ALGEBRA

Vektorový priestor

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

6. októbra 2015

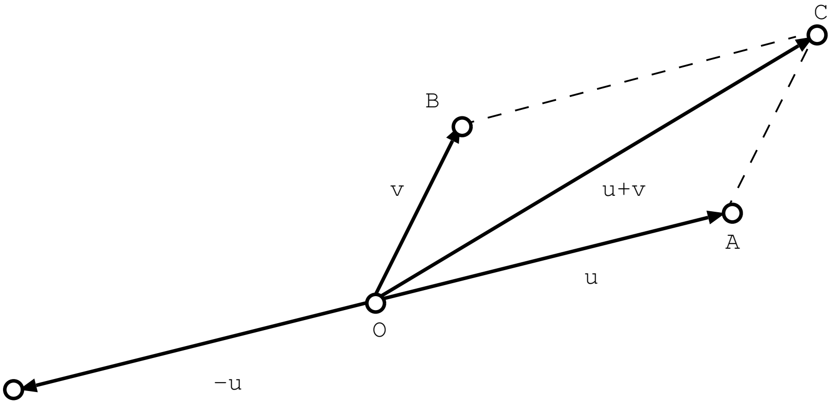
si predstavujeme ako orientované úsečky. Dve rovnako dlhé, rovnobežné a súhlasne orientované úsečky predstatvujú ten istý vektor – hovoríme, že sú umiestnením toho istého vektora.

Ak zvolíme nejaký pevný bod O, tak všetky vektory v rovine alebo priestore môžeme reprezentovať ako orientované úsečky $\vec{OA}$ s počiatkom v bode O, pričom ich koncový bod môže byť ľubovoľný bod A roviny či priestoru ($\vec{OO}$ predstavuje nulový vektor).

Vektory v rovine i v priestore možno sčítať pomocou tzv. vektorového rovnobežníka. Súčet vektorov $\mathbf{u} = \vec{OA}, \mathbf{v} = \vec{OB}$ je znázornený orientovanou uhlopriečkou $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \vec{OC}$ rovnobežníka, ktorého dve priľahlé strany tvoria úsečky OA, OB.

Vektory možno násobiť ľubovoľnými skalármi t.j. reálnymi číslami: ak $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{u}$ je vektor, tak $c\mathbf{u}$ je vektor t.j. orientovaná úsečka s počiatkom v O, ktorej dĺžka je $|c|$ násobkom dĺžky úsečky $\mathbf{u}$, leží na tej istej priemke ako $\mathbf{u}$ a je orientovaná súhlasne s $\mathbf{u}$.

Vektorový rovnobežník



Obr.: *Súčet vektorov* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *vo vektorovom rovnobežníku a opačný vektor* $-\mathbf{u}$.

V karteziánskom súradnicovom systéme môžeme množinu všetkých vektorov v rovine stotožniť s množinou $\mathbb{R}^2$ a množinu všetkých vektorov v priestore s množinou $\mathbb{R}^3$.

Ak $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sú dva vektory v rovine, $c \in \mathbb{R}$, potom

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2). \end{aligned}$$

Ak $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ sú dva vektory v priestore, $c \in \mathbb{R}$, potom

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3). \end{aligned}$$

Vektorové priestory

Nech $\mathbb{P}$ je pole, Vektorovým priestorom nad poľom $\mathbb{P}$ nazývame množinu $\mathbb{V}$ s význačným prvkom $\mathbf{0}$ a dvomi binárnymi operáciami, sčítaním $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ a násobením $\cdot : \mathbb{P} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, takými, že platí

(1) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V})(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z})$,

(2) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V})(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x})$,

(3) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V})(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x})$,

(4) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V})(\exists \mathbf{y} \in \mathbb{V})(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0})$,

(5) $(\forall a, b \in \mathbb{P})(\mathbf{x} \in \mathbb{V})(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{x})$,

(6) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V})(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x})$,

(7) $(\forall a \in \mathbb{P})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V})(a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y}))$,

(8) $(\forall a, b \in \mathbb{P})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V})((a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x}))$.

Upozornenie: Sčítanie skalárov v poli a sčítanie vektorov značíme rovnakým znakom $+$, no ide o rôzne operácie. Podobne násobenie v poli a násobenie vektora skalárom značíme znakom $\cdot$ hoci ide o rôzne operácie.

