej hodnote.

- Funkcia f je spojitá na $\langle a; b\rangle$.
- $f'(x) \in R^*$ pre všetky $x \in (a; b)$.

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (a; b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Označme $b = a + h$, $h \in R$, pre dostatočne malé h môžeme predpokladať $a + \theta h \approx a$.

- $h = b - a$, $c = a + \theta(b - a) = a + \theta h$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(b) - f(a) = f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h) \cdot h$, $h \in R$, $\theta \in (0; 1)$.
- $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h) \cdot h \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a, h)$.

Aplikácie derivácie funkcie

Vety o strednej hodnote funkcie (Rolleho, Lagrangeova) a l'Hospitalovo pravidlo patria medzi najčastejšie aplikácie derivácie v praxi.

Rolleho veta o strednej hodnote.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Funkcia } f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ \bullet\ f(a)=f(b). \\ \bullet\ f'(x)\in R^* \text{ pre všetky } x\in(a;b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } c\in(a;b)\colon f'(c)=0, \quad c=a+\theta(b-a), \text{ kde } \theta\in(0;1).$$

Lagrangeova veta o strednej hodnote.

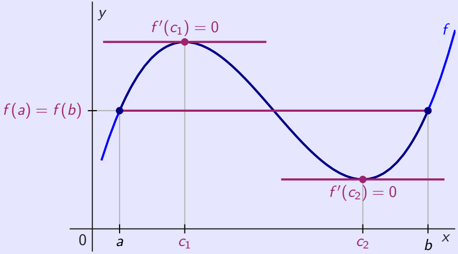
$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Funkcia } f \text{ je spojitá na } \langle a;b\rangle. \\ \bullet\ f'(x)\in R^* \text{ pre všetky } x\in(a;b). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } c\in(a;b)\colon f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

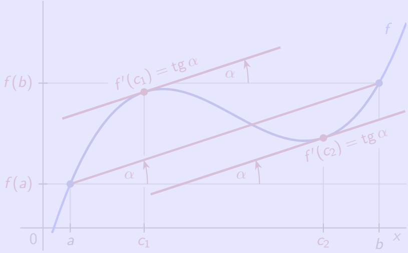
Označme $b=a+h$, $h\in R$, pre dostatočne malé h môžeme predpokladať $a+\theta h\approx a$.

- $h=b-a,\ c=a+\theta(b-a)=a+\theta h,\ \theta\in(0;1).$
- $f(b)-f(a)=f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)\cdot h,\ h\in R,\ \theta\in(0;1).$
- $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)\cdot h\approx f(a)+f'(a)h=f(a)+\mathrm{d}f(a,h).$

Aplikácie derivácie funkcie

Rolleho a Lagrangeova vety zaručujú existenciu $c \in (a; b)$.
Pomocou nich však takéto body nevieme nájsť a ani nedokážeme určiť ich počet.



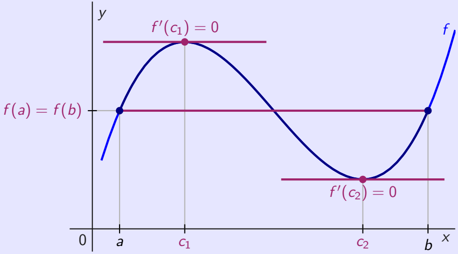


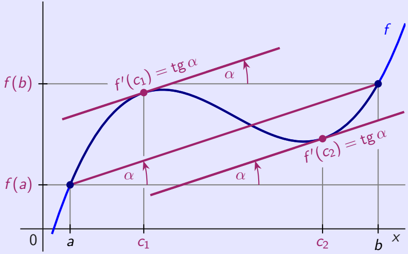
- $f'(c) = 0$
  znamená, že dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s osou x.

- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
  znamená, že dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, t.j. $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$.

Aplikácie derivácie funkcie

Rolleho a Lagrangeova vety zaručujú existenciu $c \in (a; b)$.
Pomocou nich však takéto body nevieme nájsť a ani nedokážeme určiť ich počet.





- $f'(c) = 0$
  znamená, že dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s osou x.

- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  znamená, že dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, t.j. $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$.

Aplikácie derivácie funkcie

Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$ sa často počítajú pomocou l'Hospitalovho pravidla.

L'Hospitalovo pravidlo. Funkcie f, g, bod $a \in R^*$, okolie $O(a)$.

- $f'(x) \in R^*$, $g'(x) \in R^*$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ $[L'H\frac{\infty}{\infty}]$.

  resp. • $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ $[L'H\frac{0}{0}]$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

Z existencie $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nevyplýva existencia $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- Je veľmi dôležité overiť všetky predpoklady l'Hospitalovho pravidla.
- Platnosť predpokladu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$ sa overuje priebežne počas výpočtu.
- L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj niekoľkokrát za sebou:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},\ k \in N.$$

Aplikácie derivácie funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
okolie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\dots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 je definovaný ako

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Pre $x_0 = 0$ sa nazýva **Maclaurinov polynóm**

- $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Zvyšok $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie f pomocou $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$. (Lagrangeov tvar.)

