Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

2007

beerb@frcatel.fri.uniza.sk

Obsah

1 Základné pojmy **3**

1.1 Logika . . . 3

1.1.1 Výrazy a výroky . . . 3

1.1.2 Logické operácie . . . 3

1.1.3 Výrokové formy . . . 4

1.1.4 Niektoré dôležité tautológie . . . 5

1.1.5 Kvantifikátory . . . 5

Cvičenia . . . 6

1.2 Základné prvky matematickej teórie . . . 8

1.2.1 Priamy dôkaz . . . 8

1.2.2 Nepriamy dôkaz . . . 8

1.2.3 Dôkaz matematickou indukciou . . . 9

1.2.4 Poznámka k dôkazom . . . 10

1.2.5 Sumačná a súčinová symbolika . . . 11

Cvičenia . . . 11

1.3 Množiny . . . 13

1.3.1 Množina a podmnožina . . . 13

1.3.2 Operácie s množinami . . . 14

1.3.3 Zobrazenie množín . . . 15

1.3.4 Mohutnosť množín . . . 18

Cvičenia . . . 19

2 Reálne čísla **23**

2.1 Algebraické vlastnosti reálnych čísel . . . 23

2.1.1 Úvodné poznámky . . . 23

2.1.2 Axiómy reálnych čísel . . . 23

2.1.3 Dôsledky axióm reálnych čísel . . . 24

Cvičenia . . . 30

2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel . . . 32

2.2.1 Okolie bodu . . . 32

2.2.2 Otvorené a uzavreté množiny . . . 33

2.2.3 Metrické vlastnosti čísel . . . 35

Cvičenia . . . 37

2.3 Postupnosti reálnych čísel . . . 37

2.3.1 Základné pojmy . . . 37

2.3.2 Limita postupnosti . . . 38

2.3.3 Prehľad základných tvrdení . . . 40

Cvičenia . . . 47

2.4 Číselné rady . . . 49

2.4.1 Základné pojmy . . . 49

2.4.2 Vlastnosti konvergentných radov . . . 53

2.4.3 Číselné rady s nezápornými členmi . . . 55

2.4.4 Absolútna, relatívna konvergencia a alternujúce rady . . . 60

2.4.5 Prerovnanie radov a rady s predpísaným súčtom . . . 63

2.4.6 Súčiny číselných radov 66
Cvičenia 68

3 Reálne funkcie reálnej premennej **73**
3.1 Reálne funkcie 73
3.1.1 Základné vlastnosti funkcií 76
3.1.2 Operácie s funkciami 81
3.1.3 Elementárne funkcie 84
Cvičenia 91
3.2 Limita funkcie 94
3.2.1 Základné vlastnosti 95
3.2.2 Limita vzhľadom na množinu a jednostranné limity 100
3.2.3 Asymptotické vlastnosti 101
3.2.4 Riešené príklady 103
Cvičenia 107
3.3 Spojitosť funkcie 109
3.3.1 Spojitosť funkcie v bode 109
3.3.2 Spojitosť funkcie na množine a body nespojitosti 112
3.3.3 Vlastnosti spojitých funkcií na intervale 113
Cvičenia 118

4 Diferenciálny počet reálnej funkcie **121**
4.1 Derivácia reálnej funkcie 121
4.1.1 Definícia derivácie funkcie a jej základné vlastnosti 121
4.1.2 Jednostranné derivácie a derivácia na množine 123
4.1.3 Základné vety pre výpočet derivácií 125
4.1.4 Derivovanie elementárnych funkcií 128
Cvičenia 129
4.2 Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov 132
4.2.1 Diferenciál a diferencovateľnosť funkcie 132
4.2.2 Využitie diferenciálu na približné výpočty 134
4.2.3 Derivácie vyšších rádov 136
4.2.4 Pojem diferenciálu vyššieho rádu 137
Cvičenia 138
4.3 Aplikácie diferenciálneho počtu 139
4.3.1 Vety o strednej hodnote funkcie 139
4.3.2 L'Hospitalovo pravidlo 142
4.3.3 Neurčité výrazy 145
4.3.4 Taylorov polynóm 146
4.3.5 Vyšetrovanie priebehu funkcie 151
4.3.6 Derivácia funkcie zadanej parametricky, implicitne a derivácia funkcie zadanej v polárnych súradniciach 164
Cvičenia 169
Výsledky cvičení 177
Register 182
Literatúra 183

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Logika

Predmetom skúmania logiky sú myšlienky. Logika sa zaoberá štúdiom formálnych vlastností myšlienky a stanovuje pravidlá správneho, t.j. logického usudzovania. Preto je potrebné sa oboznámiť so základnými logickými pojmami, ktoré sa používajú v matematike a nielen v matematike.

1.1.1 Výrazy a výroky

Na vyjadrenie myšlienok používame jazyk, ktorý sa skladá z **výrazov**. Výraz je základom prejavu myšlienky, je základnou myšlienkou jazykového prejavu. Výrazy sú jednoduché alebo zložené, ktoré sa tvoria z jednoduchých pomocou syntaktických pravidiel jazyka. V živom jazyku sú výrazmi slová a vety. Na ich označenie sa okrem latinskej (slovenskej) abecedy používa tiež **abeceda grécka**.

α	A	alfa	a	η	H	éta	é	ν	N	ný	n	τ	T	tau	t
β	B	beta	b	ϑ	Θ	théta	th	ξ	Ξ	ksí (xí)	x	υ	Υ	ypsilon	y
γ	Γ	gama	g	ι	I	ióta	i	o	O	omikron	o	φ	Φ	fí	f
δ	Δ	delta	d	κ	K	kappa	k	π	Π	pí	p	χ	X	chí	ch
ε	E	epsilon	e	λ	Λ	lambda	l	ρ	P	ró	r	ψ	Ψ	psí	ps
ζ	Z	dzéta	dz	μ	M	mí	m	σ	Σ	sigma	s	ω	Ω	omega	ó

Tab. 1.1.1: Grécka abeceda.

V logike sa výrazy rozdeľujú na konštanty a premenné. **Konštanty** sú výrazy, ktoré majú nemenný (t.j. konštantný) význam. **Premenné** sú výrazy, ktoré zastupujú konštanty. Premenné môžeme v prípade potreby nahradiť konštantami (tým sa myslí jednoduchými aj zloženými konštantami). Je zrejmé, že nemá význam dosadzovať všetky konštanty, ale iba tie, ktoré dajú danému výrazu zmysel.

Výrok je výraz, ktorý vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku. Výroky delíme na **pravdivé** a **nepravdivé**, pričom kritériom pravdivosti je zhoda so skutočnosťou. Gramaticky je výrok obyčajne (ale nie vždy) oznamovacia veta.[1] Pre výrok je podstatné, či možno o ňom tvrdiť, že je **pravdivý** alebo **nepravdivý**. Výrok nemôže byť zároveň pravdivý a zároveň nepravdivý.

Výrazy, ktoré obsahujú premenné, nazývame **nesamostatné výrazy** alebo **formy**. Ak dosadíme do danej formy za všetky premenné konštanty z oboru úvahy, potom môžeme dostať výrok — vtedy hovoríme o **výrokovej forme**. **Výroková forma nie je výrok!** Z výrokovej formy vznikne výrok dosadením prípustných konštánt za všetky premenné.

Príklad 1.1.1.
Výrokové formy sú napríklad: „$2+3=x$“, „*Ak platí tvrdenie 1, potom platí tvrdenie 2.*“.
Výrokmi sú napríklad výrazy: „*Pes je domáce zviera.*“, „$2+3=4$“, „*Pre každé reálne číslo x platí $x \geq 0$.*“, „*Trabant je auto.*“. ∎

1.1.2 Logické operácie

Ako sme už spomenuli, výrok je výraz, ktorý vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku. Preto je vhodné zaviesť pojem **pravdivostná**, resp. **logická hodnota výroku**. Pre pravdivý výrok (t.j. výrok, ktorý je platný) definujeme pravdivostnú hodnotu **pravda** a vyjadrujeme ju symbolom P. Pre nepravdivý výrok (t.j. neplatný výrok) definujeme pravdivostnú hodnotu **nepravda** a vyjadrujeme ju symbolom N.[2]

Pravdivostnú hodnotu výroku p budeme označovať $|p|$.

Výrokový počet sa zaoberá pravdivostnou hodnotou **zložených výrokov**, ktoré sú vytvorené z iných výrokov pomocou **logických operácií**. Základné logické operácie sú negácia výroku, konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia výrokov.

- **Negácia výroku**

[1] Od gramatickej vety je nutné odlišovať **matematickú vetu**. Je to pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný (napr. binomická veta, Pytagorova veta, ...

[2] Tiež sa používa 1, A (áno), T (true), Y (yes), resp. 0, N (nie), F (false), N (no).

Negácia výroku p sa tvorí výrazmi „*nie je pravda, že* p“, „*nie je pravda, že platí* p“, prípadne „*ne-p*“. Negáciu výroku p označujeme $\overline{p}$ (niekedy tiež $\sim p$, resp. p') a čítame „nie p“, „*nie je pravda, že* p“, „non p“ a podobne.

Výrok a jeho negácia majú opačné pravdivostné hodnoty. Ďalej je zrejmé, že **negáciou negácie výroku** p je pôvodný výrok p, t.j. $\overline{(\overline{p})} = \overline{\overline{p}}$.

- **Konjunkcia výrokov**

Konjunkcia výrokov p a q sa tvorí pomocou spojky „a“, označujeme ju $p \wedge q$, prípadne $p\&q$ a čítame „*p a q*“, „*p a súčasne q*“, „*p konjunkcia q*“, „*konjunkcia výrokov p a q*“, „*p et q*“ a podobne.

Konjunkcia dvoch výrokov je pravdivá iba v prípade, ak sú pravdivé obidva výroky. Takže na dokázanie nepravdivosti zloženého výroku stačí ukázať nepravdivosť jedného z výrokov (tabuľka 1.1.2).

Poznámka 1.1.1.
Ak použijeme na označenie pravdivostnej hodnoty symboly 0 a 1, potom pravdivostná hodnota konjunkcie dvoch výrokov sa rovná násobku pravdivostných hodnôt jednotlivých výrokov, t.j. $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$.

- **Disjunkcia výrokov**

Disjunkcia výrokov p a q sa tvorí pomocou spojky „alebo“, označujeme ju $p \vee q$ (skratka z latinského *vel* — alebo) a čítame „*p alebo q*“, „*p vel q*“, „*disjunkcia výrokov p, q*“ a podobne.[3]

Disjunkcia je pravdivá, ak je pravdivý aspoň jeden z výrokov (tabuľka 1.1.2).

- **Implikácia výrokov**

Implikácia výrokov p a q sa tvorí vzťahom „Ak (platí) ..., potom (platí) ...“, označujeme ju $p \Rightarrow q$ a čítame „*Z p vyplýva q*“, „*p potom q*“, „*Ak platí p, potom platí q*“, „*p je nutná podmienka pre q*“, „*q je postačujúca podmienka pre p*“.

Výrok p sa nazýva podmieňujúci (predpoklad) a výrok q sa nazýva podmienený výrok (záver). Implikácia je nepravdivá iba v prípade pravdivého predpokladu a nepravdivého záveru (tabuľka 1.1.2).

- **Ekvivalencia výrokov**

Ekvivalencia výrokov p a q sa tvorí pomocou vzťahu „... (platí) práve vtedy, ak (platí) ...“, označujeme ju $p \Leftrightarrow q$. Niekedy sa tiež označuje $p \sim q$, resp. $p \equiv q$.

Ekvivalenciu výrokov p a q čítame „*p (platí) práve vtedy, ak (platí) q*“, „*p platí vtedy a len vtedy, ak platí q*“, „*Z p vyplýva q a naopak z q vyplýva p*“, „*p je nutná podmienka a súčasne postačujúca podmienka pre q*“ a podobne.

Ekvivalencia je pravdivá v prípade, že majú obidva výroky (z ktorých je zložená) rovnakú pravdivostnú hodnotu (tabuľka 1.1.2).

Ekvivalenciu $p \Leftrightarrow q$ môžeme nahradiť zloženým výrokom $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
P	P	N	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	N			N	N	P	P	N	P	N	N
N	P	P	N	N	N	P	P	P	N	N	N
N	N			N	N	N	N	P	P	P	P

Tab. 1.1.2: Pravdivostné hodnoty zložených výrokov.

1.1.3 Výrokové formy

V zásade nemá zmysel hovoriť o pravdivosti alebo nepravdivosti výrokovej formy, pretože obsahuje premenné. Ale má zmysel uvažovať, pre aké hodnoty premenných sa z nej stáva pravdivý, resp. nepravdivý výrok. Dôležité sú dve výrokové formy, ktoré sa nazývajú tautológia a kontraindikácia.

Tautológia (**zákon**) je výroková forma, ktorá po nahradení všetkých premenných konštantami dá vždy pravdivý výrok. To znamená, že ak použijeme prípustné konštanty s ľubovoľnými pravdivostnými hodnotami, dostaneme pravdivý výrok.

Kontraindikácia (**spor**) je výroková forma, ktorá po nahradení všetkých premenných konštantami dá vždy nepravdivý výrok.

Pravdivostné hodnoty výrokov najčastejšie zisťujeme pomocou tabuľkovej alebo deduktívnej metódy, prípadne tieto metódy kombinujeme.

- **Tabuľková metóda na zisťovanie pravdivostných hodnôt**

Zapíšeme danú výrokovú formu a jednotlivé premenné, z ktorých je zložená, do tabuľky pravdivostných hodnôt. Najprv ohodnotíme pravdivostnými hodnotami jednotlivé premenné a potom určíme príslušné pravdivostné hodnoty výrokovej formy (tabuľka 1.1.3).

- **Deduktívna metóda na zisťovanie pravdivostných hodnôt**

[3] V literatúre sa môžeme stretnúť aj s názvom **alternatíva**.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
P	P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	N	P
N	P	P	N	N	N	P
N	N	P	P	P	P	P

Tab. 1.1.3: Tautológia $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

Na začiatku vychádzame z axióm[4] a tautológií, ktorých pravdivosť je dokázaná alebo pravdivosť ktorých poznáme. Potom pomocou pravidiel odvodzovania z nich dedukujeme nové tautológie.

i) **Pravidlo substitúcie**:
Ak v tautológii T dosadíme za nejakú premenú (na každom mieste, kde sa vyskytuje) ľubovoľnú výrokovú formu (nemusí byť tautológia), dostaneme opäť tautológiu.

ii) **Pravidlá odlúčenia** (modus ponens a tollens):
  – **Modus ponens** (hypoteticko–kategorický kladný úsudok):
  Nech $p \Rightarrow q$ je pravdivá implikácia. Ak je pravdivé p, potom je pravdivé aj q.
  – **Modus tollens** (hypoteticko–kategorický záporný úsudok):
  Nech $p \Rightarrow q$ je pravdivá implikácia. Ak je nepravdivé q, potom je nepravdivé aj p.

Platnosť pravidiel odlúčenia vyplýva z tabuľky 1.1.2. Ukážeme platnosť modusu ponens (modus tollens sa ukáže analogicky). Predpoklad p je pravdivý. Záver q je buď pravdivý a implikácia $p \Rightarrow q$ je tiež pravdivá, alebo záver q je nepravdivý a implikácia $p \Rightarrow q$ je nepravdivá. Lenže druhá možnosť nemôže nastať, pretože predpokladáme platnosť implikácie $p \Rightarrow q$.

1.1.4 Niektoré dôležité tautológie

- **Zákon dvojitej negácie:** $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$
  Výrok a negácia jeho negácie majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.
- **Zákon vylúčenia tretieho:** $p \vee \overline{p}$
  Buď platí výrok alebo jeho negácia.
- **Zákon sporu:** $\overline{p \wedge \overline{p}}$
  Výrok nemôže byť pravdivý a zároveň nepravdivý, t.j. nikdy neplatí $p \wedge \overline{p}$.
- **de Morganove zákony:** $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$, **resp.** $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
  Pri tvorení negácie konjunkcie, resp. disjunkcie sa mení „a“ na „alebo“, resp. „alebo“ na „a“ a negujú sa jednotlivé výroky.
- **Zákon hypotetického sylogizmu:** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
  Je obdobou tranzitívneho zákona.
- **Zákon transpozície:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
  Implikácia $p \Rightarrow q$ a obrátená implikácia $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu (schéma **nepriameho dôkazu**).
- **Komutatívne zákony:** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
- **Asociatívne zákony:** $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$, $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
  Pre jednoduchosť zátvorky vynechávame, t.j. píšeme $p \wedge q \wedge r$, resp $p \vee q \vee r$.
- **Distributívne zákony:** $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
- **Ekvivalencia a implikácie:** $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
- **Negácia implikácie:** $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$
  Táto tautológia sa najčastejšie využíva pri dôkaze sporom (str. 1.2.2).

1.1.5 Kvantifikátory

V matematike často skúmame, či je nejaký výrok pravdivý všeobecne, t.j. platný pre všetky prvky z oboru úvahy, alebo iba pre niektoré prvky, prípadne iba pre práve jeden prvok. Na druhej strane nás niekedy zaujíma, či existuje aspoň jeden prvok, pre ktorý je

[4] **Axióma** je základné tvrdenie, o ktorom sa predpokladá, že platí a nedokazuje sa.

tento výrok pravdivý. Hovoríme, že **výrok kvantifikujeme**.

- **Všeobecný kvantifikátor**

  Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňajú **všetky prvky** z oboru úvahy, kvantifikujeme daný výrok **všeobecným kvantifikátorom**. Označujeme ho symbolom $\forall$ a vyjadrujeme ho slovami „každý“, „všetky“, „žiadny“ a podobne.

- **Existenčný kvantifikátor**

  Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **aspoň jeden prvok** z oboru úvahy, kvantifikujeme výrok **existenčným kvantifikátorom**. Označujeme ho symbolom $\exists$ a vyjadrujeme ho slovami „existuje“, „jestvuje“, „niektoré“, „aspoň jeden“ a podobne.

Symbolom $\exists!$ vyjadrujeme skutočnosť, že danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **práve jeden prvok** z oboru úvahy (t.j. aspoň jeden a najviac jeden prvok).

Označme symbolom $F(x)$ skutočnosť, že prvok x má vlastnosť F. Kvantifikácia sa vždy vzťahuje k **oboru kvantifikácie**, t.j. k množine premenných prvkov x. Ak použijeme kvantifikátor, potom viažeme premennú na túto množinu premenných a z výrokovej formy $F(x)$ sa stáva výrok:

$\forall x F(x)$ „*Pre všetky x, pre ktoré platí vlastnosť $F(x)$.*“,
$\exists x F(x)$ „*Existuje x, ktoré spĺňa vlastnosť $F(x)$.*“.

Uveďme teraz príklady výrokov vytvorených pomocou kvantifikátorov:

$\forall x\, F(x)$ „*Každé x má vlastnosť F.*“

$\overline{\forall x\, F(x)}$ „*Nie je pravda, že každé x má vlastnosť F.*“, t.j. „*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t.j. „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.

$\overline{\forall x}\, F(x)$ „*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t.j. „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.

$\forall x\, \overline{F(x)}$ „*Pre každé x platí, že nemá vlastnosť F.*“, t.j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“. V hovorovej reči použijeme dvojitú negáciu: „*Žiadne x nemá vlastnosť F.*“.

$\overline{\forall x}\, \overline{F(x)}$ „*Nie každé x nemá vlastnosť F.*“, t.j. „*Neplatí, že každé x nemá vlastnosť F.*“.

$\exists x\, F(x)$ „*Existuje aspoň jedno x, ktoré má vlastnosť F.*“

$\overline{\exists x\, F(x)}$ „*Nie je pravda, že existuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t.j. „*Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t.j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“.

$\overline{\exists x}\, F(x)$ „*Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t.j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“.

$\exists x\, \overline{F(x)}$ „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“

$\overline{\exists x}\, \overline{F(x)}$ „*Neeistuje x, ktoré nemá vlastnosť F.*“

Poznámka 1.1.2.
Z predchádzajúceho vyplýva, že $\overline{\forall x\, F(x)}$ a $\overline{\forall x}\, F(x)$, resp. $\overline{\exists x\, F(x)}$ a $\overline{\exists x}\, F(x)$ vyjadrujú ten istý výrok, t.j. negácia kvantifikátoru je ekvivalentná negácii kvantifikovaného výroku

$$\overline{\forall x\, F(x)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\forall x}\, F(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, \overline{F(x)}, \qquad \overline{\exists x\, F(x)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\exists x}\, F(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x\, \overline{F(x)}.$$

Ďalej sa pri negácii výroku menia kvantifikátory navzájom a výroková forma sa mení na svoju negáciu. Namiesto označenia $\overline{\exists x}$ sa používa $\nexists x$.

Cvičenia

1.1.1. Vytvorte negáciu a rozhodnite, ktorý z výrokov je pravdivý:

a) „*Všetci ľudia vedia plávať.*“, b) „*Rovnica $2^x = 4x$ má kladný koreň x.*“,
c) „*Aspoň dve čísla sú kladné.*“, d) „*Najmenej tretina krajín patrí do OSN.*“,
e) „*Práve dve čísla sú kladné.*“, f) „*Každé číslo tvaru n^2, $n \in N$ je párne.*“.

1.1.2. Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov:

a) $\forall x \in R\colon\ \sin x < 1$, b) $\exists x \in R\colon\ \sin x < 1$, c) $\exists! x \in R\colon\ \sin x < 1$,
d) $\nexists x \in R\colon\ \sin x < 1$, e) $\forall x \in R\colon\ \sin x > 1$, f) $\exists x \in R\colon\ \sin x > 1$,
g) $\exists! x \in R\colon\ \sin x > 1$, h) $\nexists x \in R\colon\ \sin x > 1$, i) $\forall x \in R\colon\ \sin x = 1$,
j) $\exists x \in R\colon\ \sin x = 1$, k) $\exists! x \in R\colon\ \sin x = 1$, l) $\nexists x \in R\colon\ \sin x = 1$.

1.1.3. Napíšte tabuľky pravdivostných hodnôt pre nasledujúce výroky:

a) $\overline{p \vee \overline{q}}$, b) $\overline{p \wedge \overline{q}}$, c) $\overline{p \vee (q \wedge \overline{p})}$, d) $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$,
e) $\overline{p} \Rightarrow q$, f) $\overline{\overline{p} \Leftrightarrow q}$, g) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{q}$, h) $(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge \overline{q \Rightarrow p}$,
i) $\overline{p \wedge \overline{q}} \vee p$, j) $\overline{p \wedge \overline{q}} \vee q$, k) $(p \vee q) \Rightarrow \overline{p}$, l) $(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$.

1.1.4. Utvorte výroky $p \wedge q$, $p \vee q$ a určte, v ktorých prípadoch sú pravdivé:

a) p: *„Daný trojuholník je pravouhlý.“*, q: *„Daný trojuholník je rovnoramenný.“*,
b) p: *„Celé číslo k je párne.“*, q: *„Celé číslo k je deliteľné tromi.“*,
c) p: *„Daná nerovnica platí pre $x \leq 4$.“*, q: *„Daná nerovnica neplatí pre $x \leq 1$.“*,
d) p: *„Daná kvadratická rovnica nemá reálne riešenie.“*, q: *„Daná kvadratická rovnica má absolútny člen s opačným znamienkom ako znamienko kvadratického člena.“*.

1.1.5. Ku $p \Rightarrow q$ a $p \Leftrightarrow q$ nájdite ekvivalentné formy, ktoré obsahujú iba negáciu a:

a) konjunkciu, disjunkciu, b) konjunkciu, c) disjunkciu.

1.1.6. Utvorte výroky $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$ a určte, ktoré z nich sú pravdivé. V prípade pravdivej implikácie vytvorte pomocou zákona transpozície obrátenú implikáciu.

a) p: *„Dané číslo $x < 0$“*, q: *„Dané číslo $x < 3$“*,
b) p: *„Bol som v Prahe.“*, q: *„Bol som v Čechách.“*,
c) p: *„Nemám peniaze.“*, q: *„Nepôjdem do kina.“*,
d) p: *„Pri ceste rastie čakanka.“*, q: *„Pri ceste rastie tráva.“*,
e) p: *„Prídem na stanicu včas.“*, q: *„Nezmeškám vlak.“*,
f) p: *„Pre dané čísla x, y platí $x^2 = y^2$.“*, q: *„Pre dané čísla x, y platí $x = y$.“*,
g) p: „$\sin x > 0$.“, q: „$x \in (0\,;\pi)$.“,
h) p: *„Dané dve kružnice nemajú spoločné body.“*, q: *„Dané dve kružnice sú sústredné.“*,
i) p: *„Trojuholník ABC je pravouhlý.“*, q: *„Pre strany trojuholníka platí $a^2 + b^2 = c^2$.“*,
j) p: *„Kvadratickú rovnicu môžeme písať v tvare $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.“*, q: *„Kvadratická rovnica má korene x_1, x_2.“*,
k) p: *„Dané číslo $x > 0$.“*, q: *„Pre dané číslo x platí $\sin x > 0$.“*,
l) p: *„Dve rôzne priamky p_1, p_2 ležiace v rovine sú rovnobežné.“*, q: *„Dve priamky p_1, p_2 ležiace v rovine nemajú spoločný bod.“*.

1.1.7. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie:

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$,
b) $[(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p)] \Rightarrow [(q \vee r) \Rightarrow p]$,
c) $[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \wedge p]$,
d) $[(q \vee r) \Rightarrow p] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$,
e) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \vee \overline{p})]$,
f) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p})]$
g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$,
h) $[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$,
i) $[((\overline{p \wedge q} \Rightarrow r) \Rightarrow \overline{p}) \vee (r \Rightarrow (\overline{p} \vee q))] \Rightarrow [(p \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)]$,
j) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow \{[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r] \vee [(p \wedge \overline{r}) \Rightarrow q]\}$.

1.1.8. Dokážte, že nasledujúce výrokové formy sú tautológie:

a) $p \Leftrightarrow p$, b) $p \Rightarrow p$, c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, d) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

1.1.9. Určte, ktoré z nasledujúcich výrazov sú výroky a svoje tvrdenie odôvodnite:

a) $4 - 1 = 5$, b) $25 \cdot 4$, c) $2x + 1 = 3$,
d) $2(x + 1) = 2x + 2$, e) *„Koľko je hodín?“*, f) *„Pomoc!“*,
g) *„Nebezpečenstvo úrazu“*, h) *„Prší.“*, i) *„Včera pršalo.“*,
j) *„Zajtra bude pršať.“*, k) *„Včera pršalo?“*, l) *„Prší a neprší.“*.

1.1.10. Z výrokových foriem p: *„x je deliteľné dvomi.“*, q: *„x je deliteľné tromi.“*, r: *„x je deliteľné šiestimi.“* vytvorte v slovnom znení zložené formy $F(x)$, $\overline{F(x)}$:

a) $F(x)\colon\ (p \wedge q) \Leftrightarrow r$,
b) $F(x)\colon\ (p \vee q) \Rightarrow r$,
c) $F(x)\colon\ \overline{p \vee q} \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$,
d) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \vee \overline{p \wedge r}$,
e) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \overline{q})$,
f) $F(x)\colon\ (p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$.

1.1.11. Zistite, ktoré z výrokových foriem $F(x)$ z príkladu 1.1.10 sú tautológie.

1.1.12. Zameňme v príklade 1.1.10 výrokovú formu r na tvar *„x je deliteľné piatimi.“*. Ktoré z výrokových foriem $F(x)$ sú tautológie v tomto prípade?

1.1.13. Nech výroková forma t je tautológia a výroková forma k je kontraindikácia. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie a ktoré kontraindikácie:

a) $\overline{t}$, b) $\overline{k}$, c) $t \Rightarrow k$, d) $k \Rightarrow t$, e) $(t \Rightarrow k) \vee \overline{t \wedge k}$,
f) $t \vee k$, g) $t \wedge k$, h) $\overline{t} \vee \overline{k}$, i) $\overline{t} \wedge \overline{k}$, j) $(t \vee k) \Rightarrow \overline{k \Rightarrow t}$.

1.1.14. K výrokovej forme $\overline{p \Rightarrow q} \vee (r \Leftrightarrow s)$ nájdite ekvivalentnú formu, ktorá neobsahuje symboly $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$.

1.1.15. Zjednodušte výrazy tak, aby v nich bol čo najmenší počet symbolov negácie:

a) $\overline{\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}$, b) $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}$, c) $\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}} \vee \overline{r} \vee \overline{s}$.

1.1.16. Nech p, q sú výrokové formy také, že $p \Leftrightarrow q$ je tautológia. Dokážte, že aj $p \Rightarrow q$ je tautológia.

1.1.17. Dokážte, že výroková forma $\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow r \;\Leftrightarrow\; p \Leftrightarrow \overline{q \Leftrightarrow r}$ je tautológia pre ľubovoľné výrokové formy p, q, r.

1.1.18. Uvažujme výrokovú formu $F(x)$: $2x - 3y = 1$. Ktoré z výrokov sú pravdivé:

a) $\forall x \in R\, \forall y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
b) $\forall x \in R\, \exists y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
c) $\exists x \in R\, \forall y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
d) $\exists x \in R\, \exists y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
e) $\exists y \in (0\,;\,\infty)\, \forall x \in R\colon F(x)$,
f) $\forall y \in (0\,;\,\infty)\, \exists x \in R\colon F(x)$.