Príklad 2.1

Každé pole $\mathbb{P}$ možno považovať za vektorový priestor nad sebou samým.

Nech $\mathbb{P}$ je pole. Binárne operácie v poli $+ : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ a $\cdot : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ sú aj binárnymi operáciami vektorového priestoru s významným prvkom nula $0 \in \mathbb{P}$.

Nech je daný prvok $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$. Potom prvok $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ taký, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ nazývame opačný prvok k $\mathbf{x}$. Je určený jednoznačne a budeme ho značiť $-\mathbf{x}$.

Dohoda: Namiesto $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ budeme písať stručne len $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Príklad 2.2

Nech $\mathbb{P}$ je pole a $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Označme množinu usporiadaných n-tíc poľa $\mathbb{P}$

$$\mathbb{V}_n = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) : v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{P}\}.$$

Pre prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_n$ definujme binárne operácie sčítania a násobenia skalárom $c \in \mathbb{P}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n), \\ c \cdot \mathbf{u} &= c \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) = (c \cdot u_1, c \cdot u_2, \ldots, c \cdot u_n). \end{aligned}$$

Množina $\mathbb{V}_n$ s operáciami $+, \cdot$ tvorí vektorový priestor, ktorý nazývame aritmetický vektorový priestor nad poľom $\mathbb{P}$.

Usporiadaná n-tica $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ hrá úlohu nuly vo $\mathbb{V}_n$. Axiómy (1)-(8) plynú z uvedených definícií $+, \cdot$. Opačný prvok k prvku $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{V}_n$ je $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{V}_n$.

Z axióm (1)–(8) vektorového priestoru možno odvodiť niektoré pravidlá pre počítanie so skalármi a vektormi.

Tvrdenie 2.1

Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{P}$. Potom pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$; $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{P}$; $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n} \in \mathbb{V}$ platí

(a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$,

(b) $(a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \wedge a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}, (a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b$,

(c) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(d) $a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0})$,

(e) $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$,

(f) $a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y}, (a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x}$,

(g) $a(\mathbf{x_1} + \cdots + \mathbf{x_n}) = a\mathbf{x}_1 + \cdots + a\mathbf{x}_n$,
$(a_1 + \cdots + a_n)\mathbf{x} = a_1\mathbf{x} + \cdots + a_n\mathbf{x}$.

Cvičenie 2.1

1. Overte axiómy (1)–(8) pre aritmetický vektorový priestor $\mathbb{V}_3$ nad poľom racionálnych čísel.
2. Overte tvrdenia 2.1 pre aritmetický vektorový priestor $\mathbb{V}_2$ nad poľom $\mathbb{Z}_2$.
3. Nájdite súradnice vektorov $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ v rovine, ktoré vyhovujú rovniciam

$$2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = (5, 2), \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} = (0, 1).$$

4. V aritmetickom vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{Z}_3$ určte súradnice vektorov $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}_3$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} &= (1, 1, 2), \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= (2, 0, 2), \\ \mathbf{y} + 2\mathbf{z} &= (2, 2, 2). \end{aligned}$$

Vektorový podpriestor

Vektorový priestor $\mathbb{U}$ nad poľom $\mathbb{P}$ s binárnymi operáciami $\oplus, \odot$ nazveme vektorovým podpriestorom vektorového priestoru $\mathbb{V}$ nad poľom $\mathbb{P}$ s binárnymi operáciami $+, \cdot$ ak $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ a pre všetky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{U}$ a všetky $c \in \mathbb{P}$ platí

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad c \odot \mathbf{v} = c \cdot \mathbf{v}.$$

Príklad 2.3

Nech sú dané konštanty $a, b \in \mathbb{R}$ a množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a \cdot x - b \cdot y = 0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Množina M s operáciami $+, \cdot$ je vektorovým podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{V}_2$ nad poľom $\mathbb{R}$.
Majme ľubovoľné $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in M, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in M, c \in R$.
Potom $\underbrace{a \cdot (u_1 + v_1) - b \cdot (u_2 + v_2)}_{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in M} = 0$ a $\underbrace{a \cdot (cv_1) - b \cdot (cv_2)}_{c \odot \mathbf{v} \in M} = 0$.