Aplikácie derivácie funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$,
okolie $O(x_0) \subset D(f)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) \in R$ (konečné).

Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 je definovaný ako

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$, $x \in O(x_0)$.

Pre $x_0 = 0$ sa nazýva **Maclaurinov polynóm**

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, $x \in O(0)$.

Označme $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, $h \in O(0)$.

- $T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot h^n}{n!}$, $h \in O(0)$.

Zvyšok $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie f pomocou $T_n(x)$.

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in O(x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$. (Lagrangeov tvar.)

Aplikácie derivácie funkcie

Najlepšia lokálna aproximácia pomocou polynómov.

Aproximácia f pomocou $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 \in D(f)$:

- Má lokálny charakter v okolí $O(x_0)$.
- Je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou polynómov stupňa n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \langle -1; \infty)$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$. • $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$. • $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3} \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$. • $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[3]{1+x} \approx T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x \in O(0)$.

$\approx T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_2(x)$.

$\approx T_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} = 1 + \frac{x}{3}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_1(x)$.

Aplikácie derivácie funkcie

Najlepšia lokálna aproximácia pomocou polynómov.

Aproximácia f pomocou $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 \in D(f)$:

- Má lokálny charakter v okolí $O(x_0)$.
- Je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou polynómov stupňa n.

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \langle -1; \infty)$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 1$.

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x > -1$.
- $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, $x > -1$.
- $f'''(x) = -\frac{5}{3} \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}$, $x > -1$.

- $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- $f'''(0) = \frac{10}{27}$.

$\Rightarrow$ • $\sqrt[3]{1+x} \approx T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$, $x \in O(0)$.

$\approx T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_2(x)$.

$\approx T_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} = 1 + \frac{x}{3}$, $x \in O(0)$ s chybou $R_1(x)$.

Aplikácie derivácie funkcie

Vypočítame Taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Ručné derivovanie je dosť prácne.

```
(%i2) f(x):=sqrt(x^2+1)$ print("f(x)=", f(x),
      ", f'(x)=", diff(f(x),x),
      ", f''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,2)),
      ", f'''(x)=", ratsimp(diff(f(x),x,3)))$
```

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1}$, $f'''(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{x^6+3x^4+3x^2+1}$

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,1);
```

$1 + \cdots$

```
(%i4) taylor(f(x),x,0,2);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i5) taylor(f(x),x,0,3);
```

$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots$

```
(%i6) taylor(f(x),x,0,4);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$

```
(%i7) taylor(f(x),x,0,18);
```

$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \frac{21x^{12}}{1024} + \frac{33x^{14}}{2048} - \frac{429x^{16}}{32768} + \frac{715x^{18}}{65536} + \cdots$

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna.

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkcia f je na I

- rastúca. $\Leftrightarrow$ pre všetky $x \in I$ platí • $f'(x) > 0$.
- klesajúca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) < 0$.
- neklesajúca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \geq 0$.
- nerastúca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) \leq 0$.
- konštantná. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) = 0$.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnútorný bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- Funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém. $\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 0$.

- Funkcia f môže mať lokálny extrém aj v bode, kde derivácia neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna.

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

Funkcia f je na I
- rastúca. $\Leftrightarrow$ pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) > 0$.
- klesajúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0$.
- neklesajúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$.
- nerastúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$.
- konštantná. $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnútorný bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.
- Funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

- Funkcia f môže mať lokálny extrém aj v bode, kde derivácia neexistuje.
- $f'(x_0) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

- Ak platí $f'(x_0) = 0$, potom sa bod $x_0 \in D(f)$ nazýva **stacionárny**.

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie f musíme preskúmať:

- Všetky body $x \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(x) = 0$.
- Všetky body $x \in D(f)$, v ktorých $f'(x)$ neexistuje.

Pri hľadaní globálnych extrémov funkcie f musíme dodatočne preskúmať:

- Všetky hraničné body $x \in D(f)$.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, pre všetky $x \in O(x_0)$ existuje $f'(x)$.

- $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ pre } x < x_0 \text{ (rastúca naľavo).} \\ f'(x) < 0 \text{ pre } x > x_0 \text{ (klesajúca napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.
- $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ pre } x < x_0 \text{ (klesajúca naľavo).} \\ f'(x) > 0 \text{ pre } x > x_0 \text{ (rastúca napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.
- $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pre $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ nie je extrém.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

- Ak platí $f'(x_0) = 0$, potom sa bod $x_0 \in D(f)$ nazýva **stacionárny**.

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie f musíme preskúmať:

- Všetky body $x \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(x) = 0$.
- Všetky body $x \in D(f)$, v ktorých $f'(x)$ neexistuje.

Pri hľadaní globálnych extrémov funkcie f musíme dodatočne preskúmať:

- Všetky hraničné body $x \in D(f)$.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, pre všetky $x \in O(x_0)$ existuje $f'(x)$.