1.1.19. Vytvorte negáciu a rozhodnite, ktorý z výrokov je pravdivý:

a) $\forall x \in R\colon \sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
b) $\forall x \in R\colon \sin^2 x - \cos^2 x = 1$,
c) $\exists x \in R\colon \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$,
d) $\forall x \in R\colon \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$,
e) $\exists x \in R\colon x^4 < x^3$,
f) $\forall x \in R\, \forall y \in R\colon x^2 + y^2 > 0$,
g) $\exists x \in R\, \forall n \in N\colon n + 3 < nx$,
h) $\forall n \in N\, \exists x \in R\colon n + 3 < nx$.

1.2 Základné prvky matematickej teórie

Hlavným znakom súčasnej matematiky je, že svoje jednotlivé disciplíny buduje axiomaticky. Na začiatku sú najjednoduchšie pojmy (tzv. **primitívne, nedefinované pojmy**) a súbory viet (tzv. **axiómy**), o ktorých predpokladáme, že platia a nedokazujeme ich. Výber systému primitívnych pojmov a axióm nie je úplne ľubovoľný, ale je ovplyvnený rôznymi podmienkami a hlavne účelom, pre ktorý sa disciplína buduje.

Najdôležitejšia je ale **podmienka bezspornosti systému**. To znamená, že v syténe nemôžeme odvodiť výrok a zároveň jeho negáciu. Na tomto základe definujeme pomocou definícií nové pojmy a pomocou už dokázaných (t.j. platných) viet formulujeme a dokazujeme vety nové. Štruktúru matematiky môžeme charakterizovať trojicou základných kameňov, ktoré nazývame **definícia**, **veta** a **dôkaz**.

Definícia určuje význam zavádzaného pojmu, pomocou už známych pojmov.

Veta (**poučka**, **tvrdenie**) je pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný, resp. nie sú o ňom pochybnosti. **Pravidlom** nazývame obyčajne vetu, ktorá obsahuje návod na ďalší postup (napr. výpočet, konštrukciu nových objektov) pri budovaní systému. V matematike sa niekedy používajú **pomocné vety** (**lemy**), ktoré majú (už podľa názvu) pomocný význam pri dokazovaní iných viet.

Dôkaz vety, resp. daného tvrdenia je logický proces, ktorého cieľom je ukázať pravdivosť tvrdenia pomocou axióm, definícií a už predtým dokázaných viet. Dôkazy môžu mať rôzmu formu, najznámejšie druhy dôkazov sú **priamy dôkaz**, **nepriamy dôkaz** a **dôkaz matematickou indukciou**.

1.2.1 Priamy dôkaz

Je to spôsob, ktorý sa používa pri dokazovaní platnosti viet, ktoré majú vo všeobecnosti tvar výroku $p \Rightarrow q$ (ak platí výrok p, potom platí výrok q).

Priamym dôkazom sa dokazuje platnosť pôvodnej implikácie $p \Rightarrow q$. Predpokladáme, že výrok p je pravdivý, potom pomocou definícií, axióm a už dokázaných viet ukážeme, že platí výrok q. Prakticky zostrojíme konečnú postupnosť pravdivých výrokov p_1, p_2, $\ldots p_k$, ktorú môžeme symbolicky zapísať $p \;\Rightarrow\; p_1 \;\Rightarrow\; p_2 \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; p_k \;\Rightarrow\; q$.

1.2.2 Nepriamy dôkaz

Nepriamy dôkaz sa podobne ako priamy dôkaz používa pri dokazovaní platnosti viet tvaru $p \Rightarrow q$. Pri nepriamom dôkaze sa nedokazuje platnosť pôvodného výroku $p \Rightarrow q$, ale platnosť nejakého ekvivalentného výroku.

Druhá možnosť je, že budeme predpokladať pravdivosť negácie pôvodného výroku, t.j. pravdivosť výroku $\overline{p \Rightarrow q}$, resp. $p \wedge \overline{q}$ a dokážeme nepravdivosť tejto negácie.

- **Dôkaz pomocou obrátenej implikácie**

Pôvodnú implikáciu $p \Rightarrow q$ nahradíme ekvivalentnou obrátenou implikáciou $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ (zákon transpozície, str. 5) a potom ju dokážeme pomocou priameho dôkazu.

- **Dôkaz sporom**

Budeme predpokladať platnosť negácie výroku $p \Rightarrow q$, t.j. platnosť výroku $p \wedge \overline{q}$ a ukážeme jeho nepravdivosť. Prakticky to znamená, že pri dokazovaní dospejeme k sporu. Najčastejšie sa zvykne dospieť k týmto sporom:

a) $p \wedge \overline{q} \;\Rightarrow\; \overline{p}$, z predpokladu pravdivosti p ukážeme nepravdivosť p.
b) $p \wedge \overline{q} \;\Rightarrow\; q$, z predpokladu nepravdivosti q ukážeme pravdivosť q.
c) $p \wedge \overline{q} \;\Rightarrow\; r \wedge \overline{r}$, kde r je ľubovoľný výrok (zákon sporu, str. 5).
d) $p \wedge \overline{q} \;\Rightarrow\; \overline{r}$, kde r je ľubovoľný známy pravdivý výrok.

Príklad 1.2.1.
Dokážeme tvrdenie: „*Ak je prirodzené číslo* n *deliteľné* 4, *potom je deliteľné* 2."
To znamená, že máme dokázať platnosť výroku: $\forall n \in N\colon\ 4 \big| n \Rightarrow 2 \big| n$.

Priamy dôkaz: $4 \big| n \Rightarrow 2 \big| n$
$\forall n \in N\colon\ 4 \big| n \ \Rightarrow\ \exists k \in N\colon\ n = 4k = 2 \cdot 2k = 2(2k) \ \Rightarrow\ 2 \big| n.$

Obrátená implikácia: $2 \not\big| n \Rightarrow 4 \not\big| n$
$\forall n \in N\colon\ 2 \not\big| n \ \Rightarrow\ (2 \cdot 2) \not\big| n$, t.j $4 \not\big| n$.

Dôkaz sporom: $4 \big| n \wedge 2 \not\big| n \Rightarrow$ spor
$\forall n \in N\colon\ 4 \big| n \wedge 2 \not\big| n \ \Rightarrow\ [\exists k \in N\colon\ n = 4k = 2(2k)] \wedge 2 \not\big| n \ \Rightarrow\ 2 \big| n \wedge 2 \not\big| n$, t.j. spor. ■

1.2.3 Dôkaz matematickou indukciou

Matematická indukcia je dôležitý prostriedok na dokazovanie tvrdenia, že prvky nejakej množiny majú určitú vlastnosť. Pomocou **matematickej indukcie** sa dokazuje pravdivosť výrokov tvaru $\forall n \in N, n \geq n_0\colon\ F(n)$, kde n_0 je dané prirodzené číslo.

Nech F je nejaké tvrdenie, ktoré závisí od množiny prirodzených čísel. Chceme ukázať, že tvrdenie $F(n)$ platí pre prirodzené čísla $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$.

Dôkaz **matematickou indukciou** pozostáva z krokov 1, 2 a záveru:

Krok 1.
Ukážeme, že je tvrdenie F splnené pre prvý prvok $n = n_0$, t.j. že platí $F(n_0)$.

Krok 2.
Predpokladáme, že dané tvrdenie F platí pre nejaké prirodzené číslo $n = k \geq n_0$ a (za tohto predpokladu) dokážeme, že platí pre nasledujúce prirodzené číslo $n = k+1$.
Takže ukážeme, že z platnosti $F(k)$ vyplýva platnosť $F(k+1)$.

Záver.
V kroku 1 sme ukázali, že platí $F(n_0)$. Lenže z kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+1)$.
Z tohto opäť na základe kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+2)$, $F(n_0+3)$, atď.
Potom je tvrdenie F splnené pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$.

Príklad 1.2.2.
Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí vzťah $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

Riešenie.
Označme $F(n) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$. Takže máme ukázať rovnosť $F(n) = n^2$.
Krok 1. $F(1) = 1^2$.
Vzťah je splnený triviálne, pretože $F(1) = 1 = 1^2$.
Krok 2. $F(k) = k^2 \Rightarrow F(k+1) = (k+1)^2$.
Ak predpokladáme, že platí $F(k) = k^2$, potom

$$F(k+1) = 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = F(k) + (2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2.$$

Na základe matematickej indukcie vyplýva z krokov 1 a 2 dané tvrdenie. ■

Príklad 1.2.3.
Dokážte, že pre $\forall n \in N$, $n \geq 5$ platí nerovnosť $2^n > n^2$.

Riešenie.
Nerovnosť dokážeme pomocou matematickej indukcie.
Krok 1. Pre $n = 5$ platí $32 = 2^5 > 5^2 = 25$.
Krok 2. $2^k > k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$.
Pre $k \geq 5$, t.j. pre $k-1 \geq 4$ platí $(k-1)^2 = k^2-2k+1 \geq 4^2 = 16$.
Z toho dostávame $k^2 \geq 2k+15 > 2k+1$. Potom platí

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Tým pádom je tvrdenie príkladu dokázané. ■

Príklad 1.2.4.
Dokážte, že pre ľubovoľné celé číslo n je číslo $n^2 + n$ deliteľné dvomi.

Riešenie.
Označme $F(n) = n^2 + n$.
Pretože platí $Z = \{-1, -2, -3, \ldots\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, \ldots\}$, dôkaz rozdelíme na tri časti.
a) Pre $n = 0$ platí $F(0) = 0$, t.j. $2 \big| F(0)$.

b) Pre $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ použijeme matematickú indukciu.
Krok 1. $n = 1$: $2 \big| F(1)$, pretože $F(1) = 1 + 1 = 2$.
Krok 2. $\forall k \in N:\ 2 \big| F(k) = k^2 + k \Rightarrow 2 \big| F(k+1) = (k+1)^2 + k + 1$.
Na základe predpokladu platí

$$F(k+1) = (k+1)^2 + k + 1 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = F(k) + 2(k+1).$$

Ak uvážime, že $2 \big| F(k)$ a $2 \big| 2(k+1)$, potom $2 \big| F(k+1)$.
c) Pre $n \in \{-1, -2, -3, \ldots\}$ dokážeme vzťah tiež matematickou indukciou.
Krok 1. $n = -1$: $2 \big| F(-1)$, pretože platí $F(-1) = 1 - 1 = 0$.
Krok 2. $\forall k \in \{-1, -2, -3, \ldots\}:\ 2 \big| F(k) = k^2 + k \ \Rightarrow 2 \big| F(k-1) = (k-1)^2 + k - 1$.
Na základe predpokladu platí

$$F(k-1) = (k-1)^2 + k - 1 = k^2 - 2k + 1 + k - 1 = F(k) - 2k.$$

Posledný súčet je deliteľný dvomi, pretože $2 \big| F(k)$ a $2 \big| 2k$.
Z kroku 1 vyplýva $2 \big| F(-1)$, z kroku 2 vyplýva, že $2 \big| F(-2)$, $2 \big| F(-3)$ atď.
Tým je dôkaz daného tvrdenia ukončený.

Iné riešenie.
Riešenie sa od predchádzajúceho bude líšiť iba v časti c).
Položme $m = -n$, potom $m \in N$ a $F(n) = F(-m) = (-m)^2 - m = m^2 - m$.
Takže môžeme pôvodný problém transformovať na problém dokázať, že pre všetky $m \in N$ je číslo $m^2 - m$ deliteľné dvomi (dokážeme matematickou indukciou). ∎

1.2.4 Poznámka k dôkazom

Nie všetky tvrdenia sa dajú dokázať uvedenými spôsobmi. Niekedy potrebujeme zistiť, či existuje nejaký objekt, potrebujeme zostrojiť konkrétny objekt s danými vlastnosťami alebo na druhej strane chceme ukázať, že nejaká vlastnosť neplatí pre dané prvky.

Na dokázanie pravdivosti výroku, ktorý má tvar $\exists x\ F(x)$, nám stačí nájsť aspoň jeden prvok z oboru úvahy, pre ktorý je vlastnosť F splnená. Preto sa takýmto dôkazom zvykne hovoriť **existenčné dôkazy**.

Na dokázanie pravdivosti výroku $\forall x\ F(x)$, je nutné ukázať, že vlastnosť F je splnená pre všetky prvky x z oboru úvahy. Z ekvivalencie

$$\overline{\forall x\, F(x)} \iff \overline{\forall x}\, F(x) \iff \exists x\, \overline{F(x)}$$

vyplýva, že ak chceme ukázať nepravdivosť pôvodného výroku, stačí nájsť jeden prvok, pre ktorý vlastnosť F splnená nie je. Takýto prvok nazývame **kontrapríklad**.

Často v matematike potrebujeme zostrojiť (skonštruovať) nejaký objekt s danými vlastnosťami, preto takýto postup niekedy nazývame **konštruktívny dôkaz**.

Príklad 1.2.5.
Dokážte, že $\forall n \in N:\ 1+2+3+\cdots+n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.
Riešenie.
Postupnosť $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ je n-členná konečná aritmetická s diferenciou $d = 1$, prvým členom $a_1 = 1$ a posledným členom $a_n = n$. Pre jej súčet platí

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Iné riešenie.
Ak označíme $1+2+3+\cdots+n = s$, potom zrejme $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = s$.
Ak napíšeme tieto súčty pod seba a spočítame po jednotlivých členoch, dostaneme

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n & = & s \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 1 & = & s \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & = & n(n+1) \end{array}$$

Z toho vyplýva $2s = n(n+1)$, t.j. $s = 1+2+3+\cdots+n = (n+1)n/2$.

Iné riešenie.
Najprv spočítame počet dvojprvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.
Usporiadajme tieto podmnožiny nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{array}{lllll} \{1, n+1\}, & \{2, n+1\}, & \{3, n+1\}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \{n, n+1\}, & n \text{ podmnožín}, \\ \{1, n\}, & \{2, n\}, & \{3, n\}, & \ldots\ldots\ldots\ \{n-1, n\}, & n-1 \text{ podmnožín}, \\ \{1, n-1\}, & \{2, n-1\}, & \{3, n-1\}, & \ldots\ldots\ \{n-2, n-1\}, & n-2 \text{ podmnožín}, \\ \ldots\ldots\ldots & & & & \ldots \\ \{1, 3\}, & \{2, 3\}, & & & 2 \text{ podmnožiny}, \\ \{1, 2\}, & & & & 1 \text{ podmnožina}. \end{array}$$

Z toho vyplýva, že dvojprvkových podmnožín je $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$.
Teraz sa pozrieme na tento počet z druhej strany.
Každý z prvkov $1, 2, \ldots, n, n+1$ sa nachádza v n dvojprvkových podmnožinách.
Takže dostávame celkovo $(n+1)n$ dvojprvkových podmnožín. Lenže v tomto počte je každá podmnožina započítaná dvakrát (za každý jej prvok raz). To znamená, že počet dvojprvkových podmnožín je $(n+1)n/2$.
Ak to zhrnieme, dostávame tvrdenie vety $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$.

Iné riešenie.
Dokážeme matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí $F(n) = G(n)$, pričom

$$F(n) = 1 + 2 + \cdots + n, \qquad G(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Krok 1. Tvrdenie $F(1) = G(1)$ platí, pretože $F(1) = 1,\ G(1) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$.

Krok 2. $\forall k \in N\colon\ F(k) = G(k) \Rightarrow F(k+1) = G(k+1)$.

Keďže pre všetky $k \in N$ platí $F(k) = 1 + 2 + \cdots + k = G(k) = \frac{k(k+1)}{2}$, potom

$$F(k+1) = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = [1 + 2 + \cdots + k] + (k+1) = F(k) + (k+1) =$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = G(k+1).$$

Tým je dané tvrdenie na základe princípu matematickej indukcie dokázané. ■

1.2.5 Sumačná a súčinová symbolika

Znak $\sum$ (veľké grécke písmeno sigma) sa používa na zjednodušenie zápisu súčtu s mnohými sčítancami. Súčet s konečným počtom sčítancov $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_n$ a súčet s nekonečným počtom sčítancov $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$, kde s, n sú celé čísla, zapisujeme

$$\sum_{j=s}^{n} a_j = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n, \qquad \sum_{j=s}^{\infty} a_j = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots.$$

Tieto zápisy čítame **suma (súčet) a_j pre $j = s$ až n** a **suma (súčet) a_j pre $j = s$ až do nekonečna**.[5] Písmeno j nazývame **sčítací index**, písmeno s pod znakom sumy sa nazýva **dolná hranica pre sčítanie** a písmeno n, resp. symbol ∞ nad znakom sumy nazývame **horná hranica pre sčítanie**.

Za j dosadzujeme postupne celočíselné hodnoty od dolnej hranice po hornú hranicu (vrátane hraníc). Dolnou hranicou s a hornou hranicou n môžu byť vo všeobecnosti ľubovoľné celé čísla, musí byť ale splnená podmienka $s \leq n$. Nekonečné sumy sa nazývajú **číselné rady** a budeme sa nimi podrobne zaoberať neskoršie.

Na zjednodušenie súčinu používame znak $\prod$ (veľké grécke písmeno pí). Súčin s konečným počtom činiteľov $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_n$ a súčin s nekonečným počtom činiteľov $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots$, kde s, n sú celé čísla, potom zapisujeme

$$\prod_{j=s}^{n} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdots a_n, \qquad \prod_{j=s}^{\infty} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots$$

a čítame **súčin (produkt) a_j pre $j = s$ až n** a **súčin (produkt) a_j pre $j = s$ až do nekonečna**. Písmeno j nazývame **násobiaci index**, písmeno s pod znakom produktu sa nazýva **dolná hranica pre násobenie** a písmeno n, resp. symbol ∞ nad znakom produktu nazývame **horná hranica pre násobenie**.

Príklad 1.2.6.
Pre všetky $n \in N$, $a \in R$ platí $n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,\ \ a^n = \prod_{j=1}^{n} a = a \cdot a \cdot a \cdots a$. ■

Nech $n \in N$, potom súčin $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ nazývame **faktoriál čísla n** a čítame **n faktoriál**. Špeciálne pre $n = 0$ definujeme $0! = 1$.

Cvičenia

1.2.1. Dokážte rôznymi spôsobmi nasledujúce tvrdenia:
a) Pre všetky reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
b) Súčin dvoch nepárnych čísel je číslo nepárne.
c) Súčin dvoch párnych čísel je číslo párne.
d) Súčin dvoch čísel, z ktorých je aspoň jedno párne, je párny.

[5] Niekedy sa namiesto zápisu $\sum_{j=s}^{n} a_j$ používa zápis $\sum_{j=s,s+1,\ldots,n} a_j$, resp. $\sum_{j \in \{s,s+1,\ldots,n\}} a_j$.

e) Súčet dvoch nepárnych čísel je číslo párne.
f) Súčet dvoch párnych čísel je číslo párne.
g) Súčet párneho a nepárnych čísla je číslo nepárne.

1.2.2. Dokážte, že $\sqrt{7}$ je iracionálne číslo.

1.2.3. Dokážte: $\forall a, b \in R\colon\ a \neq b \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$.

1.2.4. Dokážte rôznymi spôsobmi, že pre všetky $n \in N$ platí: $3 \nmid n \Rightarrow 3 \mid (n^2 - 1)$.

1.2.5. Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $2 \mid (n^2 - n)$, b) $3 \mid (2n^3 + n)$, c) $5 \mid (n^5 - n)$, d) $6 \mid (n^3 - n)$,
e) $6 \mid (n^3 + 3n^2 + 2n)$, f) $6 \mid (n^7 - n)$, g) $7 \mid (n^7 - n)$, h) $7 \mid (6^{2n} - 8)$,
i) $2 \mid (3n^2 + 5)$ pre n nepárne, j) $8 \mid (n^2 + 2n)$ pre n párne.

1.2.6. Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$, b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$,
c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$, d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(4j-3)(4j+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

1.2.7. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2j = n(n+1)$, b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$, c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{n} = n$,
d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, e) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 1$, f) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 3^j = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$,
g) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^{-j} = 2 - 2^{-n}$, h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)(2j+1) = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3) + 3}{6}$.

1.2.8. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j (2j-1) = (-1)^n n$, b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$,
c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$,
e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j (2j-1)^2 = \frac{(-1)^n (4n^2-1) - 1}{2}$,
g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n^3+3n^2+2n}{3}$, h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

1.2.9. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 2$ platí:
a) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$,
c) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, d) $2!\ 4!\ 6!\ \ldots (2n)! > [(n+1)!]^n$.

1.2.10. Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 9$ platí $2^n > (n-1)^2(n-2)$.

1.2.11. Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $4 \mid [n^2 + (n+1)^2 - 1]$, b) $9 \mid [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3]$.

1.2.12. Pre všetky $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n$ definujeme **kombinačné číslo n nad k** predpisom $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Kombinačné čísla $\dbinom{n}{0}$, $\dbinom{n}{1}, \ldots, \dbinom{n}{n}$ tvoria postupne prvky n-tého riadku tzv. **Pascalovho trojuholníka** (obr. 1.2.1).
Dokážte priamo a matematickou indukciou:

a) Pre všetky $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n-1$ platí $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

b) Pre všetky $n \in N$, $a, b \in R$ platí **binomická veta** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

c) Pre všetky $n \in N$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

d) Pre všetky $n \in N$, $x \in R$, $x \geq -1$ platí **Bernoulliho nerovnosť** $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{n}{0} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n}{k-1} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k+1} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n}{n} \\
\binom{n+1}{0} \quad \binom{n+1}{1} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n+1}{k} \quad \binom{n+1}{n+1} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Obr. 1.2.1: Pascalov trojuholník.

1.2.13. Dokážte, že pre všetky $n \in N$: a) $73 \,|\, (2^{3n} - 3^{4n})$, b) $31 \,|\, (5^{n+1} + 6^{2n-1})$.

1.2.14. Predpokladajme, že existujú trojhalierové a päťhalierové mince. Dokážte, že každý nákup s cenou viac ako 7 halierov môžeme zaplatiť týmito mincami.

1.2.15. Dokážte pomocou matematickej indukcie:
a) Vypuklý n-uholník má $(n-3)n/2$ uhlopriečok.
b) Súčet vnútorných uhlov vypuklého n-uholníka je $(n-2)\pi$.
c) Súčet vnútorných uhlov ľubovoľného n-uholníka je $(n-2)\pi$.
d) n priamok prechádzajúcich jedným bodom delí rovinu na $2n$ častí.
e) n rovín prechádzajúcich jednou rovinou delí priestor na $2n$ častí.
f) n rovín prechádzajúcich jedným bodom, z ktorých žiadne tri nemajú spoločnú priamku, delí priestor na $n(n-1)+2$ častí.

1.3 Množiny

1.3.1 Množina a podmnožina

Pod pojmom **množina** rozumieme neusporiadaný súbor (skupinu, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...), ktoré nazývame **prvky množiny**. Množiny sa obvykle označujú veľkými písmenami a ich prvky sa ohraničujú zloženými zátvorkami { }.

Ak prvok patrí do danej množiny, vyjadrujeme to symbolom $\in$ a ak nepatrí do danej množiny, vyjadrujeme to symbolom $\notin$.

Množinu považujeme za danú vtedy, ak o každom predmete je určené, či do danej množiny patrí alebo nepatrí, t.j. či je alebo nie je prvkom danej množiny. Formálny zápis

$$A = \{x ;\ \text{podmienky pre } x\}$$

predstavuje množinu A všetkých bodov x, ktoré spĺňajú dané podmienky.

Príklad 1.3.1.
Označme A množinu všetkých prirodzených čísel, pre ktoré platí vzťah $3 < n < 7$.
Množinu A môžeme vyjadriť rôznymi spôsobmi, napr.

$$A = \{4, 5, 6\} = \{n ;\ n \in N \wedge n < 7 \wedge n > 3\} = \{n \in N :\ 3 < n < 7\}\,. \blacksquare$$

Ak má množina konečný počet prvkov, nazýva sa **konečná množina**. Ak nie je konečná, nazýva sa **nekonečná množina**.

Hovoríme, že **množina A je podmnožinou množiny B** ak, každý prvok množiny A patrí aj do množiny B[6] a zapisujeme $A \subset B$.[7] Ak neplatí, že množina A je podmnožinou množiny B, potom hovoríme **množina A nie je podmnožinou množiny B** a zapisujeme $A \not\subset B$.

[6] Analogicky môžeme definovať pojem nadmnožina. Hovoríme, že **množina B je nadmnožinou množiny A**, ak A je podmnožinou množiny B. Označujeme $B \supset A$.

[7] Vzťahy „*je podmnožina*“ a „*je nadmnožina*“ zvykneme nazývať **inklúzia množín**.

Hovoríme, že **množiny A a B sa rovnajú** (**sú totožné**), ak majú tie isté prvky, t.j. ak každý prvok množiny A patrí do množiny B a zároveň každý prvok množiny B patrí do množiny A, píšeme $A = B$. Takže množina A sa rovná množine B práve vtedy, ak $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.

Ak neplatí, že sa množiny A a B rovnajú, hovoríme, že **množiny A a B sú rôzne** (**nerovnajú sa**), vtedy píšeme $A \neq B$. Takže množiny A a B sú rôzne, ak existuje aspoň jeden prvok, ktorý patrí do jednej z množín a nepatrí do druhej. Z toho vyplýva, že **ukázať rovnosť $A = B$** znamená ukázať obidve inklúzie $A \subset B$ a $B \subset A$.

Niekedy sa používajú označenia $A \subseteq B$ alebo $A \subsetneqq B$, aby sme zdôraznili, že môže platiť $A = B$ a naopak označenia $A \subsetneq B$, resp. $A \subsetneqq B$, aby sme vylúčili možnosť $A = B$.

Množinu, ktorá neobsahuje žiadne prvky, nazývame **prázdna množina** a označujeme ju $\emptyset$, prípadne $\{\}$. Musíme si ale uvedomiť, že symbol $\{\emptyset\}$ vyjadruje jednoprvkovú množinu, ktorá ako prvok obsahuje prázdnu množinu. Ďalej si treba uvedomiť, že **prázdna množina je podmnožinou každej množiny** a že je **konečnou množinou**.

Môže sa stať, že prvkami množiny sú opäť množiny, sú to tzv. **systémy množín**. Špeciálny význam má množina všetkých podmnožín danej množiny A, ktorú nazývame (**potenčná množina množiny A**) a označujeme 2^A, t.j. $2^A = \{B\,;\, B \subset A\}$.

Príklad 1.3.2.
Potenčnou množinou množiny $X = \{0, 1, 2\}$ je množina

$$2^X = \{A\,;\, A \subset X\} = \{\emptyset,\, \{0\}\,,\, \{1\}\,,\, \{2\}\,,\, \{0,1\}\,,\, \{0,2\}\,,\, \{1,2\}\,,\, X\}\,. \blacksquare$$

1.3.2 Operácie s množinami

- **Prienik dvoch množín**

Prienikom množín A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň do množiny B, t.j. $A \cap B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \in B\}$.

Ak pre množiny A, B platí $A \cap B = \emptyset$, potom ich nazývame **disjunktné**.

- **Zjednotenie dvoch množín**

Zjednotením (**súčtom**) **množín A a B** nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A alebo do množiny B, t.j. $A \cup B = \{x\,;\, x \in A \vee x \in B\}$.

- **Rozdiel dvoch množín**

Rozdielom množín A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň nepatriace do množiny B, t.j. $A - B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \notin B\}$.

- **Symetrický rozdiel dvoch množín**

Symetrickým rozdielom množín A a B nazývame $(A - B) \cup (B - A)$, t.j. množinu

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{x\,;\, x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}\,.$$

- **Doplnok množiny**

Nech pre množiny A, X platí $A \subset X$, potom **doplnkom** (**doplnkovou množinou**, **komplementom**, **komplementárnou množinou**) **množiny A do množiny X** nazývame množinu $A' = X - A$. Niekedy sa zvykne doplnok tiež označovať A^c, $\overline{A}$, resp. A'_X (aby sa zdôraznil doplnok do množiny X).

Množiny A a A' sa nazývajú **doplnkové** (**komplementárne**) **vzhľadom na množinu X**. Symbolicky môžeme písať $A' = X - A = \{x\,;\, x \in X \wedge x \notin A\} = \{x \in X\,;\, x \notin A\}$.

Poznámka 1.3.1.
Z uvedeného vyplýva, že každý prvok $x \in X$ patrí do práve jednej z množín A, A'.
Nech $X \neq \emptyset$, $A \subset X$, $B \subset X$, potom $A - B = A \cap B'$ (obr. 1.3.2). Vyplýva to zo vzťahov

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \;\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \in B') \;\Leftrightarrow\; x \in (A \cap B').$$

- **Karteziánsky súčin množín**

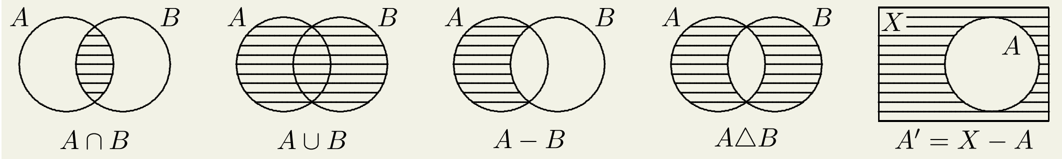
Usporiadaná dvojica $[x; y]$ prvkov x a y je dvojica prvkov x a y, v ktorej záleží na ich poradí. Usporiadané dvojice $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$ sa **rovnajú**, ak platí $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Podobne pre $n \in N$ nazývame prvok $[x_1; x_2; \ldots; x_n]$ **usporiadaná n-tica**.