Tvrdenie 2.2

Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{P}$ a $\emptyset \neq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$. Potom $\mathbb{U}$ je vektorovým podpriestorom $\mathbb{V}$ práve tedy, keď pre všetky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{U}$ a všetky $c \in \mathbb{P}$ platí: $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{U}, c \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{U}$.

Príklad 2.4

Množina všetkých riešení systému lineárnych rovníc v poli $\mathbb{Z}_7$

$$2x + 3y + z = 0, \quad x + y = 0$$

je vektorovým podpriestorom aritmetického vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$ v poli $\mathbb{Z}_7$.

Stačí ak ukážeme, že

$$\emptyset \neq \mathbb{U} = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}_7^3 : 2u_1 + 3u_2 + u_3 = 0, u_1 + u_2 = 0\} \subset \mathbb{V}_3$$

a pre všetky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{U}$ platí: $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{U}, c \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{U}$.

Lineárna kombinácia vektorov

Vektor $\mathbf{x}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, ak existujú také prvky $t_1, t_2, \dots, t_n$ poľa $\mathbb{P}$, že

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} t_i\mathbf{v}_i,$$

čo budeme označovať $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$. Hovoríme tiež, že

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i\mathbf{v}_i \,:\, t_i \in \mathbb{P}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

je lineárnym obalom vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

Tvrdenie 2.3

Nech sú $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektory vektorového priestoru $\mathbb{V}$ nad poľom $\mathbb{P}$. Potom $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ je vektorovým podpriestorom vektorového priestoru $\mathbb{V}$ nad poľom $\mathbb{P}$.

Príklad 2.5

Vektorový podpriestor aritmetického vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$ nad poľom $\mathbb{R}$ generovaný vektormi $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$ a $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ je ich lineárny obal.

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{(t_1 + t_2, 2t_1 - t_2, t_2) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Lineárna nezávislosť vektorov

Hovoríme, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sú lineárne nezávislé, ak z rovnosti

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (\clubsuit)$$

vyplýva $t_1, t_2, \ldots, t_n = 0$.

Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sú lineárne závislé, ak v rovnosti ($\clubsuit$) existuje aspoň jeden nenulový koeficient t_i.

Príklad 2.5 – pokračovanie

Vektory $\mathbf{u} = (1, 2, 0), \mathbf{v} = (1, -1, 1)$ sú lineárne nezávislé.
Rovnosť $t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} = (t_1 + t_2, 2t_1 - t_2, t_2) = (0, 0, 0)$ je splnená len pre $t_1 = 0, t_2 = 0$.

Tvrdenie 2.4

Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *vektorového priestoru* $\mathbb{V}$ *nad poľom* $\mathbb{P}$ *sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je lineárnou kombináciou ostatných.*

Príklad 2.6

Vektory $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (-1, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$ sú lineárne závislé.
Rovnica

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

má aj nenulové riešenie napr. $(t_1, t_2, t_3) = (\frac{1}{2}, 0, -1)$. A tak máme $v_3 = \frac{1}{2} v_1$.

Cvičenie 2.2

Overte nasledujúce tvrdenia:

1. Dva vektory sú závislé, ak je jeden z nich násobkom druhého.
2. Ak je jeden z vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ nulový, potom sú tieto vektory lineárne závislé.
3. Ak sú dva vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ rovnaké alebo jeden z nich je násobkom iného, potom sú tieto vektory lineárne závislé.
4. Nech sú $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárne nezávislé vektory a vektor $\mathbf{w} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$.
   Potom sú vektory lineárneho obalu $[\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ lineárne závislé a platí $[\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$.
5. Všetky riešenia systému rovníc nad poľom $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z + t &= 0, \\ y - 3t &= 0, \end{aligned}$$

   tvoria vektorový podpriestor aritmetického vektorového priestoru $\mathbb{V}_4$ nad poľom $\mathbb{Z}_5$.

Báza vektorového priestoru

Množinu $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}$ nad poľom $\mathbb{P}$ nazveme bázou vektorového priestoru, ak platí:

(a) vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ sú lineárne nezávislé,

(b) každý vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ možno napísať ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$.

Vektorový priestor $\mathbb{V}$ má konečnú dimenziu n, ak má n-prvkovú bázu.

Ďalej sa budeme zaoberať ;-) len vektorovými priestormi konečnej dimenzie.