- $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ pre } x < x_0 \text{ (rastúca naľavo).} \\ f'(x) < 0 \text{ pre } x > x_0 \text{ (klesajúca napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.
- $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ pre } x < x_0 \text{ (klesajúca naľavo).} \\ f'(x) > 0 \text{ pre } x > x_0 \text{ (rastúca napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.
- $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pre $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ nie je extrém.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Pri vyšetrovaní lokálnych extrémov funkcie môžeme použiť aj druhú deriváciu.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in R - \{0\}$ (konečná nenulová).

Ak $f'(x_0) = 0$ a
- $f''(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.
- $f''(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $x \in R$.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $x \in R$. • $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = 1$ alebo $x = 3$.

  $f''(1) = -6 < 0. \quad \Rightarrow f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2 > 0$ je ostré lokálne maximum.

  $f''(3) = 6 > 0. \quad \Rightarrow f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2 < 0$ je ostré lokálne minimum.

Ak $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, potom funkcia f môže, ale nemusí mať extrém v bode x_0.

- Funkcia $f(x) = x^3$, $x \in R$ nemá extrém $f(0) = 0$ v bode $x = 0$.

  $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

  [$x^3 < f(0) = 0$ pre $x < 0$ a $x^3 > f(0) = 0$ pre $x > 0$.]

- Funkcia $f(x) = x^4$, $x \in R$ má osté lokálne minimum $f(0) = 0$ v bode $x = 0$.

  $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'(0) = f''(0) = 0$. [$x^4 > f(0) = 0$ pre všetky $x \neq 0$.]

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Pri vyšetrovaní lokálnych extrémov funkcie môžeme použiť aj druhú deriváciu.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in R - \{0\}$ (konečná nenulová).

Ak $f'(x_0) = 0$ a
- $f''(x_0) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.
- $f''(x_0) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $x \in R$.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $x \in R$. • $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $x = 1$ alebo $x = 3$.
  $f''(1) = -6 < 0$. $\Rightarrow$ $f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2 > 0$ je ostré lokálne maximum.
  $f''(3) = 6 > 0$. $\Rightarrow$ $f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2 < 0$ je ostré lokálne minimum.

Ak $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, potom funkcia f môže, ale nemusí mať extrém v bode x_0.

- Funkcia $f(x) = x^3$, $x \in R$ nemá extrém $f(0) = 0$ v bode $x = 0$.
  $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'(0) = f''(0) = 0$.
  [$x^3 < f(0) = 0$ pre $x < 0$ a $x^3 > f(0) = 0$ pre $x > 0$.]
- Funkcia $f(x) = x^4$, $x \in R$ má osté lokálne minimum $f(0) = 0$ v bode $x = 0$.
  $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'(0) = f''(0) = 0$. [$x^4 > f(0) = 0$ pre všetky $x \neq 0$.]

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• konvexná.	$\Leftrightarrow$	f' je na I	• neklesajúca.
	• konkávna.	$\Leftrightarrow$		• nerastúca.
	• ostro konvexná.	$\Leftrightarrow$		• rastúca.
	• ostro konkávna.	$\Leftrightarrow$		• klesajúca.

Funkcia f je spojitá na intervale I, pre všetky $x \in I$ existuje $f''(x) \in R$ (konečná).

f je na I	• konvexná.	$\Leftrightarrow$	pre všetky $x \in I$ platí	• $f''(x) > 0$.
	• konkávna.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) < 0$.
	• ostro konvexná.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \geq 0$.
	• ostro konkávna.	$\Leftrightarrow$		• $f''(x) \leq 0$.

Pri vyšetrovaní konvexnosti a konkávnosti funkcie f musíme preskúmať:

- Všetky body $x \in D(f)$, kde je funkcia f spojitá a pre ktoré existuje $f''(x) = 0$.
- Všetky body $x \in D(f)$, kde je funkcia f spojitá a v ktorých $f''(x)$ neexistuje.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Nutná podmienka pre existenciu inflexného bodu.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$ je vnútorný bod $D(f)$, existuje $f'(x_0)$.

- x_0 je inflexný bod funkcie f. $\Rightarrow$ • $f''(x_0) = 0$.

- Funkcia f môže mať inflexiu v bode, kde druhá derivácia neexistuje.

Postačujúca podmienka pre existenciu lokálneho extrému.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) \in R$, pre všetky $x \in O(x_0)$ existuje $f''(x)$.

- $\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0 \text{ pre } x < x_0 \text{ (konvexná naľavo).} \\ f''(x) < 0 \text{ pre } x > x_0 \text{ (konkávna napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • x_0 je inflexný bod f.
- $\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ pre } x < x_0 \text{ (konkávna naľavo).} \\ f''(x) > 0 \text{ pre } x > x_0 \text{ (konvexná napravo).} \end{array}\right\} \Rightarrow$ • x_0 je inflexný bod f.
- $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$ pre $x \neq x_0$. $\Rightarrow$ • x_0 nie je inflexný bod f.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, $x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \in R$.