Karteziánskym súčinom množín A a B nazývame $A \times B = \{[x; y]\,;\, x \in A,\, y \in B\}$. Analogicky definujeme **karteziánsky súčinom množín A_1, A_2, ... A_n** ako množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[x_1; \ldots; x_n]\,;\, x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}\,.$$

Pre $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ zjednodušene píšeme $A \times A \times \cdots \times A = A^n$.

Množinové operácie (prienik, zjednotenie, ...) majú podobné vlastnosti ako logické operácie (konjunkcia, disjunkcia, ...).



Obr. 1.3.2: Prienik, zjednotenie, rozdiel, symetrický rozdiel a doplnok množín.

Veta 1.3.1.
Pre všetky množiny A platí: a) $A \cup \emptyset = A$, b) $A \cap \emptyset = \emptyset$, c) $\emptyset - A = \emptyset$.

Dôkaz.
Tvrdenia sú zrejmé a vyplývajú priamo z definície.
$A\cup\emptyset=\{x\,;\,x\in A\vee x\in\emptyset\}=\{x\,;\,x\in A\}=A$, $A\cap\emptyset=\{x\,;\,x\in A\wedge x\in\emptyset\}=\{x\,;\,x\in\emptyset\}=\emptyset$, $\emptyset-A=\{x\,;\,x\in\emptyset\wedge x\notin A\}=\{x\,;\,x\in\emptyset\}=\emptyset$. ■

Veta 1.3.2.
Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny, potom platí:
a) $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$, $A\triangle B=B\triangle A$,
b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
c) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Dôkaz.
a) Vyplýva z definície.
b) Z asociatívnych zákonov pre $\wedge$ a $\vee$ vyplýva
$x\in[A\cap(B\cap C)] \Leftrightarrow [x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)] \Leftrightarrow [(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C] \Leftrightarrow x\in[(A\cap B)\cap C]$,
$x\in[A\cup(B\cup C)] \Leftrightarrow [x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)] \Leftrightarrow [(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C] \Leftrightarrow x\in[(A\cup B)\cup C]$.
c) Z distributívnych zákonov pre $\wedge$ a $\vee$ vyplýva

$$\begin{aligned} x\in[A\cap(B\cup C)] &\Leftrightarrow [x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)] \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow [(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)] \Leftrightarrow x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)],\\ x\in[A\cup(B\cap C)] &\Leftrightarrow [x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)] \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow [(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)] \Leftrightarrow x\in[(A\cup B)\cap(A\cup C)]. \end{aligned}$$ ■

Veta 1.3.3.
Nech množina $X\neq\emptyset$ a nech $A,B\subset X$. Označme $(A')'=A''$, potom platí:
a) $(A\cap B)'=A'\cup B'$, $(A\cup B)'=A'\cap B'$, b) $X'=\emptyset$, $\emptyset'=X$, c) $A''=A$.

Dôkaz.
a) Tieto rovnosti nazývame **de Morganove zákony** a vyplývajú zo vzťahov:
$x\in(A\cap B)' \Leftrightarrow \text{non }(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B \Leftrightarrow x\in A'\vee x\in B' \Leftrightarrow x\in(A'\cup B')$.
$x\in(A\cup B)' \Leftrightarrow \text{non }(x\in A\vee x\in B) \Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A'\wedge x\in B' \Leftrightarrow x\in(A'\cap B')$.
b) Vyplýva zo vzťahov $x\in X' \Leftrightarrow x\notin X \Leftrightarrow x\in\emptyset$ a $x\in\emptyset' \Leftrightarrow x\notin\emptyset \Leftrightarrow x\in X$.
c) Z poznámky 1.3.1 vyplýva $x\in(A')' \Leftrightarrow x\notin A' \Leftrightarrow x\in A$. ■

Poznámka 1.3.2.
Pre konečný systém množín A_1, A_2, …, A_n, $n\in N$ a pre nekonečný systém množín A_1, A_2, A_3, … majú de Morganove zákony tvar:

$$\left[\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right]'=\bigcup_{k=1}^{n}A_k',\quad \left[\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right]'=\bigcap_{k=1}^{n}A_k',\quad \left[\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right]'=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k',\quad \left[\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right]'=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k'.$$

1.3.3 Zobrazenie množín

Nech $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ sú množiny. **Binárnou reláciou medzi množinami A a B** nazývame každú podmnožinu karteziánskeho súčinu $A\times B$. Slovo binárna sa v praxi často vynecháva. Ak označíme túto reláciu T, potom skutočnosť, že prvok $[x;y]$ patrí do relácie T, zapisujeme vzťahmi $[x;y]\in T$, resp. xTy.

Medzi najdôležitejšie binárne relácie patrí relácia ekvivalencie.[8] Hovoríme, že binárna relácia $T\subset A\times A$ je **reláciou ekvivalencie na množine A**, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna na množine A, t.j. ak platí:
a) $\forall x\in A$: $[x;x]\in T$ (reflexívnosť),
b) $\forall x,y\in A$: $[x;y]\in T \Leftrightarrow [y;x]\in T$ (symetria),
c) $\forall x,y,z\in A$: $[[x;y]\in T\wedge[y;z]\in T] \Rightarrow [x;z]\in T$ (tranzitívnosť).

[8]Je potrebné ju odlišovať od logickej operácie ekvivalencie.

Poznámka 1.3.3.
Ak použijeme označenie xTy, môžeme tieto vlastnosti symbolicky zapísať v tvare:

$$\forall x, y, z \in A: \quad \text{a) } xTx, \quad \text{b) } xTy \Leftrightarrow yTx, \quad \text{c) } [xTy \wedge yTz] \Rightarrow xTz.$$

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem zobrazenia (v matematickej analýze sa uprednostňuje názov funkcia). Nech $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ sú množiny. **Zobrazením** (**funkciou**) **z množiny** A **do množiny** B nazývame každú reláciu $f \subset A \times B$ s vlastnosťou, že pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x; y] \in f$.

Prvok $x \in A$ sa nazýva **vzor** a príslušné $y = f(x)$ sa nazýva **obraz prvku** x **v zobrazení** f, resp. **hodnota zobrazenia** f **v bode** x. Často, najmä ak hovoríme o reálnych funkciách, vzor nazývame **nezávislou premennou** a obraz **závislou premennou**., resp. **funkčnou hodnotou v bode** x.

Množinu $D(f)$ všetkých vzorov $x \in A$, pre ktoré existuje $y = f(x) \in B$, nazývame **definičný obor zobrazenia** f. Množinu $H(f)$ všetkých obrazov $y \in B$, pre ktoré existuje vzor $x \in A$ taký, že $y = f(x)$, nazývame **obor hodnôt zobrazenia** f. To znamená, že

$$D(f) = \{x \in A\,;\, \exists y \in B\colon\ [x;y] \in f\}, \qquad H(f) = \{y \in B\,;\, \exists x \in D(f)\colon\ [x;y] \in f\}.$$

Namiesto zápisu $[x; y] \in f$ sa častejšie používajú zápisy $f\colon\ x \mapsto y$, resp. $y = f(x)$, resp. $y = f(x)\colon\ D(f) \to B$.

Ak ku každému $x \in A$ existuje obraz $y \in B$, t.j. ak $D(f) = A$, potom zobrazenie f nazývame **zobrazenie množiny** A **do množiny** B (**zobrazenie zobrazujúce množinu** A **do množiny** B) a označujeme $y = f(x)\colon\ A \to B$, resp. $f\colon\ A \to B$.

Nech $C \subset D(f)$, potom množinu $f(C) = \{f(x)\,;\, x \in C\}$ nazývame **obraz množiny** C **v zobrazení** f.

Poznámka 1.3.4.
Ak máme zobrazenie zadané iba predpisom, napr. $y = f(x)$, potom pod pojmom $D(f)$ rozumieme množinu všetkých x, pre ktoré existuje $y = f(x)$ (t.j. maximálnu možnú množinu vzorov). Obor hodnôt je množina $H(f) = \{f(x)\,;\, x \in D(f)\}$, takže zápis $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a zápis $y = f(x)\colon\ D(f) \to H(f)$ sú ekvivalentné.

Príklad 1.3.3.
a) Relácia $f = \{[x; y] \in R^2\,;\, \sin y = x\}$ nie je zobrazenie, pretože $[0; 0] \in f$, $[0; \pi] \in f$. To znamená, že jeden vzor $x = 0$ má dva obrazy $y = 0$ a $y = \pi$.

b) Relácia $f = \{[x; y] \in R^2\,;\, x^2 + y^2 = -1\}$ je zobrazenie, pretože $f = \emptyset$ a $\emptyset \subset R^2$. Usporiadaná dvojica $[x; y]$ s danými vlastnosťami neexistuje, t.j. každému vzoru je priradený najviac jeden obraz. ■

- **Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenie**

Hovoríme, že zobrazenie $f\colon\ A \to B$ je **injektívne** (**injekcia**, **prosté zobrazenie**), ak dva rôzne vzory z množiny A majú rôzne obrazy z množiny B, t.j. ak rovnaké obrazy majú rovnaké tiež príslušné vzory (obrátená implikácia). Symbolicky to môžeme vyjadriť

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2), \quad \text{t.j.} \quad \forall x_1, x_2 \in A\colon\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2.$$

Hovoríme, že zobrazenie $f\colon\ A \to B$ je **surjektívne** (**surjekcia**, **zobrazenie na množinu** B), ak ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A, t.j. ak $f(A) = B$. To znamená, ak $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$.

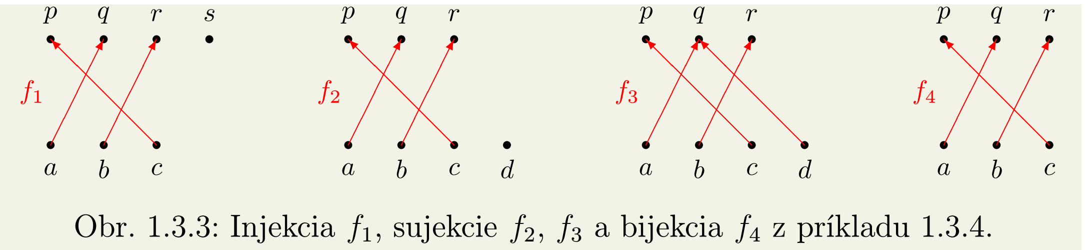
Hovoríme, že zobrazenie $f\colon\ A \to B$ je **bijektívne** (**bijekcia**, **prosté zobrazenie na množinu** B, **jednojednoznačné zobrazenie**), ak je injektívne a zároveň surjektívne.

Príklad 1.3.4.
a) Nech $A = \{a, b, c\}$, $B = \{p, q, r, s\}$. Zobrazenie $f_1 = \{[a; q], [b; r], [c; p]\}$ je injekcia, ale nie je surjekcia, pretože s nemá vzor (obr. 1.3.3).

b) Nech $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{p, q, r\}$. Zobrazenie $f_2 = \{[a; q], [b; r], [c; p]\}$ je surjekcia, ale nie je injekcia (d nemá obraz).

c) Nech $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{p, q, r\}$. Zobrazenie $f_3 = \{[a; q], [b; r], [c; p], [d; q]\}$ je surjekcia, ale nie je injekcia (a, d majú rovnaký obraz).

d) Nech $A = \{a, b, c\}$, $B = \{p, q, r\}$. Zobrazenie $f_4 = \{[a; q], [b; r], [c; p]\}$ je bijekcia (injekcia a súčasne surjekcia). ■



Obr. 1.3.3: Injekcia f_1, sujekcie f_2, f_3 a bijekcia f_4 z príkladu 1.3.4.

Príklad 1.3.5.
Uvažujme zobrazenie dané predpisom $f(x) = \sqrt{x}$. Jeho definičným oborom je množina $D(f) = \langle 0\,;\,\infty)$ a oborom hodnôt množina $H(f) = \langle 0\,;\,\infty)$. Zobrazenie je bijekcia a môžeme ho zapísať v tvare $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$, resp. $f(x) = \sqrt{x}\colon\ \langle 0\,;\,\infty) \to \langle 0\,;\,\infty)$.
Teraz uvažujme rôzne množiny vzorov a obrazov:

$f\colon\ R \to R$ Zobrazenie nie je injektívne ani surjektívne ($x = -1$ nemá obraz, $y = -1$ nemá vzor).
$f\colon\ \langle 0\,;\,4\rangle \to \langle 0\,;\,1\rangle$ Zobrazenie nie je injektívne, je surjektívne ($x = 3$ nemá obraz).
$f\colon\ \langle 0\,;\,2\rangle \to \langle 0\,;\,4\rangle$ Zobrazenie je injektívne, nie je surjektívne ($y = 3$ nemá vzor).
$f\colon\ \langle 0\,;\,4\rangle \to \langle 0\,;\,2\rangle$ Zobrazenie je bijektívne. ∎

• Rovnosť zobrazení

Zobrazenia sú množiny usporiadaných dvojíc, takže ich rovnosť musíme chápať ako rovnosť množín. Inými slovami $f = g$ práve vtedy, ak platí: $[x;y] \in f \Leftrightarrow [x;y] \in g$.

Ak to zhrnieme pre zobrazenia $f(x)$, $x \in D(f)$ a $g(x)$, $x \in D(g)$, dostávame, že **zobrazenie f sa rovná zobrazeniu g** práve vtedy, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Nech $M \subset D(f) \cap D(g)$, potom **zobrazenie f, $x \in D(f)$ sa rovná zobrazeniu g, $x \in D(g)$ na množine M** práve vtedy, ak pre všetky $x \in M$ platí $f(x) = g(x)$.

Príklad 1.3.6.
a) Zobrazenia $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|^2$ sa rovnajú na množine R, pretože $D(f) = D(g) = R$ a pre všetky $x \in R$ platí $x^2 = |x|^2$.
b) Zobrazenia $f(x) = 1$, $g(x) = \dfrac{x}{x}$ sa nerovnajú, pretože $D(f) = R$, $D(g) = R - \{0\}$. ∎

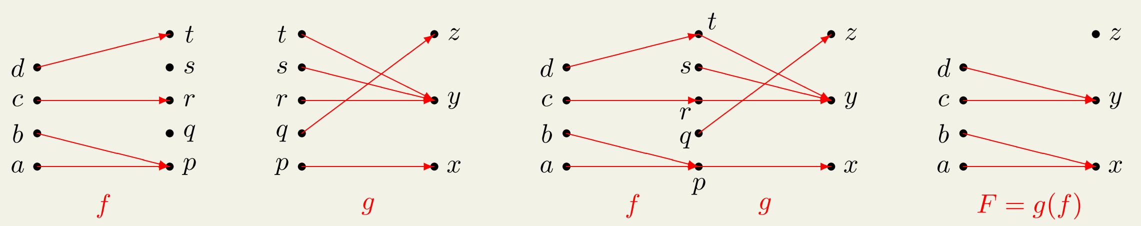
• Zložené zobrazenie

Nech sú dané zobrazenia $f\colon\ A \to B$, $g\colon\ C \to D$, pričom $H(f) \subset C$. Potom zobrazenie $F\colon\ A \to D$ ktoré každému $x \in A$ priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, nazývame **zložené zobrazenie** (**kompozícia**, resp. **zloženie**) **zobrazení f a g**. Zložené zobrazenie zapisujeme $F = g(f) = f \circ g$, resp. $F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x)$, $x \in D(f)$.

Zobrazenie f sa nazýva **vnútorná zložka** a zobrazenie g **vonkajšia zložka** zloženého zobrazenia $g(f)$.

Príklad 1.3.7.
Nech $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$, $C = \{x, y, z\}$ sú množiny. Nájdite zložené zobrazenie $F = g[f]\colon\ A \to C$, ak zobrazenia $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ (obr. 1.3.4) sú definované predpismi $f = \{[a;p], [b;p], [c;r], [d;t]\}$ a $g = \{[p;x], [q;z], [r;y], [s;y], [t;y]\}$.

Riešenie.
Zložené zobrazenie $F = \{[a;x], [b;x], [c;y], [d;y]\}$, pretože $F(a) = g[f(a)] = g(p) = x$,
$F(b) = g[f(b)] = g(p) = x$, $F(c) = g[f(c)] = g(r) = y$, $F(d) = g[f(d)] = g(t) = y$. ∎



Obr. 1.3.4: Zložené zobrazenie $F = g(f)$ z príkladu 1.3.7.

Príklad 1.3.8.
Ak $f(x) = x^3\colon R \to R$, $g(x) = \sin x\colon R \to \langle -1\,;\,1\rangle$, potom
$f[g(x)] = [g(x)]^3 = \sin^3 x\colon\ R \to \langle -1\,;\,1\rangle$, $g[f(x)] = \sin f(x) = \sin x^3\colon\ R \to \langle -1\,;\,1\rangle$. ∎

Veta 1.3.4.
Ak sú $f\colon\ A \to B$, $g\colon\ B \to C$ bijekcie, potom je bijekciou tiež $F = g[f]\colon\ A \to C$.

Dôkaz.
Injekcia.
Zobrazenia f, g sú injektívne, t.j. pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ platí
$$x_1 \neq x_2 \implies y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2) \implies z_1 = g(y_1) \neq z_2 = g(y_2).$$
z toho vyplýva $z_1 = g(y_1) = g[f(x_1)] = F(x_1) \neq z_2 = g(y_2) = g[f(x_2)] = F(x_2)$.
Surjekcia.
Zobrazenia g, f sú surjektívne, t.j. $\forall z \in C\ \exists y \in B\colon\ z = g(y)$ a $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$.
Ak to spojíme, dostávame $\forall z \in C\ \exists x \in A\colon\ z = g(y) = g[f(x)] = F(x)$. ∎

- **Inverzné a identické zobrazenie**

Ak je zobrazenie $y = f(x)\colon\ A \to B$ bijektívne, t.j. ak

$$\forall\,[x_1; y_1]\,,[x_2; y_2] \in f\colon\ y_1 = y_2 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2, \qquad \forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ [x; y] \in f,$$

potom existuje zobrazenie $x = g(y)\colon\ B \to A$ také, že platí $[x; y] \in f \ \Leftrightarrow\ [y; x] \in g$. Toto zobrazenie sa nazýva **inverzným zobrazením k zobrazeniu** f a označuje sa f^{-1}.

Poznámka 1.3.5.
Ak je zobrazenie $f\colon D(f) \to H(f)$ injektívne, potom je zároveň aj surjektívne (t.j. je bijektívne), pretože platí $f[D(f)] = H(f)$. Inverznou funkciou k f je bijekcia $f^{-1}\colon H(f) \to D(f)$ taká, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $y = f(x)$, resp. pre všetky $y \in H(f)$ platí $x = f^{-1}(y)$. Je zrejmé, že $D(f) = H(f^{-1})$, $H(f) = D(f^{-1})$.

Príklad 1.3.9.
a) Ak $f(x) = x\colon R \to R$, t.j. $[x; x] \in f$, potom $[x; x] \in f^{-1}$, t.j. $f^{-1}(x) = x\colon R \to R$.
b) Ak $f(x) = 2x + 3\colon R \to R$, t.j. $[x; 2x + 3] \in f$, potom $[y; x] = [2x + 3; x] \in f^{-1}$.
Z rovnosti $y = 2x + 3$ vyplýva $x = (y - 3)/2$, t.j. $[y; (y - 3)/2] \in f^{-1}$.
c) Ak $f(x) = \operatorname{cotg} x\colon\ (0\,;\,\pi) \to R$, potom $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x\colon R \to (0\,;\,\pi)$. ■

Veta 1.3.5.
Nech zobrazenie $f\colon\ A \to B$ je bijektívne, potom platí:

a) $f^{-1}\colon\ B \to A$ je bijektívne,
b) $(f^{-1})^{-1} = f$,
c) $\forall y \in B\colon\ f[f^{-1}(y)] = y$,
d) $\forall x \in A\colon\ f^{-1}[f(x)] = x$.

Dôkaz.
a) Vyplýva z definície.
b) Zobrazenia $f\colon\ A \to B$, $f^{-1}\colon\ B \to A$ sú bijektívne, t.j. pre všetky $x \in A$, $y \in B$ platí

$$[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}, \qquad [y; x] \in f^{-1} \ \Leftrightarrow\ [x; y] \in (f^{-1})^{-1},$$

Z toho vyplýva $[x; y] \in f \ \Leftrightarrow\ [x; y] \in (f^{-1})^{-1}$, t.j. $f = (f^{-1})^{-1}$.
c) Ak $y \in B$, potom existuje $x \in A$ také, že $[x; y] \in f$, $[y; x] \in f^{-1}$, t.j. $x = f^{-1}(y)$. Potom

$$[x; y] = \left[f^{-1}(y); y\right] \in f, \qquad \text{t.j. } \ y = f[f^{-1}(y)].$$

d) Ak $x \in A$, potom existuje $y \in B$ také, že $[y; x] \in f^{-1}$, $[x; y] \in f$, t.j. $y = f(x)$. Potom

$$[y; x] = [f(x); x] \in f^{-1}, \qquad \text{t.j. } \ x = f^{-1}[f(x)].\ ■$$

Identickým zobrazením (**identitou**) nazývame zobrazenie, v ktorom sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom, t.j. zobrazenie $f(x) = x$, $x \in D(f)$. Je zrejmé, že identické zobrazenie je injektívne a zároveň surjektívne, t.j. bijektívne.

- **Postupnosť**

Postupnosťou nazývame ľubovoľné zobrazenie f s definičným oborom N, t.j.

$$f = \{[n; f(n)]\ ;\ n \in N\} = \{[1; f(1)]\,,\ [2; f(2)]\,,\ [3; f(3)]\,,\ \ldots,\ [n; f(n)]\,,\ \ldots\}\,.$$

Pre jednoduchosť označíme $f(n) = a_n$, $n \in N$ a postupnosť f budeme zapisovať

$$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots\} = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

Hodnoty a_n, $n \in N$ nazývame **členmi postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Každý člen a_n predstavuje usporiadanú dvojicu $[n; a_n]$. To znamená, že vzor člena a_n je určený jeho poradím.

Obor hodnôt $H(f)$, t.j. množinu hodnôt, ktoré nadobúdajú členy $a_1, a_2, a_3, \ldots$, nazývame **množina hodnôt postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1.3.4 Mohutnosť množín

Hovoríme, že **množina A je ekvivalentná s množinou B**, ak existuje bijektívne zobrazenie $f\colon\ A \to B$. Tento vzťah označujeme $A \sim B$. Skutočnosť, že množiny A a B nie sú ekvivalentné, označujeme $A \not\sim B$.

Ak sú množiny A a B ekvivalentné, hovoríme tiež, že **množiny A a B majú rovnakú mohutnosť**. V prípade, že existuje injektívne zobrazenie $A \to B$, ale neexistuje bijektívne zobrazenie $A \to B$, hovoríme, že **množina A má menšiu mohutnosť ako množina B**.

Príklad 1.3.10.
a) Pre množiny $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{a,\ b,\ c\}$ platí $A \sim B$. Bijekciou je napríklad zobrazenie $f = \{[1; a]\,,\ [2; b]\,,\ [3; c]\}$.
b) Pre množiny prirodzených a celých čísel platí $N \sim Z$. Dokazuje to bijekcia $f\colon\ N \to Z$ definovaná vzťahmi $f(n) = n/2$ pre $n \in N$ párne a $f(n) = -(n-1)/2$ pre $n \in N$ nepárne.
c) $N \not\sim R$, pretože neexistuje bijekcia $N \to R$ (N má menšiu mohutnosť ako R).
d) $(-\pi\,;\,\pi) \sim R$, pretože zobrazenie $f(x) = 2\operatorname{tg} x\colon\ (-\pi\,;\,\pi) \to R$ je bijekcia. ■

Množina A sa nazýva **nekonečne spočítateľná**, ak je ekvivalentná s množinou prirodzených čísel, t.j. ak $A \sim N$. Ak je množina A nekonečne spočítateľná alebo konečná, potom ju nazývame **spočítateľná**. V opačnom prípade, t.j. ak nie je spočítateľná, ju nazývame **nespočítateľná** a hovoríme, že **má mohutnosť kontinua**.

Poznámka 1.3.6.
Množina A môže byť konečná alebo nekonečná, resp. na druhej strane spočítateľná alebo nespočítateľná (viď tab. 1.3.4).
Množina A je konečná práve vtedy, ak je prázdna (t.j. $A = \emptyset$) alebo je konečne spočítateľná (t.j. $A \sim \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$, kde $n \in N$). Keď nie je konečná, potom je nekonečne spočítateľná (t.j. $A \sim N = \{1,\, 2,\, 3,\, \ldots\}$) alebo je nespočítateľná.

$$\text{množina} \left\{ \begin{array}{l} \text{konečná} \left\{ \begin{array}{l} \text{prázdna} \\ \text{konečne spočítateľná} \end{array} \right. \\ \\ \text{nekonečná} \left\{ \begin{array}{l} \text{nekonečne spočítateľná} \\ \text{nespočítateľná} \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{prázdna} + \text{konečne spočítateľná} \\ + \text{nekonečne spočítateľná} \end{array} \right\} \text{spočítateľná} \\ \left. \begin{array}{l} \text{spočítateľná} \\ \text{nespočítateľná} \end{array} \right\} \text{množina} \end{array}$$

Tab. 1.3.4: Konečná, nekonečná, spočítateľná, nespočítateľná množina.

Príklad 1.3.11.
a) Množina celých čísel Z je spočítateľná. Vyplýva to z príkladu 1.3.10.
b) Množina párnych prirodzených čísel je spočítateľná, t.j. $\{2n\,;\, n \in N\} \sim N$. Danou bijekciou je napríklad zobrazenie $f\colon N \to \{2n\,;\, n \in N\}$ dané predpisom $f(n) = 2n$.
c) Množina hodnôt ľubovoľnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je spočítateľná. ■

Veta 1.3.6.
Ak sú množiny A, B spočítateľné, potom sú spočítateľné tiež množiny $A \cup B$, $A \times B$ a každá podmnožina $C \subset A$.

Príklad 1.3.12.
a) Množiny $N \times N = \{[n_1; n_2]\,;\, n_1, n_2 \in N\}$, $Q = \{m/n\,;\, m \in Z, n \in N\}$ sú spočítateľné.
Bijekciou $F\colon N \times N \to Q$ je napríklad $F([n_1; n_2]) = f(n_1)/n_2$, pričom $f(n_1) = n_1/2$ pre n_1 párne a $f(n_1) = -(n_1-1)/2$ pre n_1 nepárne.
b) Nespočítateľné sú napríklad $(a\,;\, b)$, $\langle a\,;\, b)$, $(a\,;\, b\rangle$, $\langle a\,;\, b\rangle$, R, R^3, $I = R - Q$. ■

Cvičenia

1.3.1. Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $A, B, C \subset X$ platí:
a) $[(A \cap C) - B] \cup [(A \triangle B) - C] = \{[A \triangle B] \cup [C \cap (A - B)]\} - [B \cap (C - A)]$,
b) $[(A \cap C) - B] \cup [(A \triangle B) - C] \subset (A - B) \cup (A \cup C)'$.

1.3.2. Nech $A = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$, $B = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}$. Nájdite potenčné množiny 2^A a 2^B.

1.3.3. Nech $n \in N$ a nech $A_n = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$. Koľko prvkov a koľko podmnožín majú množiny A_n, A_n^2, A_n^3, $\ldots$, A_n^k, kde $k \in N$?

1.3.4. Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C \subset X$. Ktoré z uvedených vzťahov sú pravdivé:

a) $A \subset (A \cap B)$,	b) $A \subset (A \cup B)$,	c) $(A - B) \subset A$,
d) $(A - B) \subset B$,	e) $(A - B) \cup B = B$,	f) $(A - B) \cap B = B$,
g) $(A - B) \cup A = A$,	h) $(A - B) \cap A = A$,	i) $(A - B) \cup B = A$,
j) $(A - B) \cap B = A$,	k) $(A - B) \cap A = B$,	l) $(A - B) \cap B = \emptyset$.

1.3.5. Nech $X \neq \emptyset$ a nech pre množiny $A, B, C, D \subset X$ platia vzťahy $A \cup B' \subset C$, $(A \cap B)' \cup D = A' \cup B$. Zistite, ktoré z množín $A' \cup C$, $B \cup (D - A)'$, $D \triangle (A \cap C)$, $(D - B)'$ sú za tohto predpokladu viazané vzťahom inklúzie alebo rovnosti množín.

1.3.6. Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C \subset X$. Označme $P = [A \triangle (B' - C')] \cap (A \cup B)$, $Q = [A \cup (B' \cap C)] \triangle (B \cup C)'$ a $R = [A - (B' \triangle C)'] \cap (B' \cup C)$. Zistite, či existuje medzi niektorými z množín P, Q, R vzťah inklúzie alebo rovnosti.

1.3.7. Nech $X \neq \emptyset$ a nech pre $A, B, C, D \subset X$ platí $(A \triangle B) \subset (C - D)$, $(A \cap D') \cap [A \cup (C \triangle D)] = \emptyset$. Čo môžeme tvrdiť o vzájomných vzťahoch medzi množinami $A \cup B$, $B \cap D'$ a $A \triangle C$?