Príklad 2.7

Množina $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ je bázou aritmetického vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$ nad poľom $\mathbb{R}$, ktorý má dimenziu 3. Každý vektor $(a, b, c) \in \mathbb{V}_3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ môžeme napísať v tvare

$(a, b, c) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (0,1,0) + c \cdot (0,0,1)$, pričom vektory z $\mathcal{B}$ sú lineárne nezávislé.

Tvrdenie 2.5

Nech $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *a* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *sú dve rôzne bázy vektorového priestoru* $\mathbb{V}$ *nad poľom* $\mathbb{P}$*. Potom* $m = n$*.*

Príklad 2.7 – pokračovanie

Majme jednotkovú bázu $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$.

Nahradením vektora $(0,1,0)$ v báze $\mathcal{B}$ vektorom $(1,2,0)$ dostaneme inú bázu $\mathcal{A}_1 = \{(1,0,0),(1,2,0),(0,0,1)\}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$.

Nahradením vektora $(1,0,0)$ v báze $\mathcal{A}_1$ vektorom $(1,-2,3)$ dostaneme inú bázu $\mathcal{A}_2 = \{(1,-2,3),(1,2,0),(0,0,1)\}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$.

Nahradením vektora $(0,0,1)$ v báze $\mathcal{A}_2$ vektorom $(2,1,0)$ dostaneme ďalšiu bázu $\mathcal{A}_3 = \{(1,-2,3),(1,2,0),(2,1,0)\}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$.

Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor s konečnou dimenziou n nad poľom $\mathbb{P}$ a bázou $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$. Nech

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_n\mathbf{b}_n = \sum_{i=1}^{n} t_i\mathbf{b}_i. \quad (\spadesuit)$$

Potom $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{P}$ nazývame súradnice vektora $\mathbf{x}$ v báze $\mathcal{B}$.

Tvrdenie 2.6

Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor s bázou $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Potom ľubovoľný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $(\spadesuit)$.

Príklad 2.8

Majme bázu $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$ nad poľom reálnych čísel a hľadajme súradnice vektora $\mathbf{x} = (2,1,3)$ v tejto báze.

Súradnice t_1, t_2, t_3 vektora $\mathbf{x}$ vypočítame z vektorovej rovnice $t_1 \cdot (1,0,1) + t_2 \cdot (0,1,0) + t_3 \cdot (0,1,1) = (2,1,3)$, ktorá vedie na sústavu troch rovníc o troch neznámych s riešením $\mathbf{x} = (2,0,1)_{\mathcal{B}}$.

Bonusový príklad 2.1

1. (3b) Majme bázu $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,2,1)\}$ vektorového priestoru nad poľom $\mathbb{Z}_5$. Určte súradnice vektora $\mathbf{x} = (2,1,3)$ v tejto báze.
2. (2b) Nahraďme v báze $\mathcal{B}_1$ vektorového priestoru nad poľom $\mathbb{Z}_5$ vektor $(1,0,1)$ vektorom $(1,2,3)$. Dostaneme opäť bázu toho istého vektorového priestoru? [Odpoveď zdôvodnite.]
3. (2b) Majme bázu $\mathcal{B}_2 = \{(v_1,v_2,v_3),(1,1,0),(0,2,1)\}$ vektorového priestoru nad poľom $\mathbb{Z}_5$. Akým podmienkam musí vyhovovať vektor (v_1,v_2,v_3)?
4. (4b) Nájdite všetky možné bázy $\mathcal{B}_2$ z 3. a vypočítajte súradnice vektora $\mathbf{x} = (2,1,3)$ v týchto bázach.

Bonusový príklad 2.2

1. (1b) Určte dimenziu vektorového priestoru $\mathbb{C}$.[Odpoveď zdôvodnite.]
2. (2b) Definujte na množine $\mathbb{C}^2$ vektorový priestor $\mathbb{W}$ nad poľom $\mathbb{C}$ pomocou binárnych operácii vektorového priestoru $\mathbb{C}$.
3. (2b) Nájdite dve rôzne bázy vektorového priestoru $\mathbb{W}$.
4. (3b) Uveďte príklad troch lineárne závislých vektorov z $\mathbb{W}$, ktoré sú po dvojiciach lineárne nezávislé.
5. (4b) Zovšeobecnite riešenia z 2. na vektorový priestor definovaný na množine $\mathbb{C}^p$ nad poľom $\mathbb{C}$, pre dané prirodzené číslo p, $p \geq 2$ a zistite jeho dimenziu.