- $f'''(x_0) \neq 0$ (nenulová). $\Rightarrow$ • x_0 je inflexný bod f.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Predchádzajúce výsledky môžeme zovšeobecniť.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k-1$, $k \in N$ (nepárne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f je rastúca v bode x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f je klesajúca v bode x_0.

  $f(x_0)$ nie je extrém.
- $n = 2k$, $k \in N$ (párne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • $f(x_0)$ je ostré lokálne maximum.

$y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $x_0 \in D(f)$, $n \in N$.

$f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- $n = 2k+1$, $k \in N$ (nepárne) .
  - x_0 je inflexný bod funkcie f.
- $n = 2k$, $k \in N$ (párne).
  - $f^{(n)}(x_0) > 0. \Rightarrow$ • f je ostro konvexná v bode x_0.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0. \Rightarrow$ • f je ostro konkávna v bode x_0.

Priebeh funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodicita, prípadne iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti, hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je f kladná a záporná.
- f', stacionárne body, lokálne a globálne extrémy, intervaly, na ktorých f rastie, klesá a je konštantná.
- f'', inflexné body, intervaly, na ktorých je f konvexná a konkávna.
- Asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.
- Obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.

  Graf nám zvyčajne poskytne najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie. Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje.

  Mnohokrát sú ale nedostatočné, preto ich musíme doplniť vhodne zvolenými funkčnými hodnotami.

Neurčitý integrál

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

Základné pojmy

- Zavedenie pojmu derivácie sme motivovali úlohou určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po priamke.
- Problém môžeme obrátiť a hľadať dráhu hmotného bodu za predpokladu, že poznáme jeho okamžitú rýchlosť v danom čase.

Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je definovaná na otvorenom intervale $I \subset R$.
Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$ na intervale I, ak pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$ a pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Funkcia $F(x)$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I, $c \in R$ (konštanta).

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I.

- Z definície vyplýva, že primitívna funkcia F je spojitá na intervale I.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k funkcii $f(x)$ na intervale I.

$\Rightarrow$ • Funkcia $(F - G)(x) = F(x) - G(x)$ je konštantná na intervale I.

Základné pojmy

- Zavedenie pojmu derivácie sme motivovali úlohou určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po priamke.
- Problém môžeme obrátiť a hľadať dráhu hmotného bodu za predpokladu, že poznáme jeho okamžitú rýchlosť v danom čase.

Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je definovaná na otvorenom intervale $I \subset R$.
Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$ na intervale I, ak pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$ a pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Funkcia $F(x)$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I, $c \in R$ (konštanta).

$\Rightarrow$ • Funkcia $G(x) = F(x) + c$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I.

- Z definície vyplýva, že primitívna funkcia F je spojitá na intervale I.

Funkcie $F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k funkcii $f(x)$ na intervale I.

$\Rightarrow$ • Funkcia $(F - G)(x) = F(x) - G(x)$ je konštantná na intervale I.

Základné pojmy

Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I sa líšia od seba konštantou a tvoria množinu $\{F(x) + c, c \in R\}$, pričom F je ľubovoľná primitívna funkcia.
Táto množina sa nazýva **neurčitý integrál funkcie** f **na intervale** I a označuje sa

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c, x \in I, c \in R\} = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I.

$\Rightarrow$ • Existuje $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x.$

Na integrovanie sa používa príkaz `integrate`.

```
(%i1) 'integrate(1/(1+x^2),x)
```

(%o1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Základné pojmy

(%i1) `f(x):=1/(1-x^2); integrate(f(x),x);`

(%o1) $\frac{1}{1-x^2}$

(%o2) $\frac{\log(x+1)}{2} - \frac{\log(x-1)}{2}$

- Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I.

Funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale I, $c \in R$.

Pre všetky $x \in I$ platí:

- $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x).$
- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$

(%i1) `integrate(1/(1+x^2),x);`

(%o1) $\operatorname{atan} x$

(%i2) `diff(%,x);`

(%o2) $\frac{1}{x^2+1}$

Základné pojmy

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií. (1. časť)

- $\displaystyle\int dx = \int 1\,dx = x + c$ pre $x \in R$.
- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ pre $a \neq -1$, $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ pre $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$ pre $f(x) \neq 0$.
- $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$ $x \neq \frac{k\pi}{a}$, $k \in Z$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$, $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}$, $k \in Z$.
- $\displaystyle\int \sinh ax\,dx = \frac{\cosh ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \cosh ax\,dx = \frac{\sinh ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c$ pre $a \neq 0$, $x \in R$.

Základné pojmy

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií. (2. časť)

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a} + c_2,$ pre $a \neq 0,\ x \in R.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$ pre $a \neq 0,\ x \in R - \{a\}.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + c_1 = -\arccos\frac{x}{|a|} + c_2,$ pre $a > 0,\ x \in (-a; a).$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c,$ pre $a > 0,\ x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty).$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c,$ pre $a > 0,\ x \in R.$

- V tabuľkách sú uvedené základné vzorce pre integrovanie.
- Tieto vzorce úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií.
- Pre praktické účely je potrebné si ich zapamätať.