1.3.8. Nech $A = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$, $B = \{a,\, b,\, c\}$, $C = \{1,\, 5,\, a,\, b,\, h\}$. Napíšte všetky prvky množín $A \times B$, $A \times C$, $A \times B \times C$.

1.3.9. Nech $A=\{x\colon x\in N, x<16\}$ a nech $A_2, A_3, A_5 \subset A$ sú také, že A_2 obsahuje všetky párne čísla, A_3 obsahuje všetky čísla deliteľné tromi a A_5 obsahuje všetky čísla deliteľné piatimi. Určte nasledujúce množiny:

a) $A_2-A_3,\ \ A_2-A_5,\ \ A_3-A_5$,
b) $A_3-A_2,\ \ A_5-A_2,\ \ A_5-A_3$,
c) $A_2\cup A_3,\ \ A_2\cup A_5,\ \ A_3\cup A_5$,
d) $A_2\cap A_3,\ \ A_2\cap A_5,\ \ A_3\cap A_5$,
e) $A_2\cap A_3\cap A_5,\ \ A_2\cup A_3\cup A_5$,
f) $A_2\triangle A_3,\ \ A_2\triangle A_5,\ \ A_3\triangle A_5$,
g) $(A_2\cap A_3)\cup A_5,\ \ (A_2\cup A_3)\cap A_5$,
h) $(A_2\cap A_5)\cup A_3,\ \ (A_2\cup A_5)\cap A_3$,
i) $(A_3\cap A_5)\cup A_2,\ \ (A_3\cup A_5)\cap A_2$,
j) $(A_3-A_5)\cup A_2,\ \ (A_3-A_5)\cap A_2$,
k) $(A_2\cap A_5)\cup(A_3\cap A_5)$,
l) $(A_2-A_3)\cup(A_3-A_2)$,
m) $(A_2\cup A_3)-(A_2\cap A_3)$,
n) $(A_2\cup A_3)\cap(A_3\cup A_5)$.

1.3.10. Graficky znázornite množiny a) — n) z príkladu 1.3.9.

1.3.11. Nech $X\neq\emptyset$. Dokážte, že pre všetky $A,B,C,D\subset X$ platí:

a) $A\subset B \ \Leftrightarrow\ A\cup B=B$,
b) $A\subset B \ \Leftrightarrow\ A\cap B=A$,
c) $A\subset B \ \Leftrightarrow\ A-B=\emptyset$,
d) $A\subset (A\cup B),\ \ (A\cap B)\subset A$,
e) $A\subset C, B\subset D \ \Rightarrow\ (A\cup B)\subset(C\cup D)$,
f) $A\subset C, B\subset D \ \Rightarrow\ (A\cap B)\subset(C\cap D)$,
g) $A\subset C, B\subset C \ \Rightarrow\ (A\cup B)\subset C$,
h) $A\subset B, A\subset C \ \Rightarrow\ A\subset(B\cap C)$,
i) $A\subset B \ \Rightarrow\ (C-B)\subset(C-A)$,
j) $A\subset B \ \Rightarrow\ (A-C)\subset(B-C)$.

1.3.12. Nech $X\neq\emptyset$. Dokážte, že pre všetky $A,B,C\subset X$ platí:

a) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$,
b) $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$,
c) $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$,
d) $A\triangle(A\cap B)=A-B$,

1.3.13. Nech $X\neq\emptyset$ a nech $A,B,C,D\subset X$. Zistite, ktoré z rovností sú pravdivé:

a) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$,
b) $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$.

1.3.14. Uvažujme množiny $A=\{1,2,3,5,7\}$, $B=\{1,3,7,9\}$. Rozhodnite, či množiny:

a) $f_1=\{[1;1]\,,\,[1;3]\,,\,[3;1]\}$,
b) $f_2=\{[2;3]\,,\,[3;2]\,,\,[1;7]\,,\,[7;9]\}$,
c) $f_3=\{[1;1]\,,\,[3;3]\,,\,[7;7]\,,\,[7;9]\}$,
d) $f_4=\{[1;1]\,,\,[1;3]\,,\,[1;7]\,,\,[1;9]\}$

sú reláciami medzi A a B, resp. B a A. Zistite, v ktorých prípadoch sú zobrazením.

1.3.15. Uvažujme reláciu $f=\{[x;\,y]\in R\times R\,;\ x^2-4y^2=0\}$. Rozhodnite, ktoré z usporiadaných dvojíc $[1;2]$, $[2;1]$, $[1;1]$, $[-1;2]$, $[-2;1]$, $[1;-2]$, $[2;-1]$, $[-1;1]$, $[-2;-1]$ patria do relácie f.

1.3.16. Nech je daná množina $A=\{a,b,c,d,e\}$. Definujte reláciu $f\in A^2$ tak, aby bola:

a) reflexívna, symetrická a tranzitívna,
b) reflexívna, symetrická, nie tranzitívna,
c) reflexívna, tranzitívna, nie symetrická,
d) symetrická, tranzitívna, nie reflexívna.

1.3.17. Nech A je množina všetkých priamok v rovine. Určte, či sú ekvivalenciami relácie:

a) rovnobežnosť dvoch priamok,
b) kolmosť dvoch priamok.

1.3.18. Dokážte, že platia nasledujúce ekvivalencie množín:

a) $(0\,;\,1)\sim(0\,;\,1\rangle$,
b) $(0\,;\,1\rangle\sim\langle 0\,;\,1\rangle$,
c) $(0\,;\,1)\sim(-1\,;\,1\rangle$,
d) $(0\,;\,1)\sim R^3$,
e) $(0\,;\,1\rangle\sim\langle 0\,;\,1)$,
f) $(0\,;\,1)\sim\langle 0\,;\,1\rangle$,
g) $R\sim I$,
h) $R\sim R^2$.

1.3.19. Rozhodnite, ktoré z množín sú spočítateľné a ktoré nespočíateľné:

a) $(0\,;\,1)\cap Q$,
b) $(0\,;\,1)\cap I$,
c) $\langle 0\,;\,1\rangle\times\{0,1\}$,
d) $\langle 0\,;\,1\rangle\times Q$.

1.3.20. Nech A je spočítateľná množina, akú mohutnosť má množina všetkých jej podmnožín 2^A?

1.3.21. Dokážte, že množina $\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\,;\ a_0,a_1,\ldots,a_n\in Q\}$, t.j. množina všetkých polynómov stupňa najviac n $(n\in N)$ s racionálnymi koeficientami, je spočítateľná.

„Tati, bila tě někdy tvoje maminka?“
„Ne, jenom tvoje.“
úryvok z filmu SLUNCE, SENO A PÁR FACEK

„Mi řekni, prosím tě, co na tom chlastu máš?“
„Ja ti to řeknu a ty začneš chlastat taky.“
úryvok z filmu SLUNCE, SENO A PÁR FACEK

Čakal som to, ale nie tak skoro!
NÁHROBNÝ NÁPIS

Mladý gentleman, ktorý sa chce oženiť, by sa rád zoznámil
so skúseným mužom, ktorý by ho od tohto kroku odradil.
inzerát v londýnskych TIMES [1896]

Ach milí priatelia, priatelia neexistujú!
ARISTOTELES

Rečník má vyčerpať tému, nie poslucháčov.
WINSTON CHURCHIL

Mám rád prácu, priam ma fascinuje.
Celé hodiny vydržím sa na ňu dívať.
JEROME K. JEROME

Kapitola 2

Reálne čísla

2.1 Algebraické vlastnosti reálnych čísel

2.1.1 Úvodné poznámky

Množiny, s akými sa stretávame v praxi, sú dôležité nielen preto, že sa skladajú z určitých prvkov, ale hlavne preto, že tvoria určitú štruktúru. Ak hovoríme o množine celých čísel, nemyslíme tým iba čísla, ale aj ich porovnávanie a operácie na nich definované (sčítanie, odčítanie, násobenie). V tejto kapitole sa budeme venovať reálnym číslam ich vlastnostiam. Množinu reálnych čísel budeme označovať symbolom R.

Nech A je neprázdna množina, potom zobrazenie, ktoré každej usporiadanej dvojici $[a;b]\in A\times A = A^2$ priradí prvok z množiny A, t.j. zobrazenie $\varphi\colon A\times A \to A$, nazývame **binárna operácia** (**definovaná**) **na množine** A. Výsledok operácie φ vykonaný na prvkoch $a, b \in A$ označujeme $\varphi(a, b)$.[1] V praxi sa binárne operácie spravidla označujú špeciálnymi symbolmi, napr. $+$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $\wedge$ a podobne. Vtedy namiesto $\varphi(a, b)$ píšeme $a+b$, $a\cdot b$, $M\cup N$, $M\cap N$, $p\wedge q$.

Príklad 2.1.1.
Nech $X\neq\emptyset$ a $2^X = \{A;\, A\subset X\}$ je potenčná množina množiny X. Symboly $\cup$, $\cap$, $-$, $\triangle$ predstavujú binárne operácie definované na množine 2^X, sú to zobrazenia z množiny $2^X\times 2^X$ do množiny 2^X. Doplnok množiny je unárna operácia $2^X \to 2^X$. ■

2.1.2 Axiómy reálnych čísel

Jedným zo základných pojmov, s ktorým sa stále stretávame, je **číslo**. Pojem čísla je intuitívne jasný asi každému človeku.

Najrozsiahlejšou číselnou množinou je **množina komplexných čísel**, ktorá obsahuje tzv. imaginárne čísla a označuje sa písmenom C. Najdôležitejšou množinou je jej podmnožina, ktorú nazývame **množina reálnych čísel**. Množinu reálnych čísel definujeme ako celok s reláciami, operáciami a ich vlastnosťami. Zadávame ich pomocou tzv. **axióm reálnych čísel**. Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom **číslo**, rozumieť číslo reálne.

- **Rovnosť čísel**

Základným vzťahom medzi číslami je relácia rovnosť dvoch čísel, ktorú značíme symbolom $=$. Hovoríme, že **číslo a sa rovná číslu b** (**čísla a, b sa rovnajú**) a zapisujeme $a=b$, ak výrazy a, b vyjadrujú to isté číslo. Ak neplatí $a=b$, potom hovoríme, že **číslo a sa nerovná číslu b** (**čísla a, b sa nerovnajú**) a zapisujeme $a\neq b$.

Rovnosť dvoch čísel je reláciou ekvivalencie na množine R, t.j.

$$\forall a,b,c\in R\colon \qquad a=a, \qquad a=b \;\Leftrightarrow\; b=a, \qquad (a=b\wedge b=c) \;\Rightarrow\; a=c.$$

- **Axiómy sčítania a násobenia**

Sčítanie dvoch čísel $+$ je binárna operácia, ktorá dvom daným číslam (**sčítancom**) priradí jednoznačne tretie číslo (ktoré nazývame **súčet čísel a a b**, označenie $a+b$).

Násobenie dvoch čísel $\cdot$ je binárna operácia, ktorá dvom daným číslam (**činiteľom**) priradí jednoznačne tretie číslo (**súčin čísel a a b**, označenie $a\cdot b = ab$).

Pre všetky $a,b,c\in R$ platí:

(S1) $a+b = b+a$,
(S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$,
(S3) $\exists!\, 0\in R\ \forall a\in R\colon\ a = a+0$,
(S4) $\forall a\in R\ \exists!\, x\in R\colon\ 0 = a+x$,
(D) $(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c) = ac+bc$.

(N1) $a\cdot b = b\cdot a$,
(N2) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$,
(N3) $\exists!\, 1\in R\ \forall a\in R\colon\ a = a\cdot 1$,
(N4) $\forall a\in R, a\neq 0\ \exists!\, y\in R\colon\ 1 = a\cdot y$,

Axiómy (S1), (N1) nazývame **komutatívny zákon**. Axiómy (S2), (N2) nazývame **asociatívny zákon**. Číslo 0 nazývame **nula** (**nulový prvok**), číslo x nazývame **opačné číslo k číslu a** a značíme $x=-a$. Číslo 1 nazývame **jednotka** (**jednotkový prvok**), číslo

[1] Nech $n\in N$, potom zobrazenie $\varphi\colon A^n \to A$ nazývame **n-nárnou operáciou na množine A**. Ak $n=1$, potom hovoríme o **unárnej operácii**.

y nazývame **inverzné** (**obrátené**) **číslo k číslu** a a značíme $a^{-1} = 1/a$. Axiómu (D) nazývame **distributívny zákon násobenia vzhľadom na sčítanie**.

- **Axiómy usporiadania**

Charakteristickým znakom reálnych čísel je, že ich môžeme podľa veľkosti porovnávať a usporiadať. Nech a, b sú reálne čísla, potom výraz $a < b$ vyjadruje, že **číslo** a **je menšie ako číslo** b. Reláciu $<$ nazývame **menší**, spolu s ňou je zároveň definovaná aj relácia **väčší**, ktorú označujeme $>$. Výrazy $a < b$ a $b > a$ (b je väčšie ako a) sú ekvivalentné.

Nech $a, b, c \in R$, potom platí:

(U1) Platí práve jeden zo vzťahov $a < b$, $a = b$, $b < a$,
(U2) $(a < b \wedge b < c) \;\Rightarrow\; a < c$, (U3) $a \not< a$, t.j. neplatí $a < a$,
(U4) $a < b \;\Rightarrow\; a+c < b+c$, (U5) $(a < b \wedge 0 < c) \;\Rightarrow\; ac < bc$.

Poznámka 2.1.1.
Nech A je neprázdna množina a T je binárna relácia definovaná na množine A, na ktorej platia axiómy (U1), (U2), (U3). Reláciu T potom nazývame **usporiadanie** a množinu A nazývame **usporiadaná množina**. To znamená, že množiny R, N, Z, Q sú usporiadané.

Ak pre $a, b \in R$ platí $a < b$ alebo $a = b$, potom píšeme $a \leq b$ (**a je menšie alebo rovné b**). Ak platí $a > b$ alebo $a = b$, potom píšeme $a \geq b$ (**a je väčšie alebo rovné b**).

Relácie $<$, $>$ nazývame **ostré nerovnosti** a relácie $\leq$, $\geq$ (menší alebo rovný, väčší alebo rovný) nazývame **neostré nerovnosti**.

Reálne číslo x sa nazýva **kladné** [resp. **nezáporné**], ak platí $x > 0$ [resp. $x \geq 0$] a **záporné** [resp. **nekladné**], ak $x < 0$ [resp. $x \leq 0$]. Číslo 0 je nezáporné a súčasne nekladné. Množiny všetkých kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel označujeme

$$R^+ = \{x \in R\,;\, x > 0\}\,,\ R^- = \{x \in R\,;\, x < 0\}\,,\ R_0^+ = \{x \in R\,;\, x \geq 0\}\,,\ R_0^- = \{x \in R\,;\, x \leq 0\}\,.$$

- **Axióma o najmenšom hornom ohraničení**

Nech $A \subset R$. Hovoríme, že číslo $a \in R$ je **horné** [resp. **dolné**] **ohraničenie množiny** A, ak pre všetky prvky $x \in A$ platí $x \leq a$ [resp. $b \leq x$].

Množina A sa nazýva **ohraničená zhora** [resp. **zdola**], ak existuje aspoň jedno jej horné [resp. dolné] ohraničenie. Množina A sa nazýva **ohraničená**, ak je zdola aj zhora ohraničená. Ak množina A nie je ohraničená, nazýva sa **neohraničená**.

Nech $A \subset R$. Ak $a \in R$ je horné [resp. dolné] ohraničenie množiny A a zároveň platí $a \in A$, potom a nazývame **najväčší prvok** (**maximum**) [resp. **najmenší prvok** (**minimum**)] **množiny** A a označujeme $a = \max A$ [resp. $a = \min A$].

Najmenšie z horných ohraničení množiny nazývame suprémum množiny a najväčšie z dolných ohraničení nazývame infimum množiny.[2]

Hovoríme, že $\alpha \in R$ je **suprémum množiny** A a označujeme $\alpha = \sup A$, ak platí:
i) $\forall x \in A\colon\ x \leq \alpha$, ii) $\forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon\ x \leq b) \Rightarrow \alpha \leq b$.

Hovoríme, že $\beta \in R$ je **infimum množiny** A a označujeme $\beta = \inf A$, ak platí:
i) $\forall x \in A\colon\ \beta \leq x$, ii) $\forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon\ b \leq x) \Rightarrow b \leq \beta$.

Axiómu o najmenšom hornom ohraničení (**o supréme**) môžeme formulovať gramatickou vetou: *„Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny reálnych čísel má reálne suprémum.“*, t.j.

(AH) $\forall A \subset R, A \neq \emptyset\colon\ (\exists a \in R\ \forall x \in A\colon\ x \leq a) \;\Rightarrow\; \exists\ \alpha = \sup A \in R$.

2.1.3 Dôsledky axióm reálnych čísel

Nech $a, b \in R$, potom **odčítaním dvoch čísel** $-$ nazývame binárnu operáciu, ktorá číslu a (**menšenec**) a číslu b (**menšiteľ**) priradí číslo $x \in R$ také, že $b + x = a$. Číslo x nazývame **rozdiel čísel a a b** a zapisujeme ho v tvare $x = a + (-b) = a - b$.

Nech $a, b \in R$, $b \neq 0$. **Delením dvoch čísel** $:$ nazývame operáciu $R \times R - \{0\} \to R$, ktorá číslu a (**delenec**) a číslu b (**deliteľ**) priradí číslo $y \in R$také, že platí rovnosť $by = a$. Číslo y nazývame **podiel čísel a a b** a zapisujeme ho $y = a \cdot b^{-1} = a : b = a/b = \dfrac{a}{b}$.

Veta 2.1.1.
Nech $a, b, c, d \in R$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, potom: a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc$, b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

Poznámka 2.1.2.
Podiel čísel a a b, $b \neq 0$ v tvare $a/b = \dfrac{a}{b}$ nazývame **zlomok s čitateľom a a menovateľom b**. Postup opísaný vo vete 2.1.1 b) sa nazýva **úprava dvoch zlomkov na spoločného menovateľa**.

[2] Vlastnosť i) znamená, že α [resp. β] je horné [resp. dolné] ohraničenie množiny A a vlastnosť ii) znamená, že každé iné horné [resp. dolné] ohraničenie množiny A je väčšie [resp. menšie].

- **Číselné množiny**

Čísla $1,\ 2{=}1{+}1,\ 3{=}2{+}1,\ 4{=}3{+}1,\ \ldots,\ n{=}(n{-}1){+}1,\ \ldots$ nazývame **prirodzené**. Množinu, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla, nazývame **množina prirodzených čísel** a označujeme ju N. Symbolicky ju môžeme vyjadriť

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n{+}1, n{+}2, \ldots\}.$$

Celými číslami nazývame čísla, ktoré sa dajú zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel. Množinu, ktorá obsahuje všetky celé čísla, nazývame **množina celých čísel** a označujeme ju znakom Z. Do množiny Z patria všetky prirodzené čísla, všetky čísla k nim opačné a číslo 0. To znamená, že platí[3]

$$Z = \{m{-}n\,;\ m, n{\in}N\} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm n, \ldots\}.$$

V množine celých čísel Z nie je pre $m, n{\in}Z$, $n{\neq}{\pm}1$ definovaný podiel m/n. Každé číslo, ktoré sa dá vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel m/n, $n\neq 0$, nazývame **racionálne číslo**. Množinu, ktorá obsahuje všetky racionálne čísla nazývame **množina racionálnych čísel** a označujeme symbolom Q.

Čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame **iracionálne**. Medzi iracionálne čísla patria napríklad $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π. Množinu obsahujúcu všetky iracionálne čísla nazývame **množina iracionálnych čísel** a označujeme symbolom I. Potom platí

$$Q = \Big\{\frac{m}{n}\,;\ m, n{\in}Z,\ n{\neq}0\Big\}, \qquad I = R - Q.$$

Poznámka 2.1.3.
Je zrejmé, že podiel dvoch racionálnych čísel s nenulovým menovateľom je opäť racionálne číslo. Racionálne číslo môže mať viacero rôznych vyjadrení, napr. $0,5 = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{0,7}{1,4}$.

Na druhej strane súčin a podiel dvoch iracionálnych čísel nemusí byť iracionálne číslo, napr. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Príklad 2.1.2.
Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Riešenie.
Dokážeme sporom.
Nech $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, t.j. $\sqrt{2} = m/n$, kde $m, n{\in}N$ sú nesúdeliteľné čísla. Potom $2{=}m^2/n^2$, t.j. $2n^2{=}m^2$. To znamená, že $2\big|m$, t.j. $m{=}2k$, kde $k{\in}Z$. Z toho vyplýva $2n^2 = m^2 = 4k^2$, resp. $n^2 = 2k^2$. To znamená, že $2\big|n$. Takže čísla m, n sú súdeliteľné číslom 2. To je spor, z ktorého vyplýva $\sqrt{2}{\notin}Q$. ■

Každá podmnožina usporiadanej množiny je tiež usporiadaná, t.j. množiny N, Z, Q, $I{=}R{-}Q$ sú usporiadané. Množina komplexých čísel C usporiadaná nie je.

Príklad 2.1.3.
Množina všetkých prirodzených čísel N je zhora neohraničená, t.j. nie je ohraničená zhora a nie je ohraničená. Množina všetkých celých čísel Z je zhora aj zdola neohraničená. ■

Veta 2.1.2.
Nech $A \subset R$, $A{\neq}\emptyset$, potom (pokiaľ existujú) platí $\min A = \inf A$, $\max A = \sup A$.

Dôkaz.
Keďže $\max A{\in}A$, potom z vlastnosti i) supréma vyplýva $\max A \leq \sup A$. Na druhej strane je $\max A$ horné ohraničenie A. Z vlastnosti ii) vyplýva $\sup A \leq \max A$. Z toho vyplýva $\max A = \sup A$. Pre minimum je dôkaz analogický. ■

Aj keď je množina reálnych čísel R nekonečná, všetky jej prvky sú konečné, pretože pod pojmom číslo rozumieme **konečné číslo**. To znamená, že počet prvkov množiny nemôžeme vyjadriť číslom. Preto má zmysel rozšíriť množinu R o prvky **mínus nekonečno** a (**plus**) **nekonečno**, ktoré označujeme symbolmi $-\infty$ a ∞. Túto množinu nazývame **rozšírená množina reálnych čísel** a značíme $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Poznámka 2.1.4.
Operácie sčítania, odčítania, násobenia, delenia a reláciu usporiadania $<$, ktoré sme definovali pre reálne čísla, môžeme rozšíriť aj pre prvky množiny R^*.
Pre všetky $a{\in}R$ platí $-\infty < \infty$, $-\infty < a < \infty$.
Pre všetky $a, b{\in}R$, $b > 0$ definujeme výrazy

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad a \pm \infty = \pm\infty,$$
$$\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty, \quad -\infty \cdot (-\infty) = \infty, \quad \pm b \cdot \infty = \pm\infty, \quad \pm b \cdot (-\infty) = \mp\infty,$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{\pm b} = \pm\infty, \quad \frac{-\infty}{\pm b} = \mp\infty.$$

Nedefinujeme výrazy[4] $\infty - \infty$, $\pm\infty \cdot 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\infty}$, $\dfrac{\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{\pm\infty}{0}$, $\dfrac{a}{0}$.

[3] Symbol $\pm n$ vyjadruje číslo n a zároveň opačné číslo $-n$. V praxi sa používa tiež symbol $\mp n$, ktorý vyjadruje číslo $-n$ a opačné číslo n.
[4] Nazývajú sa **neurčité výrazy** a bližšie sa im venujeme na strane 106.

Z definície infima a supréma je zrejmé, že každá množina $A \subset R$ môže mať najviac jedno infimum a najviac jedno suprémum. Ak je množina A zhora ohraničená, potom na základe axiómy (AH) platí $\sup A \in R$. V opačnom prípade definujeme $\sup A = \infty$. Analogicky ak je množina A zdola ohraničená, potom $\inf A \in R$ a v opačnom prípade definujeme $\inf A = -\infty$.

Poznámka 2.1.5.
Ak $A = \emptyset$, potom každé $a \in R^*$ je horným a zároveň aj dolným ohraničením množiny $\emptyset$.
To znamená, že najmenšie z horných ohraničení je $-\infty$ a najväčšie z dolných ohraničení je ∞, t.j. $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = \infty$.

Nech $A \subset R$, $c \in R$, potom označme symbolmi $-A$, cA množiny

$$-A = \{-x\,;\, x \in A\} = \{x\,;\, -x \in A\}\,, \qquad cA = \{cx\,;\, x \in A\}\,.$$

Veta 2.1.3.
Nech $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, potom: $\alpha = \sup A \Leftrightarrow -\alpha = \inf(-A)$, $\beta = \inf A \Leftrightarrow -\beta = \sup(-A)$.

Veta 2.1.4.
Nech $A \subset B$ sú neprázdné reálne množiny, potom $\inf B \leq \inf A$, $\sup A \leq \sup B$.

- **Intervaly**

Najčastejšími množinami, s ktorými sa stretávame sú intervaly a ich zjednotenia. Nech $a, b \in R$, $a < b$, potom **ohraničenými intervalmi s krajnými bodmi a a b** (**s ľavým krajným bodom** a a **pravým krajným bodom** b) nazývame množiny:

$\langle a\,;\, b\rangle = \{x \in R\,;\, a \leq x \leq b\}$, **uzavretý interval**,
$\langle a\,;\, b) = \{x \in R\,;\, a \leq x < b\}$, **zľava uzavretý a sprava otvorený interval**,[5]
$(a\,;\, b\rangle = \{x \in R\,;\, a < x \leq b\}$, **zľava otvorený a sprava uzavretý interval**,
$(a\,;\, b) = \{x \in R\,;\, a < x < b\}$, **otvorený interval**.

Ak I je ohraničený interval, potom **dĺžkou intervalu** I nazývame číslo $d_I = b - a$.

Neohraničenými intervalmi s krajným bodom $a \in R$[6] nazývame množiny:

$(-\infty\,;\, a\rangle = \{x \in R\,;\, x \leq a\}$, $\langle a\,;\, \infty) = \{x \in R\,;\, a \leq x\}$,
$(-\infty\,;\, a) = \{x \in R\,;\, x < a\}$, $(a\,;\, \infty) = \{x \in R\,;\, a < x\}$.

Množinu R zvykneme zapisovať ako neohraničený interval $(-\infty\,;\, \infty) = \{x \in R\} = R$.

Všetky predchádzajúce intervaly nazývame **nedegenerované**. Ak $a = b$, potom intervaly nazývame **degenerované**. Sú to intervaly[7]

$$\langle a\,;\, a\rangle = \{x \in R\,;\, a \leq x \leq a\} = \{a\}\,, \qquad (a\,;\, a) = \{x \in R\,;\, a < x < a\} = \emptyset.$$

- **Princíp súvislosti**

Usporiadaná množina $M \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**, ak pre všetky prvky $a, b \in M$, $a < b$ existuje prvok $c \in M$ taký, že $a < c < b$.

Veta 2.1.5.
Množina R je husto usporiadaná, t.j. pre všetky $a, b \in R$, $a < b$ existuje $c \in R$, že $a < c < b$.

Dôkaz.
Nech $a, b \in R$, $a < b$, potom stačí položiť napríklad $c = \dfrac{a+b}{2}$. ■

Poznámka 2.1.6.
Množina racionálnych čísel Q je tiež husto usporiadaná. Lenže medzi dvomi racionálnymi číslami existujú medzery, ktoré vypĺňajú iracionálne čísla. Geometricky si to môžeme predstaviť tak, že ak bude bod prebiehať číselnou osou iba po racionálnych číslach, potom jeho pohyb nebude „spojitý“ (súvislý).[8]

Množina $A \subset R$ sa nazýva **súvislá**, ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$, platí $\langle a\,;\, b\rangle \subset A$.

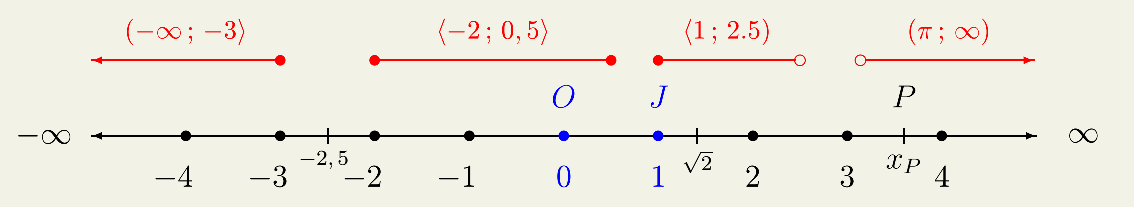
Poznámka 2.1.7.
Z definície vyplýva, že každý interval v množine R je súvislá množina.
Množiny N, Z, Q, I a všetky ich podmnožiny nie sú súvislé.

[5] Intervaly $\langle a\,;\, b)$ a $(a\,;\, b\rangle$ stručne nazývame **polouzavreté**, resp. **polootvorené**.
[6] S ľavým, resp. pravým krajným bodom a.
[7] Pokiaľ nebude povedané ináč, budeme pod pojmom interval rozumieť nedegenerovaný interval.
[8] V geometrii chápeme súvislosť množiny tak, že s každými dvomi bodmi obsahuje aj úsečku medzi nimi.