Metódy integrovania

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c,\ x \in R.$ (tabuľkový integrál).

```
(%i1) integrate(1/sqrt(x^2+1),x);
(%o1) asinh x
```

- Oba výsledky sú správne, pretože argument sínus hyperbolický je definovaný ako $y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in R$ (pozri elementárne funkcie).

Metóda rozkladu.

Funkcie F, G sú primitívne k funkciám f, g na intervale I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$.

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na intervale I a platí:

- $\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x) + bG(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- V praxi píšeme priamo $\int [af(x) + bg(x)]\,dx = aF(x) + bG(x) + c.$

Metódy integrovania

Metóda per partes.

Funkcie u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I.$

• $[uv]' = u'v + uv'.$ $\Rightarrow$ • $uv = \displaystyle\int [uv]' = \int u'v + \int uv'.$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v.$

- Metódu per partes môžeme použiť niekoľkokrát za sebou, ale musíme dávať pozor, aby sme sa opätovným použitím nevrátili k pôvodnému integrálu.
- Metóda per partes sa používa pomerne často. Je vhodná na integrovanie funkcií

$$P(x)\,\mathrm{e}^{ax}, \quad P(x)\cos ax, \quad P(x)\sin ax, \quad P(x)\ln Q(x), \quad P(x)\,\mathrm{arctg}\, Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ sú reálne polynómy, $a \in R$, $a \neq 0$.

• $\displaystyle\int \ln x\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + c,\ x \in (0; \infty),\ c \in R.$

Metódy integrovania

Metóda substitúcie.

Funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale I,

$x = \varphi(t)$ má deriváciu na intervale J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi(t)\big)$ je primitívna k funkcii $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J a platí:

- $\displaystyle\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c,\ t \in J,\ c \in R.$

I, J sú intervaly, $x = \varphi(t) : J \to I$ má deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na J,

funkcia $F(t)$ je primitívna k $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I a platí:

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- V prvom prípade nemusíme použiť inverznú substitúciu,
  ale v druhom prípade musíme použiť inverznú substitúciu $t = \varphi^{-1}(x)$.

Metódy integrovania

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

  (Rovnica s integrálom ako neznámym parametrom.)

  $\displaystyle\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + 2c. \Rightarrow$ • $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x > 0,\ c \in R.$

$f(x)$ má na intervale I primitívnu funkciu $F(x)$, reálne číslo $a, b \in R$, $a \neq 0$.

- $\displaystyle\int f(at+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = at + b \\ \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c.$

- $\displaystyle\int f(t+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = t + b \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F(t+b) + c$ pre $a = 1$.

- $\displaystyle\int f(-t)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = -t \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = -\int f(x)\,\mathrm{d}x = -F(x) + c = -F(-t) + c$ pre $a = -1$.

Metódy integrovania

Pri integrovaní sa často kombinujú rôzne metódy a často sa musia použiť niekoľkokrát za sebou.

Ak použijeme rôzne metódy integrovania, môžeme vypočítať rôzne primitívne funkcie.
(Správnosť riešenia si môžeme overiť napr. derivovaním.)

- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t,\ \ (\sin t)' = \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$
$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t = t + c = \arcsin x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.$$

- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t,\ \ -(\cos t)' = \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right]$$
$$= \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t = -t + c = -\arccos x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.$$

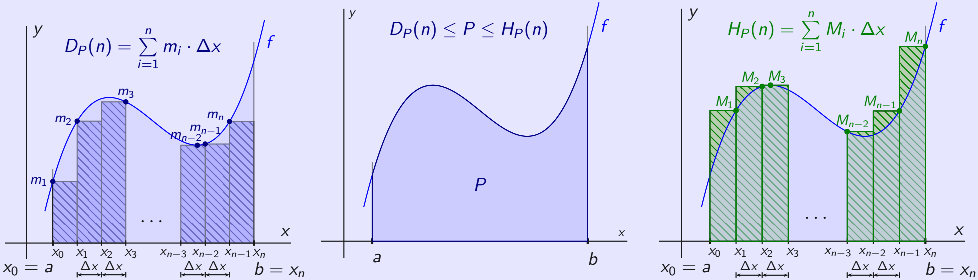
Obe riešenia sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1 \rangle$ platí:
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t.j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.
(Všetky primitívne funkcie k danej funkcii na intervale sa líšia o konštantu.)

Určitý integrál

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

Základné pojmy

- V tejto časti sa budeme zaoberať **určitým integrálom** funkcie, čo na rozdiel od neurčitého integrálu nie je funkcia, ale konkrétna hodnota (číslo alebo $\pm\infty$).
- Určitý integrál môžeme definovať niekoľkými spôsobmi.
- Definujeme ho pomocou integrálnych súčtov a nazveme **Riemannov (určitý) integrál**.



Krivočiary lichobežník P určený nezápornou funkciou f na intervale $\langle a; b\rangle$ a jeho aproximácia pomocou súčtov D_P a H_P

Základné pojmy

Funkcia $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je kladná spojitá, body $a, b \in R$, $a < b$.

Určte plošný obsah množiny $P = \left\{[x; y] \in R^2,\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$.

- Rozdeľme $\langle a; b\rangle$ pomocou bodov $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $n \in N$ na n podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, $\langle x_2; x_3\rangle$, ..., $\langle x_{n-2}; x_{n-1}\rangle$, $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ rovnakej dĺžky $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$.
- $m_i = \min\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pre množinu P potom platí:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x = D_P(n) \leq P \leq H_P(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x.$$

- Ak zmenšíme Δx (zväčšíme n), odhady D_P, H_P sa zlepšia (nezhoršia sa).
- Pre $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$, t.j. $n \to \infty$ bude platiť (Viď nasledujúci slajd.)

$$\text{(z dola)} \qquad D_P(n) \to P \leftarrow H_P(n) \qquad \text{(z hora)}.$$

Základné pojmy

Interval $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný, funkcia $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

- **Delenie intervalu** $\langle a; b\rangle$ sa nazýva každá konečná množina bodov
$$D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \ \ n \in N,$$
pre ktoré $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Body x_0, x_1, …, x_n sa nazývajú **deliace body** (jednoznačne určujú delenie D).
- Dĺžky intervalov $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ označujeme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Dĺžku najdlhšieho z týchto intervalov nazývame **norma delenia** D a označujeme $\mu(D)$, t.j. $\mu(D) = \max\{\Delta x_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$.
- Pre súčet dĺžok intervalov d_1, d_2, …, d_n platí
$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = x_n - x_0 = b - a.$$
- Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D,\ D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.
- $m_i = \inf\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $\quad M_i = \sup\{f(x),\ x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $\ i = 1, 2, \dots, n$.
- **Dolný** $S_D(f, D)$ a **horný Riemannov integrálny súčet** $S_H(f, D)$ funkcie f pri delení D sa nazývajú čísla $S_D(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$ a $S_H(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$.

Základné pojmy

- Čísla
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\},\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$$
nazývame **dolný** a **horný Riemannov (určitý) integrál** funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$ (od a po b).

- Tieto čísla **vždy existujú** a platí
$$m(b-a)\le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a),$$
pričom $m=\inf\{f(x),\ x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x),\ x\in\langle a;b\rangle\}$.

- Ak platí rovnosť medzi dolným a horným Riemannovým integrálom, potom túto hodnotu
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$
nazývame **Riemannov (určitý) integrál funkcie** f **na intervale** $\langle a;b\rangle$.
Funkciu f nazývame **riemannovsky integrovateľná** na $\langle a;b\rangle$ a označujeme $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

Základné pojmy

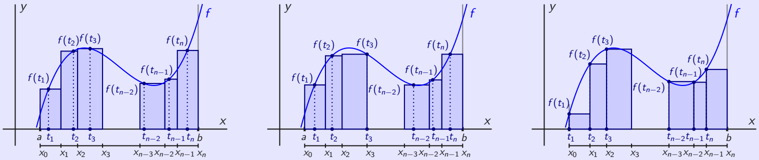
Integračná premenná nemá vplyv a namiesto x môžeme napísať ľubovoľný symbol.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

- **Riemannov (integrálny) súčet** funkcie f pri delení D a voľbe bodov T, pričom $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} = \{t_i,\ t_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ nazývame číslo
$$S_T(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i.$$
- Funkcia f má nekonečne veľa integrálnych súčtov pre dané delenie D.

  Ak je $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ spojitá, potom nadobúda svoje extrémy na $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

  $S_D(f, D)$, $S_H(f, D)$ predstavujú Riemannove integrálne súčty pre nejakú voľbu bodov T.



Integrálne súčty funkcie f pri delení D a rôznych voľbách bodov T

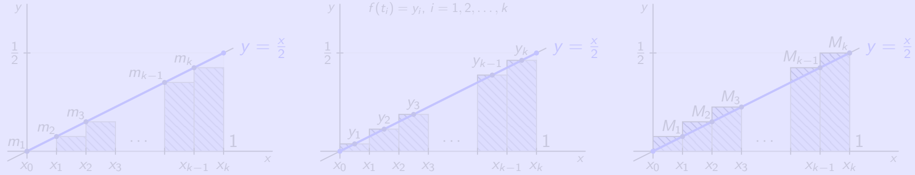
Základné pojmy

- Pri vyšetrovaní riemannovsky integrovateľnej funkcie f na $\langle a;b\rangle$, nepotrebujeme každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí sa obmedziť na **normálne postupnosti delení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, t.j. pre ktoré platí $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Potom pre každú voľbu bodov T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_H(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (ďalšia strana).