Veta 2.1.6 (Princíp súvislosti).
Ak $A \subset R$ je súvislá množina a obsahuje aspoň dva rôzne body, potom A je interval.

Dôkaz.
Sporom. Nech A je súvislá, obsahuje aspoň dva body a nie je interval.
Keďže A nie je interval, potom existujú $a, b \in A$, $c \notin A$ také, že $a < c < b$, t.j. $c \in \langle a\,;\,b \rangle$.
Zo súvislosti A vyplýva $\langle a\,;\,b \rangle \subset A$, t.j. $c \in \langle a\,;\,b \rangle \subset A$. Dostali sme spor $c \in A$. ■

Množinu R môžeme reprezentovať priamkou. Zvoľme v rovine priamku p a na nej dva body O, J tak, aby vzdialenosť $|OJ| = 1$. Ak bod P leží na polpriamke OJ, potom mu priradíme číslo $x_P = |OP|$. V opačnom prípade mu priradíme číslo $x_P = -|OP|$. Je zrejmé, že $x_O = 0$ a $x_J = 1$. Priamku p nazývame **reálna číselná os**, bod O **nulový bod** a bod J **jednotkový bod** (obr. 2.1.1).



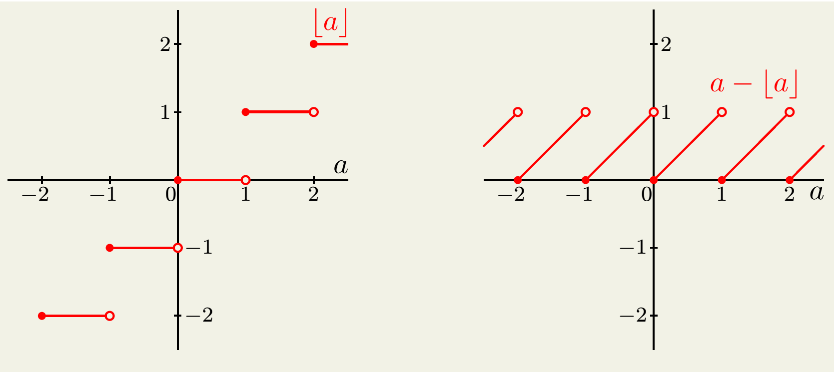
Obr. 2.1.1: Reálna číselná os.

- **Archimedov a Cantorov princíp**

Archimedov princíp sa zvykne tiež nazývať Archimedova vlastnosť reálnych čísel a je dôležitým dôsledkom axiómy o najmenšom hornom ohraničení (AH). V niektorých teóriách sa Archimedov princíp spolu s Cantorovým princípom považujú za axiómy.

Veta 2.1.7 (Archimedov princíp).
Nech $a \in R$, $x \in R$, $x > 0$, potom existuje $k \in Z$ také, že $kx \leq a < (k+1)x$.

Ak položíme $x = 1$, potom pre každé $a \in R$ existuje $k \in Z$ také, že platí $k \leq a < k+1$. Číslo k nazývame **celá časť čísla** a a označujeme $\lfloor a \rfloor$, resp. $[a]$, resp. Int a. Rozdiel $a - \lfloor a \rfloor$ nazývame **lomenou časťou čísla** $a \in R$ (viď obrázok 2.1.2).



Obr. 2.1.2: Celá a lomená časť čísla a.

Veta 2.1.8.
Nech $a \in R$, $a > 0$, potom existuje $n \in N$ také, že $\dfrac{1}{n} < a$.

Dôkaz.
Keďže $a^{-1} > 0$, potom existuje $n \in N$ také, že $n-1 \leq a^{-1} < n$, t.j. $n^{-1} < a$. ■

Veta 2.1.9.
Nech $a, b \in R$, $a < b$, potom existujú $s \in Q$, $v \in I$ také, že $s \in (a\,;\,b)$, $v \in (a\,;\,b)$.

Dôkaz.
Keďže $b - a > 0$, potom existuje $n \in N$, že $\dfrac{1}{n} < b - a$. Potom existuje $k \in Z$ také, že

$$k \leq na < k+1, \quad \text{t.j.} \quad \frac{k}{n} \leq a < \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

To znamená, že stačí položiť $s = (k+1)/n$, $s \in Q$.
Keďže $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, potom existuje $s_0 \in Q$ také, že platí $a - \sqrt{2} < s_0 < b - \sqrt{2}$.
Je zrejmé, že $a < s_0 + \sqrt{2} < b$, $v = s_0 + \sqrt{2} \notin Q$. ■

Veta 2.1.10.
Nech $r\in R$, potom $\sup\{s\,;\,s\in Q,\ s\leq r\}=r$, $\sup\{s\,;\,s\in I,\ s\leq r\}=r$.

Príklad 2.1.4.
Pre množinu racionálnych čísel $A=\{x\in Q\,;\,x\leq\sqrt{2}\}$ platí $\sup A=\sqrt{2}\notin Q$.
To znamená, že axióma (AH) v množine racionálnych čísel Q neplatí. ■

Veta 2.1.11 (Cantorov princíp vložených intervalov).
Nech $\{\langle a_n\,;\,b_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť uzavretých intervalov takých, že pre $n=1,2,3,\ldots$ platí $\langle a_{n+1}\,;\,b_{n+1}\rangle\subset\langle a_n\,;\,b_n\rangle$. Potom existuje aspoň jedno $c\in R$, ktoré leží vo všetkých intervaloch $\langle a_n\,;\,b_n\rangle$, $n=1,2,3,\ldots$, t.j. pre ktoré platí $c\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\langle a_n\,;\,b_n\rangle$.
Ak navyše pre každé $\varepsilon>0$ existuje $n\in N$ také, že $b_n-a_n<\varepsilon$, potom existuje práve jeden taký bod $c\in R$.

Dôkaz.
Označme $A=\{a_n\,;\,n\in N\}$, $B=\{b_n\,;\,n\in N\}$. Je zrejmé, že pre všetky $j,k\in N$ platí $a_j\leq b_k$. Z toho vyplýva, že pre všetky $n\in N$ platí

$$a_n\leq\sup A\leq\inf B\leq b_n,\qquad \text{t.j. } c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle a_n\,;\,b_n\rangle=\langle\sup A\,;\,\inf B\rangle\,.$$

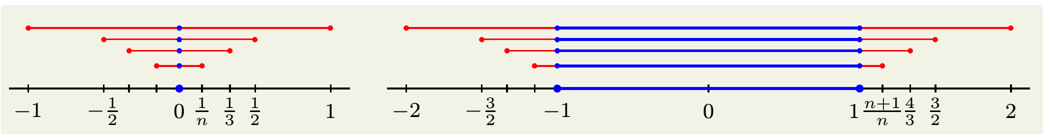
Jednoznačnosť c. Označme $d=\inf B-\sup A$, $D=\{d\}$. Je zrejmé, že $d\geq 0$.
Nech pre všetky $\varepsilon>0$ existuje $n\in N$ také, že $b_n-a_n<\varepsilon$. Potom platí

$$0\leq d=\inf B-\sup A\leq b_n-a_n<\varepsilon,\qquad \text{t.j. } D\subset R^+=\{\varepsilon\,;\,\varepsilon>0\}\,.$$

Z toho vyplýva (veta 2.1.4) $0\leq d=\inf D\leq\inf R^+=0$, t.j. $0=d$. To znamená, že $\inf B=\sup A$ a existuje jediné $c=\inf B=\sup A$.
■

Príklad 2.1.5.
Postupnosti uzavretých intervalov $\{\langle-\frac{1}{n}\,;\,\frac{1}{n}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\langle-1-\frac{1}{n}\,;\,1+\frac{1}{n}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňajú predpoklady vety 2.1.11 (obr. 2.1.3) a platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle-\tfrac{1}{n}\,;\,\tfrac{1}{n}\rangle=\{0\}\,,\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}\langle-1-\tfrac{1}{n}\,;\,1+\tfrac{1}{n}\rangle=\langle-1\,;\,1\rangle\,.$$ ■



Obr. 2.1.3: Obrázok k príkladu 2.1.5.

Poznámka 2.1.8.
Cantorov princíp vložených intervalov sa v matematike využíva často. Postupnosť vložených intervalov sa spravidla konštruuje **metódou bisekcie**.[9] Pri tejto metóde sa interval $\langle a\,;\,b\rangle$ postupne delí na dva rovnaké podintervaly. Z nich sa vyberie vhodný interval a ten sa opäť delí na dva podintervaly. Tento postup sa opakuje dovtedy, kým sa nedosiahne požadovaná presnosť.

- **Absolútna hodnota a signum čísla**

Nech $a\in R$, potom **absolútnou hodnotou čísla** a nazývame číslo $|a|=\max\{-a,a\}$. To znamená, že platí $|a|=a$, ak $a\geq 0$ a $|a|=-a$, ak $a\leq 0$ (viď obrázok 2.1.4).

Veta 2.1.12.
Pre všetky $a,b,c\in R$, $c\neq 0$ platí:
a) $|a|\geq 0$, $|a|=0\ \Leftrightarrow\ a=0$, b) $|-a|=|a|$, c) $|ab|=|a|\cdot|b|$,
d) $|a/c|=|a|\,/\,|c|$, e) $|a+b|\leq|a|+|b|$, f) $|a|-|b|\leq|a+b|$.

Dôkaz.
a), b), c), d) Dôkaz vyplýva priamo z definície.
e) Túto nerovnosť nazývame **trojuholníková**. Zo vzťahov $\pm a\leq|a|$, $\pm b\leq|b|$ vyplýva

$$a+b\leq|a|+b\leq|a|+|b|,\qquad -a-b=-a+(-b)\leq|a|+(-b)\leq|a|+|b|\,.$$

To znamená, že $|a+b|=\max\{a+b,-a-b\}\leq|a|+|b|$.
f) Ak dosadíme do nerovnosti e) reálne čísla $-b$, $a+b$, dostaneme

$$|-b+(a+b)|\leq|-b|+|a+b|\ \Leftrightarrow\ |a|\leq|b|+|a+b|,\qquad \text{t.j. } |a|-|b|\leq|a+b|\,.$$ ■

[9] V literatúre sa môžeme stretnúť aj s názvom chytanie leva na púšti.

Veta 2.1.13.
Ak $a\in R$, $a>0$, potom platí: $|x|\leq a \iff -a\leq x\leq a$.

Poznámka 2.1.9.
Výraz $|x-a|$ predstavuje vzdialenosť bodov a a x. Ak $\delta>0$, potom platí

$$|x-a|\leq\delta \iff -\delta\leq x-a\leq\delta \iff a-\delta\leq x\leq a+\delta \iff x\in\langle a-\delta\,;\,a+\delta\rangle\,.$$

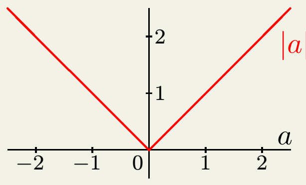
Veta 2.1.14.
Množina $A\subset R$ je ohraničená práve vtedy, ak existuje $a\in R$ také, že pre všetky $x\in A$ platí $|x|\leq a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Množina A je ohraničená, t.j. existujú čísla $c_1,c_2\in R$ také, že pre všetky $x\in A$ platí $c_1\leq x\leq c_2$. Potom stačí položiť $a=\max\{|c_1|,|c_2|\}$.
$PP_{\Leftarrow}$: Je zrejmé, že pre všetky $x\in A$ platí $-a\leq x\leq a$, t.j. A je ohraničená. ■

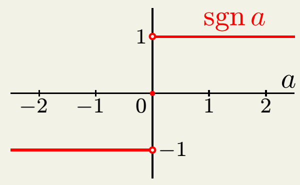
Poznámka 2.1.10.
Ak pre $a\in R$ označíme $a^+=\max\{a,\ 0\}$, $a^-=\max\{-a,\ 0\}$, potom platí

$$|a|=a^++a^-,\quad a=a^+-a^-,\qquad a^+=\frac{a+|a|}{2},\quad a^-=\frac{a-|a|}{2}.$$

Nech $a\in R$, potom **signum čísla** a definujeme vzťahom $\operatorname{sgn}a=\begin{cases}-1, & \text{pre } a<0,\\ 0, & \text{pre } a=0,\\ 1, & \text{pre } a>0.\end{cases}$



Obr. 2.1.4: Absolútna hodnota čísla a.



Obr. 2.1.5: Signum čísla a.

Veta 2.1.15.
Pre všetky $a,b\in R$ platí:

a) $a=\operatorname{sgn}a\cdot|a|$, b) $|a|=\operatorname{sgn}a\cdot a$, c) $\operatorname{sgn}(ab)=\operatorname{sgn}a\cdot\operatorname{sgn}b$.

Dôkaz.
a) Pre $a=0$ je rovnosť splnená triviálne. Pre $a\neq0$ platí

$$a>0\colon\ \operatorname{sgn}a\cdot|a|=1\cdot a=a,\qquad a<0\colon\ \operatorname{sgn}a\cdot|a|=-1\cdot(-a)=a.$$

b) Pre $a=0$ je rovnosť splnená triviálne. Pre $a\neq0$ platí

$$\operatorname{sgn}a\cdot a=\operatorname{sgn}a\cdot\operatorname{sgn}a\cdot|a|=(\operatorname{sgn}a)^2\cdot|a|=(\pm1)^2\cdot|a|=|a|\,.$$

c) Ak $a=0$ alebo $b=0$, rovnosť platí triviálne. Ak $a\neq0\neq b$, potom platí

$$\operatorname{sgn}(ab)=\frac{ab}{|ab|}=\frac{ab}{|a|\cdot|b|}=\frac{a}{|a|}\cdot\frac{b}{|b|}=\operatorname{sgn}a\cdot\operatorname{sgn}b.\ ■$$

• Mocniny a odmocniny reálnych čísel

Nech $a\in R$, $n\in N$, potom vzťah $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{-krát}}$ nazývame **n-tá mocnina čísla a** (čítame a na n-tú). Číslo a nazývame **mocnenec** (**základ mocniny**), n nazývame **mocniteľ** (**exponent**). Pre $a\neq0$ definujeme $a^0=1$, $a^{-n}=1/a^n$.

S mocninou 0^0 je to trochu zložitejšie. Na základe predchádzajúceho môžeme definovať $0^0=1$, ale na základe vzťahov 2.1 môžeme definovať[10] $0^0=0$.

V bežných prípadoch definujeme $0^0=1$. Pre použitie tejto definície existuje niekoľko závažných dôvodov. Medzi najdôležitejšie patrí binomická veta, pre ktorej všeobecnú platnosť je táto definícia nevyhnutná. Na druhej strane limita v tomto tvare patrí medzi neurčité výrazy a je potrebné ju individuálne vyčísľovať (str. 106).

[10] Prvý pohľad je založený na funkcii $y=x^0=1$, $x\neq0$ a druhý na funkcii $y=0^x=0$, $x>0$.

Poznámka 2.1.11.
Výraz a^{m^n} nemá zmysel, pretože nie je určené, či vyjadruje $(a^m)^n$ alebo $a^{(m^n)}$.
Posledné dva výrazy sa nemusia rovnať, napríklad $(2^2)^3 = 4^3 = 64$, $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$.

Nech $a \in R$, $a \geq 0$, $n \in N$, potom **n-tou odmocninou čísla a** nazývame také číslo $x \geq 0$, pre ktoré platí $x^n = a$. Označujeme[11] $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{1/n}$.

Nech $a \in R$, $a > 0$, $s \in Q$, pričom $s = m/n$, kde $m \in Z$, $n \in N$. Potom **s-tú mocninu čísla $a > 0$** definujeme vzťahom $a^s = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Ak $a = 0$, potom pre všetky $s \in Q$, $s > 0$ definujeme $0^s = 0$.

Mocninu čísla $a \geq 0$ s reálnym exponentom r $(r \in R)$ definujeme nasledovne:

$$a^r = \begin{cases} \sup\{a^s\,;\, s\in Q,\ s \leq r\}, & \text{pre } a > 1, \\ 1^r = 1, & \text{pre } a = 1, \\ (a^{-1})^{-r} = (1/a)^{-r}, & \text{pre } a \in (0\,;\,1)\,,\ \text{t.j. } 1/a > 1, \\ 0^r = 0, & \text{pre } a = 0,\ r > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Poznámka 2.1.12.
Uvedená definícia je založená na skutočnosti, že pre $a \in (1\,;\,\infty)$, $s, t \in Q$, $s < t$ platí nerovnosť $a^s < a^t$ a že každé $r \in R$ sa dá vyjadriť v tvare $r = \sup\{s\,;\, s \in Q,\ s \leq r\}$.

Veta 2.1.16.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, potom pre $r, u \in R$ platí:
a) $a^r \cdot a^u = a^{r+u}$, b) $(a^r)^u = (a^u)^r = a^{ru}$, c) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

Veta 2.1.17.
Nech $a, b \in R$, $0 < a < 1 < b$, potom pre $r \in R$ platí:
a) $0 < r \ \Rightarrow\ a^r < 1 < b^r$, b) $r < 0 \ \Rightarrow\ b^r < 1 < a^r$.

Veta 2.1.18.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $r, u \in R$, potom platí:
a) $a < b$, $\begin{cases} 0 < r \implies a^r < b^r, \\ r < 0 \implies b^r < a^r, \end{cases}$ b) $r < u$, $\begin{cases} 1 < a \implies a^r < a^u, \\ a < 1 \implies a^u < a^r. \end{cases}$

Poznámka 2.1.13.
Podobne ako v poznámke 2.1.4 definujeme mocninu $(\pm\infty)^n$ s celočíselným exponentom.
Nech $n \in N$, $m \in Z$, potom definujeme $\infty^n = \infty$, $\infty^{-n} = 0$, $(-\infty)^m = (-1)^m \infty^m$.
Výrazy ∞^0, $(-\infty)^0$ nedefinujeme.

Cvičenia

2.1.1. Nech $a \in Q$, $b \in I$, potom $(a + b) \in I$. Dokážte.

2.1.2. Nech $a, b \in Q$, $\sqrt{ab} \in I$, potom $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in I$. Dokážte.

2.1.3. Dokážte, že nasledujúce čísla sú iracionálne:
a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, c) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, d) $\sqrt{15}$, e) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, f) $\sqrt{5}$.

2.1.4. Dokážte, že pre $a, b \in R$ platia nasledujúce tvrdenia:
a) $a < b < -1 \ \Rightarrow\ \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$, c) $a > b$, $b < -1 \ \Rightarrow\ \dfrac{a+1}{b+1} < \dfrac{a}{b}$,
b) $a > b > 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{a+1}{b+1} < \dfrac{a}{b}$, b) $a > 0$, $b > 0 \ \Rightarrow\ 2 \leq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$.

2.1.5. Dokážte, že pre $a, b, c \in R$ platia nasledujúce tvrdenia:
a) $a \leq b$, $0 < b$, $0 < c \ \Rightarrow\ \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$, b) $a > b$, $0 < b$, $0 < c \ \Rightarrow\ \dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a}{b}$,
c) $a < b < -c$, $0 < c \ \Rightarrow\ \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$, d) $a > b$, $0 < c$, $b < -c \ \Rightarrow\ \dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a}{b}$.

[11] Druhú odmocninu čísla a označujeme namiesto symbolu $\sqrt[2]{a}$ skrátene $\sqrt{a}$.

2.1.6. Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín:

a) $\left\{\frac{2n+1}{n};\, n\in N\right\}$, b) $\left\{\frac{2+(-1)^n}{n};\, n\in N\right\}$, c) $\left\{\frac{1+\cdots+n}{n^2};\, n\in N\right\}$,

d) $\left\{\sin\frac{1}{n!};\, n\in N\right\}$, e) $\left\{\frac{1}{n+n^{-1}};\, n\in N\right\}$, f) $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}};\, n\in N\right\}$.

2.1.7. Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín:

a) $\{a\in R;\, |2a+1| < a < |a-1|\}$, b) $\{a\in R;\, |a^2-1| < a < |a+1|\}$.

2.1.8. Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Označme **súčet**, **súčin množín** A, B symbolmi $A+B = \{a+b;\, a\in A, b\in B\}$, $AB = \{ab;\, a\in A, b\in B\}$ a **n-tú mocninu množiny** A, $n\in N$ symbolom $A^n = \{a^n;\, a\in A\}$. Dokážte, že platí:

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,

c) $\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, d) $\inf(A\cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,

e) $\sup(A\cap B) \le \min\{\sup A, \sup B\}$, f) $\inf(A\cap B) \ge \max\{\inf A, \inf B\}$,

g) $\sup A^n = (\sup A)^n$, h) $\inf A^n = (\inf A)^n$.

2.1.9. Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Dokážte, že aj množiny $A\cup B$, $A\cap B$, $A+B$, AB, A^n pre $n\in N$ sú ohraničené množiny.

2.1.10. Dokážte trojuholníkovu nerovnosť $|a_1+a_2+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $n\in N$.

2.1.11. Dokážte, že pre všetky $a, b\in R$, $a>0$, $b>0$, $ab=1$ platí $2 \le a+b$.

2.1.12. Dokážte, že pre $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$, $a_1a_2\cdots a_n = 1$ platí $n \le a_1+a_2+\cdots+a_n$.

2.1.13. Dokážte, že pre všetky $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ platí $(a_1b_1+a_2b_2)^2 \le (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$. [Návod: Nerovnosť $0 \le (a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2$ platí pre všetky $x\in R$.]

2.1.14. Nájdite všetky $x\in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla:

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{4-x}$, b) $\frac{x}{\sqrt{x-3}}+\frac{x}{\sqrt{4-x}}$, c) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{\frac{4-x}{4-x}}$.

2.1.15. Nájdite všetky $x\in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla:

a) $\sqrt{(1-x)^{-1}}$, b) $\sqrt{1-\operatorname{sgn} x}$, c) $\sqrt{\operatorname{sgn} x - 1}$, d) $\sqrt{|x|-x}$,

e) $\sqrt{\frac{x}{x\operatorname{sgn} x - x}}$, f) $\frac{x}{\sqrt{x\operatorname{sgn} x - x}}$, g) $\frac{x\operatorname{sgn} x - x}{x\operatorname{sgn} x + x}$, h) $\frac{x^2-2}{3-x^2}$,

i) $\sqrt{x^3+x^2-x}$, j) $\sqrt{x\operatorname{sgn} x - x}$, k) $\sqrt{\operatorname{sgn} x - x^2}$, l) $\sqrt{x+x^3}$.

2.1.16. Dokážte, že ak $a, b\in R$, potom: a) $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$.

2.1.17. Dokážte, že ak $a, b\in R$, $a\le b$, potom $\frac{(a-b)^2}{8b} \le \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{(a-b)^2}{8a}$.

2.1.18. Do akej množiny patrí číslo x, ak platí:

a) $x^2+3x-1 \in (2;3)$, b) $x^2-4x+1 \in \langle 2;\infty)$, c) $x^2+x-1 \in R - \langle 1;2)$.

2.1.19. Určte veľkosti strán pravouhlého trojuholníka, ak rozdiel odvesien je rovný 1 a prepona je dlhšia ako 11.

2.1.20. Ako musíme zvoliť parameter $a\in R$ v danej rovnici:

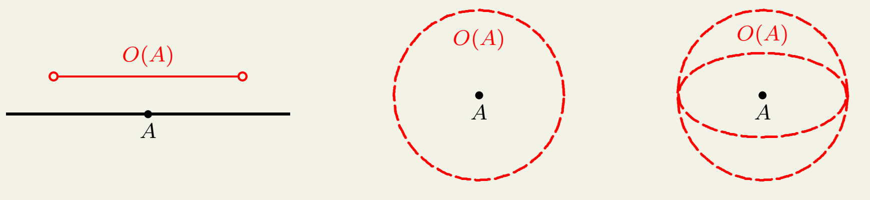
a) $ax^2+(2a-1)x-2=0$, aby jej korene boli z intervalu $(-2;2\rangle$.

b) $x^2+ax+12=0$, aby mala reálne, resp. komplexné korene.

c) $x^2+5x+a=0$, aby mala reálne, resp. komplexné korene.

2.1.21. Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov s daným obvodom s má najväčší plošný obsah štvorec.

2.1.22. Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov s daným plošným obsahom P má najmenší obvod štvorec.



Obr. 2.2.6: Okolie $O(A)$ bodu A na priamke, v rovine a v priestore.

2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel

2.2.1 Okolie bodu

Topologická štruktúra vyjadruje polohové vzťahy medzi prvkami a podmnožinami danej množiny. Základným topologickým pojmom je **okolie bodu**. Najprv uvedieme geometrickú interpretáciu okolia bodu (obr. 2.2.6) Okolím $O(A)$ bodu $A \in R$ na priamke je vnútro úsečky so stredom v bode A, v rovine R^2 je to vnútro kruhu so stredom v bode A a v priestore R^3 je to vnútro gule so stredom v bode A.

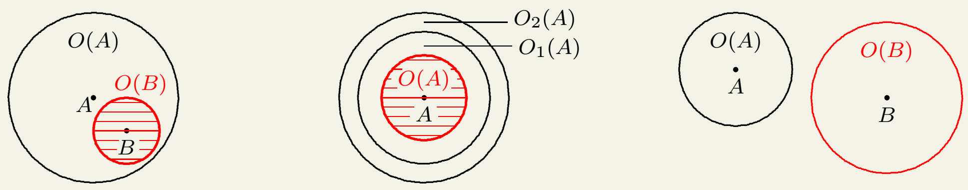
Nech $M \neq \emptyset$, $M \subset R$ ($M \subset R^2$, resp. $M \subset R^3$), potom systém všetkých okolí bodov $A \in M$ spĺňa axiómy (O1)—(O4), ktoré sa tiež nazývajú **Hausdorffove axiómy**.

(O1) Ku každému bodu $A \in M$ existuje aspoň jedno okolie $O(A)$.

(O2) Pre každé okolie $O(A)$ a pre každé $B \in O(A)$, $B \neq A$, existuje okolie $O(B) \subset O(A)$.

(O3) Pre všetky okolia $O_1(A), O_2(A)$ existuje okolie $O(A) \subset O_1(A) \cap O_2(A)$.

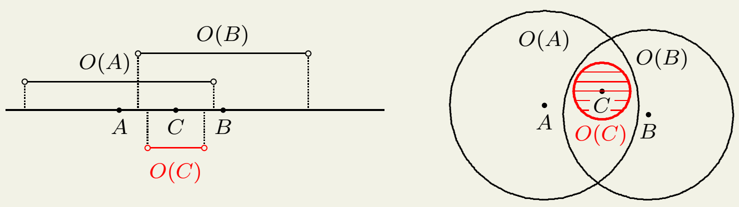
(O4) Ak $A \neq B$, potom existujú okolia $O(A)$, $O(B)$ také, že $O(A) \cap O(B) = \emptyset$.



(O2) (O3) (O4)

Obr. 2.2.7: Vlastnosti (O2), (O3), (O4) okolí bodov.

Veta 2.2.1.
Nech $A, B \in M$, $C \in O(A) \cap O(B)$. Potom existuje $O(C)$ tak, že $O(C) \subset O(A) \cap O(B)$.



Obr. 2.2.8: Obrázok k vete 2.2.1.

- **Okolie bodu v množine R**

Nech $a \in R$, potom interval $(a - \delta\,;\, a + \delta)$, nazývame **$\delta$-okolím bodu a** (**okolím bodu a**). Číslo $\delta > 0$ nazývame **polomer okolia**. Okolie bodu a označujeme $O_\delta(a)$, resp. $O(a)$ v prípade, že nie je veľkosť polomeru δ podstatná.

Nech $r \in R$, potom interval $(r\,;\, \infty)$ nazývame **okolím** (**r-okolím**) **bodu ∞** a označujeme $O_r(\infty)$, resp. $O(\infty)$. Analogicky interval $(-\infty\,;\, r)$ nazývame **okolím** (**r-okolím**) **bodu $-\infty$** a označujeme $O_r(-\infty)$, resp. $O(-\infty)$.

Niekedy je výhodné z okolia $O(a)$, $a \in R$ vylúčiť bod a. Množinu $O(a) - \{a\}$ nazývame **prstencovým** (**rýdzim**) **δ-okolím bodu $a \in R$** a označujeme $P_\delta(a)$, resp. $P(a)$.

Poznámka 2.2.1.
Okolia $O(\pm\infty)$ sú zároveň aj prstencovými okoliami bodov $\pm\infty$.
Okoliami sú tiež množiny R a $\emptyset$. Množina $R = (-\infty\,;\,\infty)$ je okolím ľubovoľného bodu $a \in R^*$ (t.j. aj $\pm\infty$) s polomerom $r = \infty$ a množina $\emptyset = (a\,;\,a)$ je okolím ľubovoľného bodu $a \in R$ s polomerom $r = 0$.