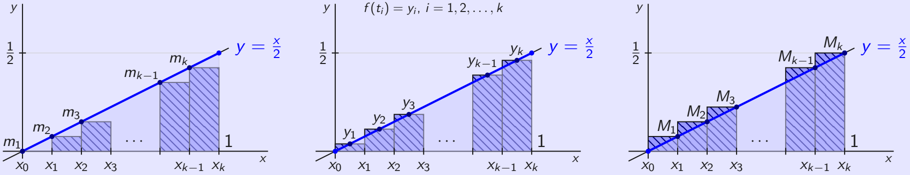
Základné pojmy

- Pri vyšetrovaní riemannovsky integrovateľnej funkcie f na $\langle a; b\rangle$, nepotrebujeme každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

  Stačí sa obmedziť na **normálne postupnosti delení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, t.j. pre ktoré platí $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$.

  Potom pre každú voľbu bodov T platí

$$\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$S_D(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{k-1}{4k}$ $\quad S_T(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1}{4}$ $\quad S_H(f,D_k)=\sum\limits_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{k+1}{4k}$

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}=\frac{1}{4}$ (ďalšia strana).

Základné pojmy

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}$. Funkcia $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá, $f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

- Normálna postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, pričom $D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}$ pre $k \in N$.
- Pre $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$.

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2} = \frac{\frac{(0+k-1)k}{2}}{2k^2} = \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4k}.$$

$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k^2} = \frac{\frac{(1+k)k}{2}}{2k^2} = \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4}.$$

- zvoľme $T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ ako stredy intervalov $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$,
  t.j. $t_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{k} + \frac{i}{2}\right) = \frac{2i-1}{2k}$, potom $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$ a platí

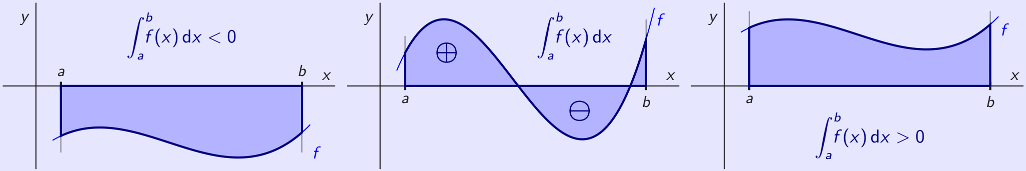
$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2} = \frac{\frac{(1+2k-1)k}{2}}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \bullet \int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Základné vlastnosti

- Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál na intervale $\langle a; b\rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určenú funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (t.j. pre f záporné) je táto oblasť záporná.



Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

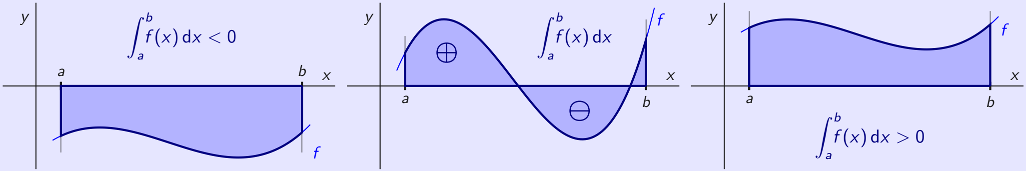
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Ak $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, potom aj $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Základné vlastnosti

- Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál na intervale $\langle a; b\rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určenú funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$.

  Pod osou x (t.j. pre f záporné) je táto oblasť záporná.



Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, číslo $c \in R$.

$\Rightarrow cf, f+g, |f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Ak $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$, potom aj $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Základné vlastnosti

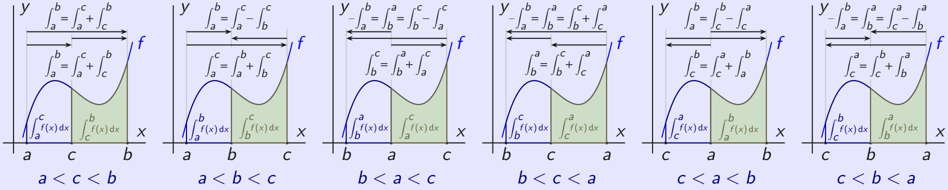
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

- $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Additívnosť integrálu.

Funkcia $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, body $a, b, c \in I$ sú ľubovoľné.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Aditívnosť Riemannovho integrálu môžeme ilustrovať na vektoroch.

Metódy integrovania

Výpočet Riemannovho integrálu (Newton-Leibnizov vzorec).

Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

(%i1) `integrate(f(x),x,-1,1);`

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Metódy integrovania

Výpočet Riemannovho integrálu (Newton-Leibnizov vzorec).

Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

```
(%i1) integrate(f(x),x,-1,1);
```

(%o1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Metódy integrovania

- Určité integrály sa vo všeobecnosti počítajú pomocou neurčitých integrálov.
- Metódu per partes a substitučné metódy môžeme upraviť a priamo pomocou nich vypočítať určitý integrál.

  Po substitúcii sa nemusíme vracať k pôvodným premenným.

Metóda per partes.