Okolia bodov $a \in R^*$ môžeme vyjadriť pomocou absolútnej hodnoty, t.j. pomocou vzdialenosti jednotlivých bodov. Nech $a \in R$, $\delta, r \in R$, $\delta > 0$, potom:

$$\begin{aligned} O_\delta(a) &= (a-\delta\,;\,a+\delta) = \{x \in R\,;\, a-\delta < x < a+\delta\} = \{x \in R\,;\, |x-a| < \delta\}\,, \\ P_\delta(a) &= (a-\delta\,;\,a+\delta) - \{a\} = (a-\delta\,;\,a) \cup (a\,;\,a+\delta) = \{x \in R\,;\, 0 < |x-a| < \delta\}\,, \\ O_r(\infty) &= (r\,;\,\infty) = \{x \in R\,;\, r < x < \infty\}\,, \\ O_r(-\infty) &= (-\infty\,;\,r) = \{x \in R\,;\, -\infty < x < r\}\,. \end{aligned}$$

Príklad 2.2.1.
Každý otvorený interval $(a\,;\,b)$, kde $a, b \in R$, $a < b$, je okolím. Je zrejmé, že $c = (a+b)/2$, $\delta = (b-a)/2$. ■

V matematike majú veľký význam a často sa používajú tzv. **jednostranné okolia**. **Pravým** [resp. **ľavým**] **δ-okolím bodu a** nazývame interval

$$O_\delta^+(a) = \langle a\,;\,a+\delta) \qquad [\text{resp. } O_\delta^-(a) = (a-\delta\,;\,a\rangle].$$

Analogicky nazývame **pravým** [resp. **ľavým**] **prstencovým δ-okolím bodu a** interval

$$P_\delta^+(a) = (a\,;\,a+\delta) \qquad [\text{resp. } P_\delta^-(a) = (a-\delta\,;\,a)].$$

2.2.2 Otvorené a uzavreté množiny

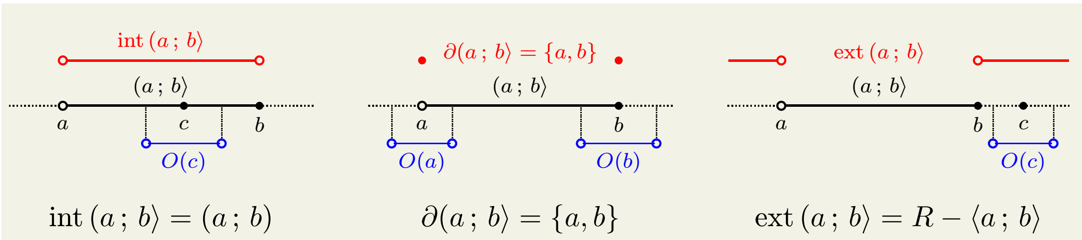
Nech $A \subset R$, $A \neq \emptyset$. Bod $a \in A$ sa nazýva **vnútorný bod množiny A**, ak existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny A nazývame **vnútro množiny A** a označujeme $\operatorname{int} A$, resp. A^0.

Bod $a \in R$ sa nazýva **vonkajší bod množiny A** práve vtedy, ak je vnútorným bodom doplnku $A' = R - A$. Množinu všetkých vonkajších bodov množiny A nazývame **vonkajšok množiny A** a označujeme $\operatorname{ext} A$.

Ak bod $a \in R$ nie je ani vnútorným a ani vonkajším bodom[12] množiny A, potom ho nazývame **hraničný bod množiny A**. To znamená, že v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A a aspoň jeden bod z množiny A'. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame **hranica množiny A** a označujeme ∂A.

Poznámka 2.2.2.
Nech $A \subset R$. Množiny $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$ sú disjunktné. Navyše pre množiny A a A' platí:

$$\partial A = \partial A', \qquad \operatorname{int} A = \operatorname{ext} A', \qquad \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A'.$$



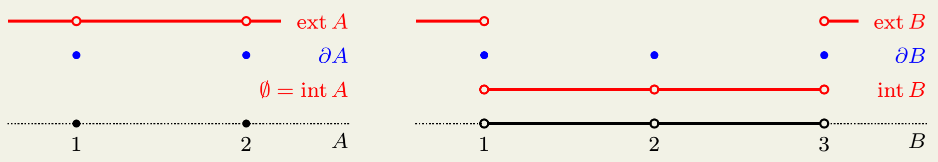
Obr. 2.2.9: Množiny $\operatorname{int}(a;\ b\rangle$, $\partial(a;\ b\rangle$, $\operatorname{ext}(a;\ b\rangle$ z príkladu 2.2.2 c).

Príklad 2.2.2.
a) Pre množiny $\emptyset$, R platí $\operatorname{int}\emptyset = \partial\emptyset = \partial R = \operatorname{ext} R = \emptyset$, $\operatorname{ext}\emptyset = \operatorname{int} R = R$.

b) Pre množinu racionálnych čísel Q platí $\partial Q = R$.

c) Ak $a, b \in R$, $a < b$, potom $\partial(a\,;\,b) = \partial(a\,;\,b\rangle = \partial\langle a\,;\,b) = \partial\langle a\,;\,b\rangle = \{a, b\}$,
$\operatorname{ext}(a\,;\,b) = \operatorname{ext}(a\,;\,b\rangle = \operatorname{ext}\langle a\,;\,b) = \operatorname{ext}\langle a\,;\,b\rangle = R - \langle a\,;\,b\rangle = (-\infty\,;\,a) \cup (b\,;\,\infty)$,
$\operatorname{int}(a\,;\,b) = \operatorname{int}(a\,;\,b\rangle = \operatorname{int}\langle a\,;\,b) = \operatorname{int}\langle a\,;\,b\rangle = (a\,;\,b)$ (obr. 2.2.9).

d) Nech $A = \{1, 2\}$, $B = (1\,;\,2) \cup (2\,;\,3)$, potom $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{ext} A = R - \{1, 2\}$, $\partial A = A$,
$\operatorname{int} B = B$, $\operatorname{ext} B = (-\infty\,;\,1) \cup (3\,;\,\infty)$, $\partial B = \{1, 2, 3\}$ (obr. 2.2.10). ■



Obr. 2.2.10: Obrázok k príkladu 2.2.2 d).

Bod $a \in R$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a, t.j. v každom jeho prstencovom okolí $P(a)$ leží aspoň jeden bod[13] z množiny A.

Uzáverom množiny $A \subset R$ (**uzáverom v množine** R) nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých hromadných bodov $a \in R$ množiny A. Uzáver množiny A označujeme symbolom $\overline{A}$.

Množina $A \subset R$ sa nazýva **uzavretá** (**uzavretá v množine** R), ak obsahuje všetky svoje hromadné body $a \in R$, t.j. ak $A = \overline{A}$.

Bod $a \in A$, ktorý nie je hromadným bodom množiny A sa nazýva **izolovaný bod množiny** A. Množina, ktorá obsahuje iba izolované body sa nazýva **izolovaná množina**.

Množina $A \subset R$ sa nazýva **otvorená**, ak každý jej bod je vnútorný, t.j. ak $A = \mathrm{int}\, A$.

Poznámka 2.2.3.
Množina prirodzených čísel $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ nemá hromadný bod patriaci do R. Ale je zrejmé, že v každom okolí bodu ∞ leží aspoň jedno prirodzené číslo. Preto rozšírime definíciu hromadného bodu na množinu $R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ a pri vyšetrovaní hromadných bodov, budeme overovať aj body $\pm\infty$.

Bod $a \in R^*$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $A \subset R^*$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a.

Poznámka 2.2.4.
Je zrejmé, že ak v danom okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod, ktorý je rôzny od a, leží ich tam nekonečne veľa. To znamená, že $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží nekonečne veľa rôznych bodov z množiny A.
Z definície vyplýva, že ak bod a je hromadným bodom množiny $A \subset R$, potom je tiež hromadným bodom ľubovoľnej jej nadmnožiny $B \subset R$.

Príklad 2.2.3.
a) Množiny $\emptyset$, R sú otvorené a zároveň uzavreté (v R).

b) Interval $(0\,;\,1)$ je otvorená množina, $\langle 0\,;\,1\rangle$ je uzavretá množina,[14] $(0\,;\,1\rangle$, $\langle 0\,;\,1)$ nie sú ani otvorené ani uzavreté množiny. Uzáverom všetkých týchto množín je $\langle 0\,;\,1\rangle$.

c) Interval $(-\infty\,;\,1)$ je otvorená množina. Jeho uzáverom je množina $(-\infty\,;\,1\rangle \cup \{-\infty\}$.

d) Množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nemá hromadné body. To znamená, že obsahuje všetky svoje hromadné body a je uzavretá. Navyše každý jej bod je izolovaný.

e) Množina $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ neobsahuje svoj hromadný bod ∞, preto nie je uzavretá. Všetky jej body sú izolované, takže je izolovaná.

f) Množina $Q = \{m/n\,;\, m \in Z, n \in N\}$ nie je uzavretá, pretože neobsahuje všetky svoje hromadné body (neobsahuje napríklad hromadný bod $\sqrt{2}$). Nie je ani otvorená, pretože žiaden jej bod nie je vnútorný. ■

Príklad 2.2.4.
Množina $\left\{\frac{1}{n}, n\,;\, n \in N\right\} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots\right\}$ má dva hromadné body 0, ∞. ■

Veta 2.2.2.
Nech $A \subset R$, potom A je otvorená práve vtedy, ak $A' = R - A$ je uzavretá.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech je A otvorená a A' nie je uzavretá.
A' nie je uzavretá, t.j. existuje jej hromadný bod $a \in R$ taký, že $a \notin A'$, t.j. $a \in A$.
A je otvorená, potom existuje okolie $O(a) \subset A$, t.j. $O(a) \cap A' = \emptyset$. To je ale spor s tým, že a je hromadný bod A'.

$PP_{\Leftarrow}$: Sporom. Nech A' je uzavretá a A nie je otvorená.
A nie je otvorená, t.j. existuje bod $a \in A$, ktorý nie je vnútorný. To znamená, že a je hraničný bod a v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod $b \in A'$, $b \neq a$. To znamená, že $a \in A$, t.j. $a \notin A'$, je hromadný bod množiny A'. Spor s tým, že A' je uzavretá. ■

[12] T.j. v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A a aspoň jeden bod z množiny A'.
[13] T.j. pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.
[14] Preto aj názov otvorený a uzavretý interval.

Veta 2.2.3.
Ak sú množiny $A, B \subset R$ otvorené, potom sú množiny $A \cap B$, $A \cup B$ tiež otvorené.

Dôkaz.
Nech $a \in A \cap B$, potom existujú okolia $O_1(a) \subset A$, $O_2(a) \subset B$. Potom na základe axiómy (O3) existuje okolie $O(a) \subset O_1 \cap O_2 \subset A \cap B$, t.j. $A \cap B$ je otvorená.
Nech $a \in A \cup B$, potom $a \in A$ alebo $a \in B$. To znamená, že a je vnútorným bodom množiny A alebo vnútorným bodom množiny B, t.j. je vnútorným bodom množiny $A \cup B$. To znamená, že je množina $A \cup B$ otvorená. ■

Veta 2.2.4.
Ak sú množiny $A, B \subset R$ uzavreté, potom sú množiny $A \cap B$, $A \cup B$ tiež uzavreté.

Dôkaz.
A, B sú uzavreté, potom sú otvorené A', B', $A' \cup B'$, $A' \cap B'$ a uzavreté množiny

$$(A' \cup B')' = A'' \cap B'' = A \cap B, \qquad (A' \cap B')' = A'' \cup B'' = A \cup B. \ ■$$

Veta 2.2.5.
Ak sú množiny $A_k \subset R$, $k \in N$ otvorené, potom je množina $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ otvorená.

Dôkaz.
Nech $a \in A$, potom existuje otvorená množina A_m taká, že $a \in A_m$. Keďže je a vnútorným bodom množiny A_m, je tiež vnútorným bodom nadmnožiny A. To znamená, že A je otvorená množina. ■

Veta 2.2.6.
Ak sú množiny $A_k \subset R$, $k \in N$ uzavreté, potom je množina $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ uzavretá.

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že A'_k a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k$ sú otvorené množiny. Potom na základe de Morganových zákonov (poznámka 1.3.2) je množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right]'$ uzavretá. ■

Príklad 2.2.5.
a) Množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right) = \{0\}$ nie je otvorená, je uzavretá. To znamená, že prienik nekonečného systému otvorených množín nemusí byť otvorená množina.
b) Množina $\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k}\right\} = \left\{\frac{1}{k};\, k \in N\right\}$ nie je uzavretá, pretože neobsahuje číslo 0, ktoré je jej hromadným bodom. To znamená, že zjednotenie nekonečného systému uzavretých množín nemusí byť uzavretá množina. ■

2.2.3 Metrické vlastnosti čísel

S pojmami ako dĺžka vektora, skalárny súčin dvoch vektorov, vzdialenosť dvoch bodov sme sa už stretli v analytickej geometrii. Tieto pojmy predstavujú metrické vlastnosti množiny a v tejto časti sa budeme zaoberať metrickými vlastnosťami reálnych čísel.

Množinu $R^1 = R$ môžeme považovať za špeciálny prípad množiny R^n, $n \in N$. Preto sa sústredime na množinu R^n všeobecne pre $n \in N$. Ako vieme z algebry ([33], str. 86), množina $R^n = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n)\,;\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$ je lineárny priestor. Nazývame ho **Euklidov** (**euklidovský**) **n-rozmerný priestor** a jeho prvky zvykneme nazývať **vektory** (**n-rozmerné vektory**).

Nech $x, y \in R^n$, $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$, potom **skalárnym súčinom vektorov x a y** nazývame číslo definované vzťahom

$$(x, y) = ((x_1; x_2; \ldots; x_n), (y_1; y_2; \ldots; y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Pomocou skalárneho súčinu môžeme vybudovať v priestore R^n geometriu s použitím vzdialeností a uhlov, ako sme zvyknutí v rovine, resp. v priestore. Základné vlastnosti práve definovaného skalárneho súčinu sú uvedené v nasledujúcej vete.

Poznámka 2.2.5.
S pojmom vektor sme sa už stretli v geometrii. Vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$ graficky predstavuje orientovanú úsečku z bodu[15] $O = (0; 0; \ldots; 0)$ do bodu $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$.
Orientovanú úsečku z bodu $A = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ do $B = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ reprezentuje vektor $B - A = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; \ldots; b_n - a_n)$.

[15] To znamená, že vektor vyjadruje smer a vzdialenosť od začiatku súradnicového systému O.

Veta 2.2.7.
Nech $x, y, z \in R^n$, $n \in N$ a nech $c \in R$, potom platí:
a) $(x, y) \geq 0$, $(x, x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = (0;\, 0;\, \ldots;\, 0)$, b) $(x, y) = (y, x)$,
c) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, d) $(cx, y) = c\,(x, y)$.

Dôkaz.
Vyplýva priamo z definície. ■

Nech $x = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) \in R^n$, $n \in N$, potom číslo $|x|$ definované vzťahom

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

nazývame (**euklidovská**) **norma vektora** x. Vektor $x \in R^n$, pre ktorý platí $|x| = 1$ nazývame **jednotkový**, resp. **normovaný vektor**. Norma vektora $x \in R^n$ predstavuje z geometrického hľadiska dĺžku vektora x, preto sa niekedy nazýva **dĺžka vektora** x.

V priestore R sa norma vektora $x \in R$, t.j. reálneho čísla x, redukuje na absolútnu hodnotu. Vyplýva to zo vzťahov $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^2} = |x|$.

Nasledujúca nerovnosť je známa pod názvom Cauchyho nerovnosť a formuluje sa v rôznych tvaroch. Uvádzame ju bez dôkazu.

Lema 2.2.8 (Cauchyho nerovnosť).
Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n,\; y_1, y_2, \ldots, y_n \in R$, $n \in N$, potom $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

Poznámka 2.2.6.
Ak $x, y \in R^n$, $x = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, $y = (y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)$, potom Cauchyho nerovnosť môžeme formálne písať v tvare $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, resp. $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$.

Veta 2.2.9.
Nech $x, y \in R^n$, $n \in N$ a nech $c \in R$, potom platí:
a) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = (0;\, 0;\, \ldots;\, 0)$, b) $|cx| = |c| \cdot |x|$, c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Dôkaz.
a) Vyplýva priamo z definície.
b) $|cx| = \sqrt{(cx, cx)} = \sqrt{c\,(x, cx)} = \sqrt{c\,(cx, x)} = \sqrt{c^2\,(x, x)} = |c|\,\sqrt{(x, x)} = |c| \cdot |x|$.
c) Nech $x = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, $y = (y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)$, potom na základe lemy 2.2.8 platí

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 =$$

$$= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \right]^2 = (|x| + |y|)^2 . \;■$$

Nech $x, y \in R^n$, pričom $x = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, $y = (y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)$, potom zobrazenie $\rho\colon\; R^n \times R^n \to R$ definované vzťahom

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

nazývame (**euklidovská**) **metrika priestoru** R^n a číslo $\rho(x, y)$ nazývame **vzdialenosť vektorov** x **a** y.

Poznámka 2.2.7.
Euklidovská metrika reprezentuje vzdialenosť bodov, ako ju poznáme z geometrie.
Napríklad pre všetky $x, y \in R$ platí $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$
a pre všetky $x, y \in R^2$, $x = (x_1;\, x_2)$, $y = (y_1;\, y_2)$ platí $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Veta 2.2.10.
Nech $x, y, z \in R^n$, $n \in N$, potom platí:
a) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Dôkaz.
a), b) Vyplýva z definície.
c) $\rho(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. ■

Poznámka 2.2.8.
Nerovnosť c) vo vete 2.2.9 a c) vo vete 2.2.10 nazývame **trojuholníková nerovnosť**. Je to analógia z geometrie známej nerovnosti, ktorá vyjadruje vzťah medzi dĺžkami strán v trojuholníku.

Cvičenia

2.2.1. Dokážte, že v euklidovskom priestore R^n, $n \in N$ je zjednotením konečného počtu otvorených množín otvorená množina a zjednotením konečného počtu uzavretých množín uzavretá množina.

2.2.2. Dokážte Cauchyho nerovnosť (lema 2.2.8). [Návod: Pre všetky $t \in R$, $x, y \in R^n$ platí $P(t) = \sum_{i=1}^{n}(tx_i + y_i)^2 \geq 0$. To znamená, že kvadratická rovnica $P(t) = 0$ má najviac jeden reálny koreň, t.j. záporný diskriminant. Iný návod: Pre všetky $x, y \in R^n$ platí $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$.]

2.2.3. Nájdite všetky hromadné body množín:
a) $\{m^{-1} + n^{-1} ;\, m, n \in N\}$, b) $\{m^{-2} + n^{-1} ;\, m, n \in N\}$, c) $\{n^{-1} ;\, n \in N\}$,
d) $\{m^{-2} + n ;\, m, n \in N\}$, e) $\{m^{-1} + n^2 ;\, m, n \in N\}$, f) $\{n^{-2} ;\, n \in N\}$,
g) $\{p^2 + q^2 ;\, p, q \in Q\}$, h) $\{n^{-1} + p^2 ;\, n \in N,\ p \in Q\}$, i) $\{p^{-2} ;\, p \in Q\}$.

2.2.4. Dokážte, že každá množina, ktorá má nekonečne veľa prvkov, má aspoň jeden hromadný bod.

2.3 Postupnosti reálnych čísel

2.3.1 Základné pojmy

Postupnosťou reálnych čísel (**reálnou postupnosťou**) nazývame každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej množina hodnôt (obor hodnôt) je podmnožina množiny R. To znamená, že všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$. Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom postupnosť rozumieť postupnosť reálnych čísel.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame **explicitným** (**všeobecným**) **vyjadrením** člena a_n ako funkciu premennej n alebo **rekurentným zadaním** prvého člena a člena a_n pomocou predchádzajúcich členov. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadaná **explicitne** (**všeobecným vzorcom**), resp. **rekurentne**.

Hovoríme, že **postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$** (**postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovnajú**) práve vtedy, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$. Rovnosť postupností symbolicky zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 2.3.1.
Nesmieme zabúdať, že reálna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zobrazením $f\colon N \to R$, t.j.
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{[n; f(n)] ;\, n \in N\} = \{[1; f(1)], [2; f(2)], [3; f(3)], \ldots, [n; f(n)], \ldots\}.$$
To znamená, že každý člen a_n prakticky predstavuje usporiadanú dvojicu $[n; f(n)]$.

Príklad 2.3.1.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ môžeme explicitne zadať vzťahom $a_n = 2n - 1$, $n \in N$ a rekurentne vzťahmi $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$ pre $n \in N$.
b) Postupnosť $\{5^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rekurentne zadaná vzťahmi $a_1 = 25$, $a_{n+1} = 25a_n$, $n \in N$.
c) Explicitný zápis $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Poznámka 2.3.2.
Niekedy definujeme postupnosť nie od prvého člena, ale od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. Postupnosť potom zapisujeme[16] $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$. Ak pre $n \in N$ označíme $b_n = a_{n+k-1}$, potom platí:
$$\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \{a_{1+k-1}, a_{2+k-1}, \ldots\} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **ohraničená zdola** [resp. **zhora**], ak existuje $m \in R$ [resp. $M \in R$] také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$ [resp. $a_n \leq M$].

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **ohraničená**, ak je ohraničená zdola a zároveň zhora, t.j. ak existujú $m, M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n \leq M$.

Ak nie je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zdola [resp. zhora], potom sa nazýva **neohraničená zdola** [resp. **zhora**]. Ak nie je ohraničená, nazýva sa **neohraničená**.[17]

[16] V praxi sa často stretávame s postupnosťami $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zadanými od nultého člena.
[17] To znamená, že postupnosť je neohraničená, ak nie je ohraničená zdola alebo nie je ohraničená zhora.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **rastúca** [resp. **klesajúca**], ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n < a_{n+1}$ [resp. $a_n > a_{n+1}$].
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **neklesajúca** [resp. **nerastúca**], ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n \le a_{n+1}$ [resp. $a_n \ge a_{n+1}$].
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **stacionárna** (**konštantná**), ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n = a_1 = a$, t.j. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **monotónna**, ak je neklesajúca, nerastúca alebo stacionárna. Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca alebo klesajúca, potom sa nazýva **rýdzo monotónna**.

Nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Potom sa postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť** (**vybraná postupnosť z**) **postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 2.3.2.
Určíme niektoré vybrané postupnosti z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak vyberieme párne členy, t.j. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2,4,6,8,\ldots\}$, potom

$$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2,a_4,a_6,a_8,\ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{3,7,11,15,19,\ldots\}.$$

Ak $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1,4,9,16,\ldots\}$, potom

$$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{n^2}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1,a_4,a_9,a_{16},\ldots\} = \left\{2n^2-1\right\}_{n=1}^{\infty} = \{1,7,17,31,\ldots\}.$$

Vybrané sú tiež postupnosti $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$, $POSTUPNOST[2]2n-1$, $\{101,109,235,637,\ldots\}$. ■

Súčtom, **rozdielom**, **súčinom**, resp. **podielom postupností** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **a** $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosti $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$. V prípade podielu predpokladáme, že pre všetky $n\in N$ platí $b_n\neq 0$.

Poznámka 2.3.3.
Z danej postupnosti môžeme vytvoriť nové postupnosti mnohými spôsobmi, napríklad

$$\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{a_n^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{a_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{\sin a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{\ln a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{5a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

2.3.2 Limita postupnosti

Jedným zo základných pojmov v matematickej analýze je limita a s ňou spojené limitné procesy. S tým súvisí pojem hromadná hodnota postupnosti.

Príklad 2.3.3.
a) Uvažujme postupnosť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}.$$

Postupnosť je klesajúca a s rastúcou hodnotou n sa členy a_n blížia k bodu 0. Bod 0 je hranica, ktorú nikdy neprekročia. Môžeme povedať, že sa body a_n hromadia v bode 0.
b) Uvažujme postupnosť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n,n^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1,1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},4,\frac{1}{4},\ldots,n,\frac{1}{n},\ldots\right\}.$$

Nepárne členy a_n sa neobmedzene zväčšujú a párne členy zmenšujú. Nepárne sa približujú (hromadia) k bodu ∞. Párne členy sa približujú (hromadia) k bodu 0. ■

Hovoríme, že bod $a\in R^*$ je **hromadnou hodnotou** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že $a_n\in O(a)$.

Ak $a\in R$, potom hovoríme o **vlastnej hromadnej hodnote**. Ak $a=-\infty$ alebo $a=\infty$, potom hovoríme o **nevlastnej hromadnej hodnote**.

Poznámka 2.3.4.
Bod $a\in R$ je vlastnou hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé $\varepsilon>0$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že platí $a_n\in(a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon)$, t.j. $|a_n-a|<\varepsilon$.
Bod ∞ [resp. $-\infty$] je nevlastnou hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé $K\in R$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že $K<a_n$ [resp. $a_n<K$].

Veta 2.3.1.
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu.

Dôkaz.
Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zhora, potom pre každé $\alpha\in R$ existuje aspoň jedno $a_n>\alpha$. Vzhľadom na to, že čísel väčších ako α existuje nekonečne veľa, musí existovať aj nekonečne veľa členov $a_n>\alpha$. To znamená, že $a=\infty$ je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zdola, potom analogicky je hromadnou hodnotou $a=-\infty$.

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, potom existuje interval $\langle b_1 ; c_1\rangle$ taký, že všetky $a_n \in \langle b_1 ; c_1\rangle$. Označme jeho dĺžku $d = c_1 - b_1$ a rozdeľme ho na dva rovnaké intervaly

$$\langle b_1 ; (b_1+c_1)/2\rangle\,, \qquad \langle (b_1+c_1)/2 ; c_1\rangle\,.$$

V aspoň jednom z nich leží nekonečne veľa členov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme ho $\langle b_2 ; c_2\rangle$. Pre jeho dĺžku platí $c_2 - b_2 = d/2 = d/2^{2-1}$. Rozdeľme $\langle b_2 ; c_2\rangle$ na dva rovnaké intervaly

$$\langle b_2 ; (b_2+c_2)/2\rangle\,, \qquad \langle (b_2+c_2)/2 ; c_2\rangle\,.$$

V aspoň jednom z nich leží nekonečne veľa členov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme ho $\langle b_3 ; c_3\rangle$. Pre jeho dĺžku platí $c_3 - b_3 = d/2^2 = d/2^{3-1}$. Rozdeľme $\langle b_3 ; c_3\rangle$ na dva rovnaké intervaly, atď.

Predpokladajme, že pre $m \in N$ máme zostrojený interval $\langle b_m ; c_m\rangle$. Rozdelíme ho na dva rovnaké intervaly a symbolom $\langle b_{m+1} ; c_{m+1}\rangle$ označme ten z intervalov

$$\langle b_m ; (b_m+c_m)/2\rangle\,, \qquad \langle (b_m+c_m)/2 ; c_m\rangle\,.$$

v ktorom leží nekonečne veľa členov a_n. Pre jeho dĺžku platí $c_{m+1} - b_{m+1} = d/2^m$.
Je zrejmé, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle b_m ; c_m\rangle$ taký, že $c_m - b_m < d/2^{m-1} < \varepsilon$.

Potom (veta 2.1.11) existuje práve jeden bod $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \langle b_m ; c_m\rangle$.

Ak to zhrnieme, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle b_m ; c_m\rangle$, v ktorom leží nekonečne veľa členov a_n, pre ktoré platí $|a_n - a| \leq c_m - b_m < \varepsilon$. To znamená, že a je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Dôsledok 2.3.1.a.
Ak je postupnosť ohraničená, potom má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R$. Ak je neohraničená zhora [resp. zdola], potom má hromadnú hodnotu ∞ [resp. $-\infty$].

Označme symbolom E **množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Suprémum množiny E nazývame **limes superior** (**horná limita**) **postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Analogicky infimum množiny E nazývame **limes inferior** (**dolná limita**) **postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bod $a \in R^*$ nazývame **limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak je a jedinou hromadnou hodnotou tejto postupnosti, t.j. ak platí $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme symbolom $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Príklad 2.3.4.
a) Postupnosť $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a 1.
b) Postupnosť $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ má jednu nevlastnú hromadnú hodnotu ∞.
c) Postupnosť $\{n, -n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 2, -2, \ldots\}$ má dve hromadné hodnoty $\pm\infty$.
d) Postupnosť $\{n, n^{-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, 1/2, 3, 1/3, \ldots\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a ∞.
e) Postupnosť $\{0, n^{-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, \ldots\}$ má jednu hromadnú hodnotu 0. ■

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$, potom bod a nazývame **vlastná limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje k číslu** a. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **konvergentná postupnosť**.

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ [resp. $-\infty$], potom bod $\pm\infty$ nazývame **nevlastná limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje do** ∞, [resp. $-\infty$].

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **osciluje**.

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje**, ak osciluje alebo diverguje do $\pm\infty$. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $a \in R$, potom hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje**.

Poznámka 2.3.5.
Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a, diverguje do $-\infty$, resp. ∞, budeme niekedy zjednodušene písať $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto -\infty$, resp. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$.

Príklad 2.3.5.
a) Postupnosti $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n, -n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n, n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ oscilujú, t.j. nemajú limity.
b) Limita postupností $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{0, n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná 0, t.j. konvergujú k číslu 0.
c) Postupnosti $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^3\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^n\}_{n=1}^{\infty}$ divergujú do ∞. ■

Príklad 2.3.6.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty}$, $a \in R$ je konštantná postupnosť, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$. ■

Z definície vyplýva, že ak existuje limita postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom existuje jediná.

Veta 2.3.2.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R^*$ práve vtedy, ak pre každé okolie $O(a)$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \in O(a)$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech existuje $O(a)$ také, že pre všetky $n_0 \in N$ existuje $n \geq n_0$ také, že $a_n \notin O(a)$. T.j. existuje nekonečne veľa $a_n \notin O(a)$. Potom na základe dôkazu vety 2.3.1 má postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ďalšiu hromadnú hodnotu $b \neq a$. To je spor s definíciou limity.

$PP_{\Leftarrow}$: Je zrejmé, že a je hromadným bodom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukážeme sporom, že je jediným. Ak $b \neq a$ je hromadným bodom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(b)$ existuje nekonečne veľa $a_n \in O(b)$. Ak zvolíme $O(b) \cap O(a) = \emptyset$, potom neexistuje n_0 také, aby pre všetky $n \geq n_0$ platilo $a_n \in O(a)$. To je spor. ■

Z poznámky 2.3.4 a z predchádzajúcej vety vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists n_0 \in N\; \forall n \in N, n \geq n_0 \colon\; a_n \in (a-\varepsilon\,;\, a+\varepsilon)\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in R\; \exists n_0 \in N\; \forall n \in N, n \geq n_0 \colon\; \alpha < a_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in R\; \exists n_0 \in N\; \forall n \in N, n \geq n_0 \colon\; a_n < \alpha.$$

Veta 2.3.3.
Bod $a \in R^*$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak existuje vybraná postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Nech $a \in R^*$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak $a \in R$, potom pre každé $k \in N$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $|a_n - a| < k^{-1}$. Potom postupne pre každé k vyberieme jeden z týchto členov tak, aby jeho index bol väčší ako index predtým vybratého a označíme a_{k_n}. Z konštrukcie vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Ak $a = \infty$ [resp. $a = -\infty$], potom pre každé $k \in N$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že platí $k < a_n$ [$a_n < k$]. Analogicky zvolíme pre každé $k \in N$ jeden z nich a označíme a_{k_n}, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$ [resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = -\infty$].

$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z definície hromadnej hodnoty a limity. ■

Príklad 2.3.7.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,1,0,1,\dots\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a 1. Vybrané postupnosti sú napr. $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{0,0,\dots\} \longmapsto 0$, $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1,1,\dots\} \longmapsto 1$.
b) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-n,0,n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,0,1,-2,0,2,-3,0,3,\dots\}$ má tri hromadné hodnoty $\pm\infty$, 0, pričom príslušné vybrané postupnosti sú napríklad

$$\{-1,-2,-3,\dots,-n,\dots\} \longmapsto -\infty, \quad \{0,0,0,\dots\} \longmapsto 0, \quad \{1,2,3,\dots,n,\dots\} \longmapsto \infty. \blacksquare$$

V mnohých prípadoch môžeme o konvergencii postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali jej limitu. Táto skutočnosť vyplýva z axiómy o najmenšom hornom ohraničení. Základné kritérium je uvedené v nasledujúcej vete a uvádzame ho bez dôkazu.

Veta 2.3.4 (Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie postupnosti).
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

2.3.3 Prehľad základných tvrdení

V tejto časti sformulujeme a dokážeme niektoré jednoduché tvrdenia, ktoré nám uľahčia prácu s postupnosťami a hlavne s limitami postupností. Ako sme už uviedli, pod pojmom postupnosť budeme rozumieť postupnosť reálnych čísel.

Veta 2.3.5.
Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov množiny A, kde $a_n \neq a$ pre všetky $n \in N$ taká, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dôkaz.
Z poznámky 2.2.4 vyplýva, že bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží nekonečne veľa bodov, ktoré sú rôzne od bodu a.
Na druhej strane je bod a hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že v každom jeho okolí leží nekonečne veľa bodov z tejto postupnosti, t.j. bodov $a_n \in A$, $a_n \neq a$.
Keďže uvedené tvrdenia sú ekvivalentné, dôkaz je ukončený. ■

Príklad 2.3.8.
Bod 0 je hromadným bodom intervalu $(0\,;\,2)$. Postupnosť $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu 0 a pre všetky $n\in N$ platí $n^{-1}\neq 0$, $n^{-1}\in(0\,;\,2)$. ■

Veta 2.3.6.
Nech existuje $k\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq k$ platí $a_n=b_n$.
Potom množiny hromadných hodnôt postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovnajú.

Dôkaz.
Ak $a\in R^*$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom jej okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa bodov $a_n=b_n$. To znamená, že a je hromadným bodom $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak $b\in R^*$ je hromadnou hodnotou $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(b)$ existuje nekonečne veľa bodov $b_n=a_n$. To znamená, že b je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Dôsledok 2.3.6.a.
Nech existuje $k\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq k$ platí rovnosť $a_n=b_n$.
Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje práve vtedy, ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a limity sa rovnajú.

Poznámka 2.3.6.
Z vety 2.3.6 vyplýva, že **konečný počet členov postupnosti neovplyvní konvergenciu, resp. divergenciu postupnosti**. V budúcnosti budeme tvrdenia pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formulovať v zjednodušenom tvare pre všetky členy a_n. V zmysle vety 2.3.6 budú tieto tvrdenia platiť aj v prípade, keď vynecháme konečný počet členov.

Veta 2.3.7.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť a nech $a\in R^*$, potom
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ práve vtedy, ak pre každú podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}=a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto b$, kde $b\neq a$. Z vety 2.3.3 vyplýva, že b je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve rôzne hromadné hodnoty a nemá limitu. To je spor.
$PP_{\Leftarrow}$: Z vety 2.3.3 vyplýva, že bod a je jedinou hromadnou hodnotou posupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. ■

Dôsledok 2.3.7.a.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, potom pre všetky $k\in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}=a$.

Dôsledok 2.3.7.b.
Ak sa z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dajú vybrať podpostupnosti $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{l_n}\}_{n=1}^{\infty}$,
pre ktoré platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}\neq\lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Príklad 2.3.9.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}=\{0,2,0,2,\ldots\}$ osciluje. Stačí vybrať konštantné postupnosti $\{0,0,0,\ldots\}=\{0\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto 0$ a $\{2,2,2,\ldots\}=\{2\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto 2$.
b) Bod 0 je jediná hromadná hodnota postupnosti $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. ■

Veta 2.3.8.
Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, potom je ohraničená.

Dôkaz.
Sporom. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a nie je ohraničená.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora, potom z dôsledku 2.3.1.a vyplýva, že ∞ je jej hromadným bodom. To je spor s konvergenciou a znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zdola, dôkaz je analogický. ■

Poznámka 2.3.7.
Opačné tvrdenie neplatí. Ohraničená postupnosť nemusí konvergovať. Napríklad postupnosť $\{-1,1,-1,1,\ldots\}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ale nekonverguje.

Veta 2.3.9 (Bolzano–Weierstrass).
Z každej ohraničenej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

Dôkaz.
Z vety 2.3.1 vyplýva, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu reálnu hromadnú hodnotu a. Z vety 2.3.3 vyplýva existencia vybranej postupnosti, ktorá konverguje k a. ■

Veta 2.3.10.
Každá monotónna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu.

Poznámka 2.3.8.
Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, potom je jej limita reálne číslo a ak nie je ohraničená potom má nevlastnú limitu ∞ (v prípade neklesajúcej postupnosti) alebo $-\infty$ (v prípade nerastúcej postupnosti).

Základom pre výpočet zložitejších limít a zjednodušenie tohto výpočtu je použitie nasledujúcich dvoch viet a ich dôsledkov.

Veta 2.3.11.
Nech $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. Ak majú príslušné výrazy zmysel, potom platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

Veta 2.3.12.
Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$. Ak limity existujú, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Poznámka 2.3.9.
Tvrdenie vety 2.3.12 sa nezmení, ak nahradíme predpoklad $a_n \leq b_n$ nerovnosťou $a_n < b_n$.
Napríklad pre všetky $n \in N$, $n \neq 1$ platí $n < n^2$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Dôsledok 2.3.12.a (Veta o zovretí).
Nech pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.
Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Dôkaz.
Vyplýva z nerovností $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} c_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Veta 2.3.13.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, potom existuje $n_0 \in N$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

Dôkaz.
Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, potom existujú okolia $O(a) \cap O(b) = \emptyset$.
Z vety 2.3.2 vyplýva, že existujú $n_1, n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí $a_n \in O(a)$ a pre všetky $n \in N$, $n \geq n_2$ platí $b_n \in O(b)$.
Keďže $a < b$, potom pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n < b_n$. ■

Príklad 2.3.10.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

Riešenie.
Ak $q = 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.
Nech $q > 0$, potom pre všetky $n \in N$ platí $n^q < (n+1)^q$, t.j. je postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca. Je zrejmé, že je tiež neohraničená zhora.
To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.
Ak $q < 0$, t.j. $-q > 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0$. ■

Poznámka 2.3.10.
Z príkladu 2.3.10 a vety 2.3.11 vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0, & \text{pre } q < 0, \\ 1, & \text{pre } q = 0, \\ \infty, & \text{pre } q > 0, \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \begin{cases} \infty, & \text{pre } q < 0. \\ 1, & \text{pre } q = 0, \\ 0, & \text{pre } q > 0, \end{cases}$$

Ak niektorý z čiastkových výrazov nemá zmysel, neznamená to ešte, že daná limita neexistuje. V tomto prípade musíme nájsť limitu iným spôsobom. Niekedy pomôže vhodná úprava výrazu, ktorým je daná postupnosť definovaná.

Príklad 2.3.11.
a) Limity $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ neexistujú, ale

$$\lim_{n\to\infty}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]=\lim_{n\to\infty}0=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}|(-1)^n|=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

b) Pre limity $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}=0$ platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\lim_{n\to\infty}(n-1)=\infty\cdot\infty=\infty,$$

aj keď nasledujúce výrazy nemajú zmysel

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n^2}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\frac{\infty}{\infty}, \qquad \lim_{n\to\infty}n^2-\lim_{n\to\infty}n=\infty-\infty. \blacksquare$$

Príklad 2.3.12.
Vypočítajte limitu postupnosti $\left\{\frac{n^2+n}{n^2-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2-2}$.

Riešenie.
Pre danú limitu platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\frac{1+0}{1-0}=1. \blacksquare$$

Príklad 2.3.13.
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^3-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(n^{-1}+n^{-2})}{n^3(1-2n^{-3})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-1}+n^{-2}}{1-2n^{-3}}=\frac{0+0}{1-0}=0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(n-2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2n^{-2}}{1+n^{-1}}=\frac{\infty-0}{1+0}=\infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-n^3}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4(1-n^{-1})}{n^2(1+n^{-1})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}}=\infty\cdot\frac{1-0}{1+0}=\infty. \blacksquare$

Poznámka 2.3.11.
Hodnotu limity môžeme vypočítať rôznymi spôsobmi.
Musíme si ale dávať pozor, aby sme nedostali nedefinované výrazy, ako napríklad

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-n^3}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2-n)}{n^2(1+n^{-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{1+n^{-1}}=\frac{\infty-\infty}{1+0}=\infty-\infty.$$

Veta 2.3.14.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Vyplýva z vety 2.3.11 c).
$PP_{\Leftarrow}$: Pre každé $n\in N$ platí $-|a_n|\le a_n\le |a_n|$. Potom na základe vety o zovretí platí:

$$0=-\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}|a_n|=0, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{n\to\infty}a_n=0. \blacksquare$$

Príklad 2.3.14.
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right]=\infty\cdot(1-\infty)=-\infty.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1}-n\right]\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n^2}{\sqrt{n+1}+n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\,\frac{1+n^{-1}-n}{\sqrt{n^{-1}+n^{-2}}+1}=\frac{1+0-\infty}{0+1}=-\infty.\quad\blacksquare$$

Príklad 2.3.15.
Vypočítajte limitu **geometrickej postupnosti** $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$, kde $a\in R$.

Riešenie.
Ak $a>1$, potom $a^n\longmapsto\infty$. Ak $a=1$, potom $a^n=1$. Ak $a\in(-1\,;\,1)$, potom $a^n\longmapsto 0$.
Ak $a=-1$, potom pre párne $n=2k$ platí $a^n=a^{2k}\longmapsto 1$ a pre nepárne $n=2k-1$ platí $a^n=a^{2k-1}\longmapsto -1$. Ak $a<-1$, potom pre párne $n=2k$ platí $a^n=a^{2k}\longmapsto\infty$ a pre nepárne $n=2k-1$ platí $a^n=a^{2k-1}\longmapsto-\infty$.

Ak to zhrnieme, potom $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}\nexists, & \text{pre } a\in(-\infty\,;\,-1\rangle\,,\\ 0, & \text{pre } a\in(-1\,;\,1)\,,\\ 1, & \text{pre } a=1,\\ \infty, & \text{pre } a\in(1\,;\,\infty)\,.\blacksquare\end{cases}$

Veta 2.3.15.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť taká, že pre všetky $n\in N$ platí $a_n>0$.
Potom (pokiaľ uvedené limity existujú) platí rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Veta 2.3.16.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, nech $a_n\geq 0$ pre všetky $n\in N$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a\in R^*$.

a) Ak $a<1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

b) Ak $a>1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Dôkaz.
a) Zvoľme $q\in R$ tak, aby $a<q<1$. Potom (veta 2.3.13) existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n}<q$, t.j. $0\leq a_n<q^n$. Z toho vyplýva

$$0\leq\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}q^n=0,\quad\text{t.j.}\quad\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

b) Zvoľme $q\in R$, aby $1<q<a$. Potom existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $q<\sqrt[n]{a_n}$, t.j. $q^n<a_n$. Z toho vyplýva $\infty=\lim\limits_{n\to\infty}q^n\leq\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. $\blacksquare$

Dôsledok 2.3.16.a.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, nech $a_n>0$ pre všetky $n\in N$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a\in R^*$.

a) Ak $a<1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

b) Ak $a>1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Poznámka 2.3.12.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, potom vo všeobecnosti o konvergencii postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nevieme rozhodnúť. Napríklad pre postupnosti $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1,\quad\text{ale}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad\lim_{n\to\infty}1=1,\quad\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Na záver tejto časti uvedieme bez výpočtu niektoré dôležité limity, na ktoré sa budeme v budúcnosti odvolávať, a vyriešime niektoré ukážkové príklady.

Veta 2.3.17.
Nech $a,b\in R$, $a>0$, potom platí:[18]

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^n=\mathrm{e}^b$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1\right)=1$,

h) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$.

[18] Číslo e nazývame **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je približne $2{,}718\,281\,827$.

Príklad 2.3.16.
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^2=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^2=\mathrm{e}^2.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^n=\mathrm{e}^\infty=\infty.$ ■

Príklad 2.3.17.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^q}{a^n}$, kde $a>0$, $q>0$.

Riešenie.
Ak $a=1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^q}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}n^q=\infty$.

Nech $a\neq 1$. Označme $a_n=\dfrac{n^q}{a^n}$, $n\in N$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}\frac{a^n}{n^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^q=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\frac{1}{a}\cdot 1^q=\frac{1}{a}.$$

T.j. pre $a>1$ platí $a^{-1}<1$ a pre $a<1$ platí $a^{-1}>1$. Potom (dôsledok 2.3.16.a) platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}=\infty \quad\text{pre}\quad a\leq 1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^q}{a^n}=0\quad\text{pre}\quad a>1. \blacksquare$$

Príklad 2.3.18.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

Riešenie.
Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pre $n\in N$ platí $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.
Tvrdenie vyplýva z vety 2.3.15 a zo vzťahu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\;n!}{(n+1)!\;n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.\blacksquare$$

Príklad 2.3.19.
Dokážte, že ak $a\in R$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

Riešenie.
Nech $k\in N$ je také, že $k>|a|>0$, t.j. $1>|a|/k$. Potom platí

$$0<\frac{|a|^n}{n!}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n}<\frac{1}{k!}\cdot\frac{|a|^n}{k\cdots k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{k^k}{k^k}\cdot\frac{|a|^n}{k^{n-k}}=\frac{k^k}{k!}\cdot\left[\frac{|a|}{k}\right]^n.$$

Z toho vyplýva

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n}{n!}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{k^k}{k!}\left[\frac{|a|}{k}\right]^n=\frac{k^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|a|}{k}\right]^n=0,\qquad\text{t.j.}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

Iné riešenie.
Označme $a_n=a^n/n!$, $n\in N$. Na základe viet 2.3.16 a 2.3.14 platí

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{|a|}{\infty}=0<1,\qquad\text{t.j.}\quad 0=\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

Iné riešenie.
Označme $a_n=a^n/n!$, $n\in N$. Potom na základe dôsledku 2.3.16.a platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{n+1}=\frac{|a|}{\infty}=0<1,\qquad\text{t.j.}\quad\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}a_n=0.\ \blacksquare$$

Príklad 2.3.20.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$, kde $a\in R$, $a>0$, $a\neq\mathrm{e}$.

Riešenie.
Označme $a_n=a^n n!/n^n$ pre $n\in N$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\;n^n}{(n+1)^n}=a\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1}=\frac{a}{\mathrm{e}}.$$

Potom (dôsledok 2.3.16.a) platí $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ pre $a<\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ pre $a>\mathrm{e}$. ■

Príklad 2.3.21.
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{2}-\dfrac{1+\cdots+n}{n+2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{2}-\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+2/n}=\dfrac{1}{2}.$
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^n}\dfrac{(2/3)^n+1}{2(2/3)^n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2/3)^n+1}{2(2/3)^n+3}=\dfrac{0+1}{2\cdot 0+3}=\dfrac{1}{3}.$ ■

Príklad 2.3.22.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-2^n}$.

Riešenie.
Pre všetky $n\in N$ platí $\dfrac{1}{3}=1-\dfrac{2}{3}\leq 1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<1$, t.j. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{3}}\leq\sqrt[n]{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}<1$.

Z toho vyplýva $1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3}}\leq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}\leq 1$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=1$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}=\lim_{n\to\infty}3\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3\cdot 1=3.$$ ■

Príklad 2.3.23.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}-1}=\infty$.

Riešenie.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Pre } n\in N,\ n>1 \text{ platí } \sqrt[n]{n}>1, \text{ t.j. } \sqrt[n]{n}-1>0.\\ \text{Keďže } \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \text{ potom } \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0.\end{array}\right\}\implies\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}-1}=\infty.$$ ■

Príklad 2.3.24.
Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_0\geq 0$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$.

Riešenie.
Označme $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Potom na základe dôsledku 2.3.7.a platí

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1},\quad \text{t.j.}\quad a^2=\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2=\lim_{n\to\infty}(a_n+6)=a+6.$$

To znamená, že a je riešením kvadratickej rovnice

$$a^2-a-6=(a-3)\cdot(a+2)=0.$$

Koreň $a=-2<0$ nevyhovuje. Z toho vyplýva $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

Ešte musíme ukázať, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
Ak $a_0=3$, potom pre všetky $n\in N$ platí $a_n=3$, t.j. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
Ak $a_0<3$, potom pre všetky $n\in N$ na základe matematickej indukcie platí $a_n<3$. Platí totiž

$$a_1=\sqrt{a_0+6}<\sqrt{3+6}=3,\qquad a_n<3\ \Rightarrow\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}<\sqrt{3+6}=3.$$

Keďže sú všetky členy a_n kladné a $a_n-3<0$, platí

$$a_n^2-a_{n+1}^2=a_n^2-a_n-6=(a_n-3)(a_n+2)<0,\quad \text{t.j.}\quad a_n^2<a_{n+1}^2,\quad \text{t.j.}\quad a_n<a_{n+1}.$$

To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, zhora ohraničená, t.j. konverguje.
Pre $a_0>3$ je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi ako cvičenie. ■

Príklad 2.3.25.
Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{0,2;\ 0,23;\ 0,233;\ 0,2333;\ \ldots\}$.

Riešenie.
Ak označíme $q=0,1<1$, potom pre $n\in N$ platí
$a_1=0,2,\quad a_2=0,2+0,03,\quad a_3=0,2+0,03+0,003=0,2+0,03(1+q),\quad \ldots,$
$a_n=0,2+0,03(1+q+\cdots+q^{n-2})=0,2+0,03(1-q^{n-1})/(1-q),\ \ldots$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[0,2+0,03\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right]=0,2+0,03\frac{1}{1-q}=0,2+\frac{0,03}{0,9}=\frac{7}{30}.$$ ■

Cvičenia

2.3.1. Napíšte niekoľko prvých členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vyslovte a dokážte hypotézu o monotónnosti a o ohraničenosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre všetky $n \in N$ platí:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, b) $a_n = \dfrac{n+3}{2n-1}$, c) $a_n = \dfrac{n^2+n}{n^2+1}$, d) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$,
e) $a_n = n^2 - 1$, f) $a_n = n^2 - n$, g) $a_n = (n^3+1)^{-1}$, h) $a_n = (-n)^{n-2}$,
i) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, j) $a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$, k) $a_n = \dfrac{n^4-n+1}{n^4+1}$.

2.3.2. Nájdite množinu hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak:
a) $a_n = 2/(n+3)$ pre n nepárne a $a_n = 3^{-n}$ pre n párne,
b) $a_n = (n+1)/(n-1)$ pre n nepárne a $a_n = 3^n/(1+3^n)$ pre n párne,
c) $a_n = 1+3^{-n}$ pre n nepárne a $a_n = n/(n+1)$ pre n párne,
d) $a_n = n/(2n+3)$ pre n nepárne a $a_n = (2n+3)/n$ pre n párne.

2.3.3. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje. Zistite, aké sú postupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady takýchto postupností.

2.3.4. Predpokladajme, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergujú. Zistite, aké sú postupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady takýchto postupností.

2.3.5. Nájdite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platí:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq 1$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) \neq 0$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

2.3.6. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadaná rekurentne vzťahmi $a_{n+1} = 1 + a_n - n$, $a_1 = 1$ je nerastúca a ohraničená zhora. Určte a dokážte všeobecný vzorec pre člen a_n, $n \in N$ a vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.3.7. Nájdite rekurentné vyjadrenie člena a_n, $n \in N$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:
a) $\{2^n + 3\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, c) $\{1 - n\}_{n=1}^{\infty}$, d) $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

2.3.8. Nájdite všeobecný vzorec pre n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne:
a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$, b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$, c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2(n+1)a_n$,

2.3.9. Nájdite množiny hromadných hodnôt nasledujúcich postupností:
a) $\{(-1)^n \sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\{(-n)^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$, c) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, d) $\{n^{-2n}\}_{n=1}^{\infty}$,
e) $\{n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, f) $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$, g) $\{(-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)\}_{n=1}^{\infty}$.

2.3.10. Na začiatku pokusu v čase $t_0 = 0$ bolo v skúmavke n_0 baktérií. Ich počet po t minútach je určený vzťahom $n_t = n_0 k^t$, kde k je nejaká konštanta. Na konci druhej minúty bolo v skúmavke $n_2 = 5\,000$ baktérií a na konci piatej minúty ich bolo $n_5 = 625\,000$. Koľko baktérií bolo v skúmavke na začiatku pokusu?

2.3.11. Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť štvorcov, kde S_1 je štvorec so stranou $a_1 = a > 0$ a pre $n \in N$, $n \geq 2$ má štvorec S_n vrcholy umiestnené v stredoch strán štvorca S_{n-1}.
a) Určte všeobecný vzorec pre dĺžku strany a_n štvorca S_n, $n \in N$.
b) Určte súčet obvodov štvorcov S_n. c) Určte súčet obsahov štvorcov S_n.

2.3.12. Pre aké $a \in R$ konverguje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (n+1)/n$ pre n párne a $a_n = (1-an)/(2n+1)$ pre n nepárne.

2.3.13. Určte, ktoré z nasledujúcich rekurentne zadaných postupností konvergujú:
a) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{a_n} + 1}$, b) $a_0 = 11$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 5}$,
c) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = (a_n^2 + 1)/2$, d) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (a_n^2 + 1)/2$,
e) $a_0 = 0$, $a_{n+1} = e^{1-a_n}$, f) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = e^{1-a_n}$,

2.3.14. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rekurentne zadaná vzťahmi:
a) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, $a_0 > 0$, b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$, $a_0 > 0$,
c) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 20}$, $a_0 > 0$, d) $a_{n+1} = (a_n^2 + 1)/2$, $a_0 \in \langle -1\,;\,1\rangle$,
e) $a_{n+1} = e^{1-a_n}$, $a_0 \in R$. f) $a_{n+1} = (a_n^2 + 4)/4$, $a_0 \in \langle -1\,;\,1\rangle$,
g) $a_{n+1} = a_n/(2 + a_n)$, $a_0 > 0$, h) $a_{n+1} = 1 + a_n^{-1}$, $a_0 = 1$,

2.3.15. Určte $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, ak pre všetky $n\in N$ platí:

a) $a_n = \dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$, b) $a_n = \dfrac{n\cos n!}{n^2+1}$, c) $a_n = \dfrac{n\sin n!}{n^2-1}$, d) $a_n = \dfrac{n\cos n!}{n^2-1}$.

2.3.16. Určte limity nasledujúcich postupností, t.j. vyjadrite periodické čísla ako zlomky:

a) $\{0,1;\ 0,13;\ 0,135;\ 0,1355;\ \ldots\}$, b) $\{0,5;\ 0,53;\ 0,533;\ 0,5333;\ \ldots\}$,
c) $\{0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots\}$, d) $\{0,5;\ 0,50;\ 0,505;\ 0,5050;\ \ldots\}$,
e) $\{0,6;\ 0,66;\ 0,666;\ 0,6666;\ \ldots\}$, f) $\{0,1;\ 0,12;\ 0,121;\ 0,1212;\ \ldots\}$.

2.3.17. Určte $a\in R$ tak, aby nasledujúce limity boli vlastné:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a+5}{1+n^3}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a+\dfrac{1}{n}\right]^n$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{a+1}{3}\right]^n$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-a^n}{1+a^n}$.

2.3.18. Nájdite všetky čísla $a,b\in R$ tak, aby platilo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n}{n+2}+an+b\right]=0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n+2}+an+b\right]=0$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^a}{n^2+1}+bn\right]=0$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n^a+1}+bn\right]=0$,

2.3.19. Nech $a_1=1$, $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$, $n\in N$. Dokážte, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

2.3.20. Nech $a\in R$, $a\geq 0$. Vypočítajte limitu nasledujúcich postupností:

a) $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$, b) $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$,
c) $\left\{\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}, \ldots\right\}$, d) $\left\{\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots\right\}$.

2.3.21. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2}{1-n^2}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+4+5+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$.

2.3.22. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n+1}{2n^2+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n+1}{2n^4+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n+1}{2n^6+1}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n+2}-\dfrac{n^2}{n+3}\right]$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n^2}{n+2}-2n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-3n+2}{3n^2-n+1}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\dfrac{n^2}{n+1}\right]$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-3n^2+2}{n^2+1}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2+1}{n+3}\right]$.

2.3.23. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3^n}{n-3^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3^n+1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-\sqrt{n}}{n-1}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-n}{n^4}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$,
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}$, j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n n+1}{n!+1}$,
m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n\, n!}{(3n)^n}$, n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$, o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-1}{n+1}\right]^n$, p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-3}{n}\right]^{\frac{n}{2}}$,
q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n-1}{2n+1}\right]^n$, r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\dfrac{5}{n}\right]^n$, s) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\dfrac{1}{3n}\right]^n$, t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n+6}{n+5}\right]^n$.

2.3.24. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1/2)^n}{(1/4)^n-(1/3)^n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^5+1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{n}$.

2.3.25. Nech $a, b \in R$, $b \geq a > 0$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n-b^n}{a^{n+1}-b^{n+1}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right]^n$.

2.3.26. Nech $a \in R$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{a^n+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^{2n}+1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{a+3}{2}\right]^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a+\dfrac{1}{n}\right]^n$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} a^2\sqrt{\dfrac{n-a}{n}}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-a}{n+a}\right]^n$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1-3^n}$.

2.3.27. Nech $a, b \in R$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n}-\sqrt{n-a}\right]$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n(n-a)}-n\right]$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+n}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1}-n\right]$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\sqrt{n^2-1}\right]$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3-1}-n\right]$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{an^2}{n+1}-\dfrac{bn^2}{n-1}\right]$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n-a}-\dfrac{n^2}{n-b}\right]$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-an^2+3n}{n+5}$.

2.3.28. Nech $a, b \in R$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[3n-\sqrt{9n^2-10n+1}\right]$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n+1}-\sqrt[3]{n^3-n+1}\right]$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right]$,

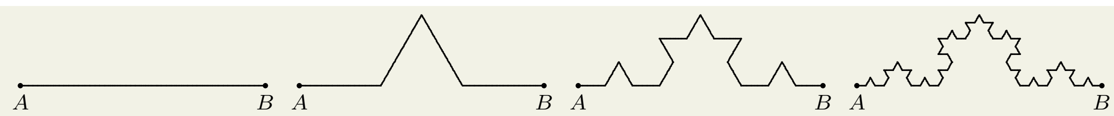
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n-a)(n-b)}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n-\sqrt{n+1}}\right]$.

2.3.29. Nech $a, b \in R$, $a \geq b \geq 0$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[2\sqrt{a}\right]^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} na^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\sqrt[n]{a}-1]^2}{[\sqrt[n]{b}-1]^2}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right]$.

2.3.30. Na obrázku 2.3.11 je znázornený postup konštrukcie lomenej čiary, ktorá vznikne z úsečky AB. Každá jednotlivá úsečka sa postupne rozdelí na tri rovnaké časti, pričom stredná časť sa zväčší na dvojnásobok (dve strany rovnostranného trojuholníka). Tento proces sa opakuje do nekonečna. Vypočítajte dĺžku lomenej čiary, ak $|AB| = 1$.