$u, u', v, v' \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1\Big] + \Big[2x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2 \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$= -4\pi^2 + \Big[4\pi \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0\Big] - \Big[-2\cos x\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 - \Big[-2 \cdot 1 + 2 \cdot 1\Big] = -4\pi^2.$$

Metódy integrovania

Metóda substitúcie. $y=f(x)\colon I\to R,\ x=\varphi(t)\colon J\to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J)\subset I$,
I je interval s hranicami a, b, J je interval s hranicami α,β, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Môžeme použiť oboma smermi.)

• $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\left[\begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

• $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt=\left[\begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;0\rangle & x\in\langle 1;2\rangle & t=2\ \ \mapsto x=5 \\ dx=2\,dt & t\in\langle 0;2\rangle & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=2 \end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_2^5\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5=\frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big]=\frac{\cos 2-\cos 5}{2}.$$

Metódy integrovania

Metóda substitúcie. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicami a, b, J je interval s hranicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí • $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$ (Môžeme použiť oboma smermi.)

- $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1;1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & t \in \langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1+\cos 2t\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1;0\rangle & x \in \langle 1;2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t & t \in \langle 0;2\rangle & x \in \langle 1;5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Metódy integrovania

Metóda substitúcie. $y = f(x)\colon I \to R,\ x = \varphi(t)\colon J \to R.$

f je spojitá na I, φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$,
I je interval s hranicami a, b, J je interval s hranicami α, β, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
$\Rightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$ (Môžeme použiť oboma smermi.)

- $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \left[\begin{array}{r|c|r|c} \text{Subst. } x = \sin t & x \in \langle -1; 1\rangle & 1 = \sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big[1+\cos 2t\big]\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

- $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \left[\begin{array}{r|c|c|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 0\rangle & x \in \langle 1; 2\rangle & t = 2 \mapsto x = 5 \\ dx = 2\,dt & t \in \langle 0; 2\rangle & x \in \langle 1; 5\rangle & t = -1 \mapsto x = 2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna alebo nepárna, pričom $a < b$.

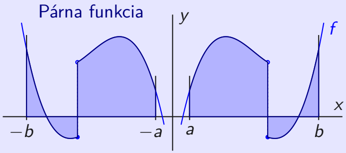
$\Rightarrow f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí:

- $$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=-x & x=b \mapsto t=-b \\ dt=-dx & x=a \mapsto t=-a \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

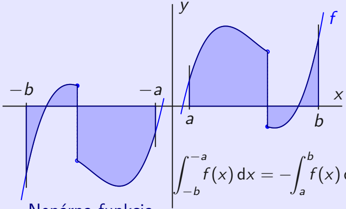
---

f je párna. $\Rightarrow$
- $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$$

f je nepárna. $\Rightarrow$
- $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} \left[-f(x)\right]dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$$



$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

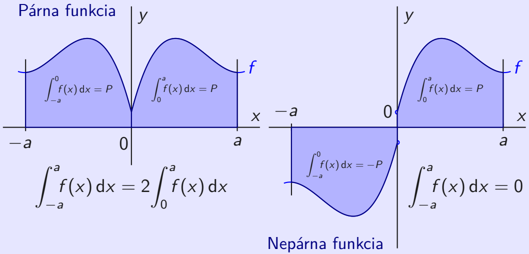
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

Funkcia $f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, pričom $a > 0$.

f je nepárna. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-(-a)} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$

f je párna. $\Rightarrow$ • $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c}\sin|x| \text{ je spojitá} \\ \text{a párna na } \langle -\pi;\pi\rangle\end{array}\right]$$
$$= 2\int_{0}^{\pi} \sin|x|\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$
$$= 2\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi} = -2\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 4.$$



- $$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{integrand je spojitá} \\ \text{a nepárna funkcia na } \langle -1;1\rangle\end{array}\right] = 0.$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

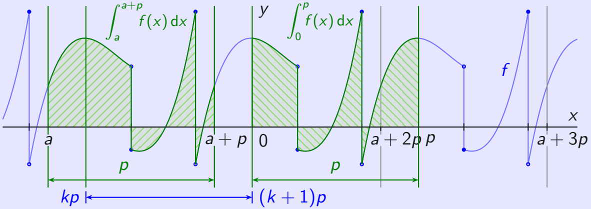
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je periodická s periódou $p > 0$, $f(x) = f(x+kp)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$, $k \in Z$.

Ak dosadíme $x = \varphi(t) = t - kp$, potom $t = x + kp$, $t \in \langle a+kp; b+kp\rangle$, $dt = dx$, $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ a platí:

- $$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{bmatrix} x = b \mapsto t = b+kp \\ x = a \mapsto t = a+kp \end{bmatrix} = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t+kp)\,dt = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t)\,dt = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$$

Funkcia $y = f(x)$ je periodická s periódou $p > 0$, reálny bod $a \in R$, potom platí:

- $f \in R_{\langle 0;p\rangle}$ $\Leftrightarrow$ • $f \in R_{\langle a;a+p\rangle}$ a (pokiaľ existujú) • $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx = \int_a^{a+p} f(x)\,dx.$



Ďakujem za pozornosť.

Matematická analýza podporovaná wxMaxima

beerb@frcatel.fri.uniza.sk