Obr. 2.3.11: Lomená čiara z cvičenia 2.3.30.

2.4 Číselné rady

2.4.1 Základné pojmy

Číselné rady úzko súvisia s číselnými postupnosťami a zovšeobecňujú pojem spočítavania konečného počtu sčítancov na nekonečný počet. S výrazmi, ktoré obsahujú nekonečne veľa sčítancov sa nepriamo stretávame už v základnej škole. Jednoduchým príkladom sú zlomky. S výrazmi ktoré obsahujú súčet nekonečného počtu čísel sa môžeme stretnúť aj v geometrii. Ilustruje to nasledujúci príklad.

Príklad 2.4.1.
Uvažujme rovnoramenný pravouhlý trojuholník T (obr. 2.4.12) s preponou dlhou 2. Výška trojuholníka T má dĺžku 1 a odvesny $\sqrt{2}$. Obsah trojuholníka T je určený vzťahmi

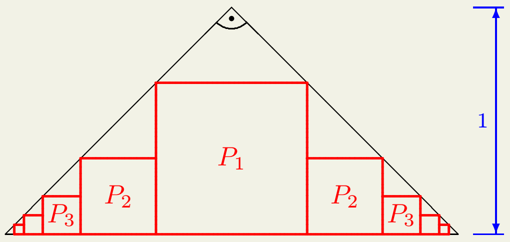
$$P = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1, \quad \text{resp.} \quad P = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.$$

Uvažujme (nekonečnú) postupnosť štvorcov vpísaných do trojuholníka T tak, ako to vidíme na obrázku 2.4.12. Prvý štvorec má stranu dlhú 2/3 a jeho obsah je $P_1 = 4/9$. Druhý štvorec (sú dva) má stranu polovičnej dĺžky ako prvý štvorec a jeho obsah je $P_2 = P_1/4$. Tretí štvorec (sú dva) má stranu polovičnej dĺžky ako druhý štvorec a jeho obsah je $P_3 = P_2/4 = P_1/4^2$. Takto pokračujeme pre všetky $n \in N$.
Je zrejmé, že súčet obsahov jednotlivých štvorcov je menší ako obsah trojuholníka T, t.j.

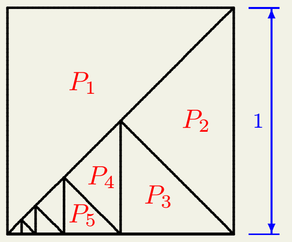
$$1 = P > P_1 + 2P_2 + \cdots + 2P_n + \cdots = P_1 + \frac{2P_1}{4} + \frac{2P_1}{4^2} + \cdots + \frac{2P_1}{4^{n-1}} + \cdots . \blacksquare$$

Príklad 2.4.2.
Nech S je štvorec so stranou dlhou 1. Jeho obsah P sa rovná číslu $1^2 = 1$.
Štvorec S rozdeľme uhlopriečkou na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Obsah jedného z nich označíme P_1 a druhý rozdelíme na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Obsah jedného z nich označíme P_2 a druhý opäť rozdelíme na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Takto budeme pokračovať pre všetky $n \in N$ (obr. 2.4.13).
Je zrejmé, že tieto trojuholníky pokryjú celý štvorec S, t.j. súčet ich obsahov je rovný číslu $P = 1$. Každý nasledujúci trojuholník má obsah rovný polovici obsahu predchádzajúceho trojuholníka. Obsah prvého je $P_1 = P/2 = 1/2$. To znamená, že platí

$$1 = P = P_1 + \frac{P_1}{2} + \frac{P_1}{2^2} + \cdots + \frac{P_1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots . \blacksquare$$



Obr. 2.4.12: Príklad 2.4.1.



Obr. 2.4.13: Príklad 2.4.2.

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom **nekonečným číselným radom** (**nekonečným radom čísel**) vytvoreným z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Stručne ho nazývame **rad** (**číselný rad**) a označujeme symbolom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Čísla $a_1, a_2, \ldots$ nazývame **členy radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pričom a_n sa nazýva **n-tý člen**.

Poznámka 2.4.1.
Číselné rady a postupnosti úzko súvisia. Rad je jednoznačne určený postupnosťou. To znamená, že rad môžeme zadať **všeobecným vyjadrením** (**explicitne**) každého člena a_n, $n \in N$ alebo **rekurentným vyjadrením** prvého člena a členov a_n, $n \in N$.

Poznámka 2.4.2.
Pre spočítavanie nekonečného počtu sčítancov neplatia všetky pravidlá, ktoré platia pre sčítanie konečného počtu sčítancov. Napríklad, ak aplikujeme asociatívny zákon na číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, dostaneme spor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0, \\ 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1. \end{cases}$$

Neskôr (pri prerovnaní radu) ukážeme, že neplatí ani komutatívny zákon.

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad a nech $k\in N$ je ľubovoľné. Potom konečný súčet

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

nazývame **k-tým čiastočným súčtom radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a nekonečný súčet

$$r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$$

nazývame **k-tým zvyškom radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1 + \cdots + a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

nazývame **postupnosť čiastočných súčtov radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 2.4.3.
Z definície vyplýva, že pre všetky $k\in N$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} = s_k + r_k.$$

Poznámka 2.4.4.
Vzťah medzi radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho postupnosťou čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pre $n\in N$ jednoznačne určená vzťahmi

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n, \quad \ldots .$$

Ak položíme $s_0 = 0$, potom je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pre $n\in N$ jednoznačne určený vzťahmi

$$a_1 = s_1 = s_1 - s_0, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad \ldots, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots .$$

Hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **má súčet $s\in R^*$** a zapisujeme

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

práve vtedy, ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, t.j. platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Ak $s\in R$, potom hovoríme, že **rad** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje k číslu s** (**je konvergentný k číslu s**) alebo stručne, že **rad konverguje** (**je konvergentný**).

Ak rad nemá konečný súčet, potom hovoríme, že **rad diverguje** (**je divergentný**). Ak $s = \infty$ [resp. $s = -\infty$], potom **rad diverguje do ∞** [resp. **do $-\infty$**] a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \qquad \left[\text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty\right].$$

Ak rad súčet nemá, t.j. ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **rad osciluje**.

Poznámka 2.4.5.
Číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ buď konverguje alebo diverguje. Ak rad diverguje, potom buď osiluje alebo diverguje do ∞ [resp. do $-\infty$]. Je zrejmé, že všetky tieto možnosti sa vylučujú.

Príklad 2.4.3.
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, pretože platí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, pretože platí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)=-\infty$, pretože platí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\{-n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=-\infty$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ osciluje, pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\{-1,0,-1,0,\dots\}$ a $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ neexistuje. ■

Poznámka 2.4.6.
Z vety 2.3.17 vyplýva $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\mathrm{e}$.

Príklad 2.4.4.
Vypočítajte súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$.

Riešenie.
Pre všetky $n\in N$ platí $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. Potom n-tý čiastočný súčet platí

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=1-\frac{1}{n+1}.$$

Z toho vyplýva $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1$, t.j. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. ■

Príklad 2.4.5.
Vypočítajte súčet **harmonického radu** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$.

Riešenie.
Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a podľa vety 2.3.10 má limitu.
Pre prvé štyri členy vybranej postupnosti $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\begin{aligned}
s_1&=s_{2^0}=1\geq 1+\frac{0}{2},\\
s_2&=s_{2^1}=s_1+\frac{1}{2}\geq 1+\frac{0}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2},\\
s_4&=s_{2^2}=s_2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2},\\
s_8&=s_{2^3}=s_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq 1+\frac{2}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{2}{2}+\frac{4}{8}=1+\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Dokážeme, že pre všetky $n\in N$ platí $s_{2^n}\geq 1+n/2$.
Použijeme matematickú indukciu. Pre s_1 sme vzťah už dokázali.
Predpokladajme, že platí vzťah $s_{2^k}\geq 1+k/2$. Potom pre $s_{2^{k+1}}$ platí

$$\begin{aligned}
s_{2^{k+1}}&=s_{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\\
&\geq 1+\frac{k}{2}+\underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k-\text{krát}}=1+\frac{k}{2}+\frac{2^k}{2^{k+1}}=1+\frac{k+1}{2}.
\end{aligned}$$

Takže pre všetky $n\in N$ platí $s_{2^n}\geq 1+n/2$. Z toho vyplýva

$$\lim_{n\to\infty}s_{2^n}\geq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right)=\infty,\qquad\text{t.j.}\quad\lim_{n\to\infty}s_{2^n}=\infty.$$

To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$, t.j. rad diverguje a platí $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$. ■

Príklad 2.4.6.
Nech $q\in R$. Vyšetrite konvergenciu **geometrického radu** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=1+q+q^2+\cdots$.

Riešenie.
Ak $q=1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=\infty$.
Ak $q\neq 1$, potom pre n-tý čiastočný súčet geometrického radu platí

$$s_n=1+q+\cdots+q^{n-1}=(q^{n-1}+\cdots+q+1)\frac{q-1}{q-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Potom na základe príkladu 2.3.15 o limite geometrickej postupnosti platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \begin{cases} \nexists, & \text{pre } q \le -1, \ \text{t.j. osciluje,} \\ \dfrac{\infty-1}{q-1} = \infty, & \text{pre } q > 1, \ \text{t.j. diverguje do } \infty, \\ \dfrac{0-1}{q-1} = \dfrac{1}{1-q}, & \text{pre } q \in (-1\,;\,1)\,, \ \text{t.j. konverguje.} \end{cases} \blacksquare$$

Poznámka 2.4.7.
V príklade 2.4.6 sme použili rovnosť, ktorá pre $a, b \in R$, $n \in N$ má tvar

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Príklad 2.4.7.
Vyšetrite konvergenciu číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Riešenie.
Nech $n \in N$, potom pre n-tý čiastočný súčet daného radu platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Z toho vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. $\blacksquare$

2.4.2 Vlastnosti konvergentných radov

V tejto časti uvedieme niektoré základné vlastnosti číselných radov, ako aj niektoré kritéria na určovanie konvergentných, resp. divergentných radov.

Veta 2.4.1 (Nutná podmienka konvergencie radu).
Ak číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz.
Platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$. Z toho pre všetky $n \in N$ vyplýva $a_n = s_n - s_{n-1}$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \blacksquare$$

Poznámka 2.4.8.
Ako dokazujú príklady 2.4.5 a 2.4.7, tvrdenie v predchádzajúcej vete sa nedá obrátiť.
To znamená, že z podmienky $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nevyplýva konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 2.4.1.a.
Ak nie je splnená podmienka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Príklad 2.4.8.
Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-1)^n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \cdots$ nekonverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie, $\lim\limits_{n\to\infty} n(-1)^n$ totiž neexistuje. $\blacksquare$

Pri vyšetrovaní konvergencie číselných radov má dôležitú úlohu tzv. Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie, ktorý nám umožní overiť konvergenciu radu bez toho, aby sme poznali jeho súčet. Vyplýva z Cauchy–Bolzanovho princípu konvergencie pre číselné postupnosti (veta 2.3.4, str. 40), ktorý je v prípade postupnosti čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sformulovaný v leme 2.4.2.

Lema 2.4.2.
Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \ge n_0$, $m \ge n_0$ platí $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Veta 2.4.3 (Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie radu).
Číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n, k \in N$, $n \geq n_0$ platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

Dôkaz.
Tvrdenie vyplýva priamo z definície konvergencie radu a z lemy 2.4.2.
Ak položíme $m = n + k$, potom $m > n$ a pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\begin{aligned}|s_m - s_n| = |s_{n+k} - s_n| &= |(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}) - (a_1 + \cdots + a_n)| = \\ &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}|\,.\end{aligned}$$

Takže sú tvrdenia $|s_m - s_n| < \varepsilon$, $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$ ekvivalentné a veta platí. ■

Poznámka 2.4.9.
Podobne, ako pri číselných postupnostiach, ak zmeníme v číselnom rade konečný počet členov, jeho konvergencia, divergencia do $\pm\infty$, resp. oscilácia sa nezmenia. Toto platí pre rady vo všeobecnosti, t.j. **konečný počet členov nemá vplyv na vlastnosti radu**.

Číselné rady môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť číslom. Ostatné operácie, ako sú napríklad vzájomné násobenie radov a prerovnanie radu, zavedieme neskôr.

Nech $c \in R$, potom číselné rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n$$

nazývame **súčet**, **rozdiel radov** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ a **násobok radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **číslom** c.

Veta 2.4.4.
Nech $c \in R$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$, kde $t, s \in R^*$. Potom (ak majú príslušné výrazy zmysel) platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cs.$$

Dôkaz.
Ak označíme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom sú postupnosti $\{s_n \pm t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c\, s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosťami čiastočných súčtov radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c a_n$ a tvrdenie vyplýva z vety 2.3.11. ■

Poznámka 2.4.10.
Ak $c = 0$, potom pre ľubovoľný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.

Opačné tvrdenie v predchádzajúcej vete neplatí. Napríklad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$ konverguje k číslu 0, aj keď rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemajú súčty.

Príklad 2.4.9.
Nech $a, b, p, q \in R$, $|p| > 1$, $|q| > 1$. Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ap^n + bq^n}{p^n q^n}$.

Riešenie.
Z príkladu 2.4.6 vyplýva, že pre $|p| > 1$, $|q| > 1$, t.j. $|p^{-1}| < 1$, $|q^{-1}| < 1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{q}{q-1}.$$

To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.4.4 a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ap^n + bq^n}{p^n q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{q^n} + \frac{b}{p^n}\right] = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{aq}{q-1} + \frac{bp}{p-1}. \ ■$$

V poznámke 2.4.2 sme uviedli príklad číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, pre ktorý neplatil asociatívny zákon. Problém je v tom, že tento rad nemá súčet. Ako ukazuje nasledujúca veta, ak rad súčet má, potom asociatívny zákon platí.

Veta 2.4.5.
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s \in R^*$, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť indexov. Potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_1}}_{c_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{c_2} + \cdots \underbrace{a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}}_{c_n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = s.$$

Dôkaz.
Pre $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ platí:

$$t_1 = c_1 = a_1 + \cdots + a_{k_1} = s_{k_1}, \quad t_2 = c_1 + c_2 = a_1 + \cdots + a_{k_2} = s_{k_2}, \quad \ldots$$
$$t_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_1 + \cdots + a_{k_n} = s_{k_n}, \quad \ldots .$$

To znamená, že $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. ■

Dôsledok 2.4.5.a.
Ak z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vynecháme všetky nulové členy, resp. doň vložíme ľubovoľný (aj spočítateľný) počet nulových členov, potom sa jeho súčet nezmení.

Poznámka 2.4.11.
Ak vylúčime z radu s nezápornými členmi všetky jeho nulové členy, dostaneme rad s kladnými členmi s rovnakým súčtom. Potom pri vyšetrovaní konvergencie radu môžeme použiť aj podielové kritéria, ktoré obsahujú jednotlivé členy v menovateli zlomku.

2.4.3 Číselné rady s nezápornými členmi

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi, t.j. nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$, Potom je jeho postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca a podľa vety 2.3.10 má limitu. To znamená, že každý **rad s nezápornými členmi má súčet**.

Z poznámky 2.3.8 vyplýva, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, ak je postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora a diverguje do ∞ v opačnom prípade.

Veta 2.4.6.
Ak pre všetky $n \in N$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$, potom $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty$.

Dôkaz.
Ak $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú príslušné postupnosti čiastočných súčtov, potom pre $n \in N$ platí

$$0 \leq s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n = t_n, \quad \text{t.j.} \quad 0 \leq \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n \leq \infty. \blacksquare$$

Ak si uvedomíme, že zmenou konečného počtu členov sa konvergencia, resp. divergencia radu nezmení, potom z vety 2.4.6 ihneď vyplýva nasledujúce kritérium.

Veta 2.4.7 (1. porovnávacie kritérium).
Nech[19] pre všetky $n \in N$ (okrem konečného počtu) platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

a) Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje tiež $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞, potom diverguje do ∞ tiež $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Príklad 2.4.10.
Vyšetrite konvergenciu radov: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Riešenie.
a) Pre všetky $n \in N$ platí

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n(n+1), \quad \text{t.j.} \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

[19] V literatúre sa tiež niekedy nazýva kritérium o konvergentnej majorante a divergentnej minorante.

Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje (príklad 2.4.4), konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

b) Pre všetky $n \in N$ platí $\sqrt[3]{n} \leq n$, t.j. $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (príklad 2.4.5), diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. ■

Príklad 2.4.11.
Vyšetrite konvergenciu **Riemannovho rad** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Riešenie.
Pre $p \leq 0$ rad diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie. Z poznámky 2.3.10 totiž vyplýva $\lim_{n\to\infty} n^{-p} = 1$ pre $p = 0$ a $\lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty$ pre $p < 0$.

Pre $p = 1$ dostávame harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ktorý diverguje (príklad 2.4.5).

Pre $0 < p < 1$ rad diverguje na základe 1. porovnávacieho kritéria, pretože pre všetky $n \in N$ platí $n^p \leq n$, t.j. $0 \leq 1/n \leq 1/n^p$.

Pre $p = 2$ dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, ktorý konverguje.

Pre $p > 2$ rad konverguje na základe 1. porovnávacieho kritéria, pretože pre všetky $n \in N$ platí $n^p \geq n^2$, t.j. $1/n^p \leq 1/n^2$.

Pre $1 < p < 2$ rad konverguje, ale dôkaz tohto tvrdenia je s našimi doterajšími vedomosťami pomerne zložitý a pracný a preto ho nebudeme robiť. ■

Dôsledok 2.4.7.a (Limitný tvar).
Nech pre všetky $n \in N$ (okrem konečného počtu) platí $0 < a_n \leq b_n$.

Ak $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ súčasne konvergujú alebo divergujú do ∞.

Dôkaz.
Postupnosť $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená (veta 2.3.8), t.j. existujú $0 < L < K < \infty$ také, že pre všetky $n \in N$ platí

$$L < \frac{a_n}{b_n} < K, \quad \text{t.j.} \quad L\,b_n < a_n < K\,b_n.$$

Zvyšok vyplýva z 1. porovnávacieho kritéria a z vety 2.4.4.

Ak konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} Lb_n$ a potom konverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak diverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje $\sum_{n=1}^{\infty} Kb_n$ a potom diverguje aj $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

Príklad 2.4.12.
Uvažujme rady z príkladu 2.4.10.

a) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konverguje, pretože konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{-2}}{[n(n+1)]^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^{-1}} = 1.$$

b) O divergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ pomocou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nevieme rozhodnúť, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^{-1}}{n^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2} = \infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{\left[\sqrt[3]{n}\right]^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0. \ ■$$

Veta 2.4.8 (2. porovnávacie kritérium).
Nech pre všetky $n \in N$ (okrem konečného počtu) platí $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

a) Ak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje tiež $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
b) Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞, potom diverguje do ∞ tiež $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôkaz.
Nech $k\in N$ je taký index, že pre všetky $n\in N$, $n\geq k$ platí $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$.
Potom platí $0<\frac{b_n}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$. Ak označíme $L=\frac{b_k}{a_k}$, potom pre všetky $n\in N$, $n\geq k$ platí

$$0<L=\frac{b_k}{a_k}\leq\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\leq\cdots\leq\frac{b_n}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\leq\cdots,\quad \text{t.j.}\ La_n\leq b_n.$$

Potom na základe 1. porovnávacieho kritéria a vety 2.4.4 platí:
a) Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, potom konverguje $\sum_{n=1}^{\infty}La_n$ a potom aj $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
b) Ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, potom diverguje $\sum_{n=1}^{\infty}La_n$ a potom aj $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. ■

Veta 2.4.9 (Podielové d'Alembertovo kritérium).
Nech[20] $a_n>0$ pre všetky $n\in N$, nech pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí:

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q$, kde $q\in(0\,;\,1)$, potom $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje do ∞, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$.

Dôkaz.
Na základe 2. porovnávacieho kritéria platí:
a) Pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q=\frac{q^{n+1}}{q^n}$.
Keďže geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ pre $q\in(0\,;\,1)$ konverguje, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

b) Pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí $\frac{1}{1}=1\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty}1$ diverguje do ∞, diverguje do ∞ aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. ■

Dôsledok 2.4.9.a (Limitné d'Alembertovo kritérium).
Nech pre všetky $n\in N$ platí $a_n>0$ a nech $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$.

a) Ak $p<1$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.
b) Ak $p>1$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje do ∞.
c) Existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $p=1$.

Dôkaz.
a) Je zrejmé, že $p\geq 0$. Z vlastností limity (veta 2.3.2) vyplýva, že pre každé $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-p\right|<\varepsilon,\quad \text{t.j.}\ p-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<p+\varepsilon.$$

Ak zvolíme ε tak, aby $q=p+\varepsilon<1$, potom pre $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q<1$.
To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.4.9 a rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.
b) Keďže $p>1$, potom z dôsledku 2.3.16.a vyplýva, že $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.
To znamená, že nie je splnená nutná podmienka konvergencie a rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje.

c) Napríklad konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-2}$ a divergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}$. ■

Príklad 2.4.13.
Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, ak $a_{2k+1}=\frac{1}{2\cdot 6^k}$, $a_{2k}=\frac{1}{6^k}$ pre $k=0,1,2,\ldots$.

[20] *Jean Baptiste d'Alembert* [1717–1783] — francúzsky matematik, fyzik a filozof.

Riešenie.
Daný rad môžeme vyjadriť v tvare
$$\frac{1}{2\cdot 6^0}+\frac{1}{6^1}+\frac{1}{2\cdot 6^1}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{2\cdot 6^2}+\cdots+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{2\cdot 6^k}+\frac{1}{6^{k+1}}+\frac{1}{2\cdot 6^{k+1}}+\cdots.$$
Pre všetky $n=2k$ (párne), resp. $n=2k+1$ (nepárne), kde $k\in N$, platí
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\frac{6^k}{2\cdot 6^k}=\frac{1}{2},\qquad \text{resp.}\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\frac{2\cdot 6^k}{6^{k+1}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$
Potom $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje a limitné d'Alembertovo kritérium použiť nemôžeme.
Na druhej strane rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje na základe podielového d'Alembertovho kritéria, pretože pre všetky $n\in N$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{2}<1$.
■

Veta 2.4.10 (Odmocninové Cauchyho kritérium).
Nech $a_n\geq 0$ pre všetky $n\in N$, nech pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí:

a) $\sqrt[n]{a_n}\leq q$, kde $q\in(0\,;1)$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$.

Dôkaz.
Na základe 1. porovnávacieho kritéria platí:
a) Pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí $\sqrt[n]{a_n}\leq q$, t.j. $a_n\leq q^n$. Keďže geometrický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ pre $q\in(0\,;1)$ konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
b) Pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$, t.j. $a_n\geq 1$. Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje do ∞, diverguje do ∞ aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
■

Dôsledok 2.4.10.a (Limitné Cauchyho kritérium).
Nech pre všetky $n\in N$ platí $a_n\geq 0$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p$.

a) Ak $p<1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Ak $p>1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞.

c) Existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $p=1$.

Dôkaz.
a) Je zrejmé, že $p>0$. Z vlastností limity (veta 2.3.2) vyplýva, že pre každé $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí
$$|\sqrt[n]{a_n}-p|<\varepsilon,\qquad \text{t.j.}\quad p-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<p+\varepsilon.$$
Ak zvolíme ε tak, aby $q=p+\varepsilon<1$, potom pre $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n}<q<1$.
To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.4.10 a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Keďže $p>1$, potom z vety 2.3.16 vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

c) Napríklad konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-2}$ a divergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$. ■

Poznámka 2.4.12.
Predpoklad a) pri podielovom a odmocninovom kritériu nemôžeme zjednodušiť na tvar
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1,\qquad \text{resp.}\quad \sqrt[n]{a_n}<1.$$
Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, aj keď platí $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}<1$, $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}<1$.

Príklad 2.4.14.
Vyšetrite konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2k-1}=\frac{1}{2^k}$, $a_{2k}=\frac{1}{3^k}$ pre $k\in N$.

Riešenie.
Daný rad môžeme vyjadriť v tvare

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{3^{k-1}}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\cdots.$$

Podielové d'Alembertovo kritérium nemôžeme použiť, pretože pre všetky $n=2k-1$, resp. $n=2k$, kde $k\in N$, $k=2,3,4,\ldots$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}=\frac{2^k}{3^k}<1, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\frac{a_{2(k+1)-1}}{a_{2k}}=\frac{3^k}{2^{k+1}}>1.$$

Odmocninové Cauchyho kritérium ale použiť môžeme, pretože pre všetky $n=2k-1$, resp. $n=2k$, $k\in N$ platí

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}}=\frac{1}{\sqrt[2k-1]{2^k}}\le\frac{1}{\sqrt[2k]{2^k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{resp.} \quad \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[2k]{a_{2k}}=\frac{1}{\sqrt[2k]{3^k}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $n\in N$ platí $\sqrt[n]{a_n}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ a rad konverguje. ■

Príklad 2.4.15.
Vyšetrite konvergenciu radov: a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$, kde $a>0$.

Riešenie.
a) Ak pre $n\in N$ označíme $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$, potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!\,n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1.$$

Z toho vyplýva na základe limitného d'Alembertovho kritéria, že daný rad diverguje.

b) Ak pre $n\in N$ označíme $a_n=\dfrac{a^n}{n!}$, potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!\,a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=\frac{a}{\infty}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{a}{\infty}=0.$$

Potom podľa obidvoch limitných kritérií rad konverguje. ■

Na záver tejto časti uvedieme bez dôkazu Raabeho kritérium na vyšetrovanie konvergencie radov.

Veta 2.4.11 (Raabeho kritérium).
Nech[21] $a_n>0$ pre všetky $n\in N$, nech pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí:

a) $n\left[\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]\ge r$, kde $r>1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

b) $n\left[\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]\le 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje do ∞.

Dôsledok 2.4.11.a (Limitné Raabeho kritérium).
Nech pre všetky $n\in N$ platí $a_n\ge 0$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=t$.

a) Ak $t>1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

b) Ak $t<1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje do ∞.

Poznámka 2.4.13.
Raabeho kritérium je silnejšie ako Cauchyho odmocninové kritérium, ktoré je zase silnejšie ako D'Alembertovo podielové kritérium. To znamená, že ak o konvergencii radu môžeme rozhodnúť pomocou d'Alembertovho kritéria, potom môžeme tiež rozhodnúť pomocou Cauchyho kritéria a taktiež pomocou Raabeho kritéria. Limita v Raabeho limitnom tvare môže byť aj nevlastná a vtedy daný rad konverguje.

Príklad 2.4.16.
Nech $a>0$. Uvažujme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n/n!$ z príkladu 2.4.15 b). Tento rad konverguje aj na základe Raabeho limitného kritéria, pretože pre všetky $a>0$ platí

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{a^n\,(n+1)!}{n!\,a^{n+1}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{n+1}{a}-1\right]=\infty(\infty-1)=\infty. ■$$

[21] *Wilhelm Raabe* [1831–1910] — nemecký matematik.

Príklad 2.4.17.

Nech $a > 0$. Vyšetrite konvergeciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

Riešenie.

Limitné d'Alembertovo kritérium použiť nemôžeme, pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)(n+1)!}{n!\, a(a+1)\cdots(a+n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} = 1.$$

Limitné Cauchyho kritérium tiež nemôžeme použiť, pretože $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Ak použijeme Raabeho limitné kritérium, potom platí

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\frac{a}{n+1} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = a.$$

Z toho vyplýva, že pre $a < 1$ rad diverguje a pre $a > 1$ rad konverguje.

Ak $a = 1$, potom dostaneme rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)$, ktorý diverguje. ■

2.4.4 Absolútna, relatívna konvergencia a alternujúce rady

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali číselnými radmi s kladnými členmi, ktoré buď konvergujú alebo divergujú do ∞. Rady vo všeobecnosti môžu mať aj kladné aj záporné členy. Pri vyšetrovaní konvergencie radov je niekedy jednoduchšie skúmať rady s absolútnymi hodnotami ich členov.

Hovoríme, že **rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne** (**je absolútne konvergentný**) práve vtedy, ak konverguje rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Hovoríme, že **rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne** (**neabsolútne**) práve vtedy, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje do ∞.

Veta 2.4.12.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, potom konverguje.

Dôkaz.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Potom z Cauchy–Bolzanovho princípu konvergencie vyplýva, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n, k \in N$, $n \geq n_0$ platí

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Potom na základe trojuholníkovej nerovnosti pre absolútne hodnoty čísel platí

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

To znamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

Príklad 2.4.18.

Vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Riešenie.

Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ pre všetky $n \in N$ platí

$$s_{2n} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0, \qquad s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Potom rad konverguje k číslu 0, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = 0, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

Rad nekonverguje absolútne, pretože platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty. \blacksquare$$

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad. Rady[22] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ majú nezáporné členy. To znamená, že majú vždy súčet, pričom môže byť aj nevlastný. Ak označíme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = s^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = s^-,$$

potom na základe vety 2.4.4, pokiaľ majú výrazy $s^+ \pm s^-$ v R^* zmysel, platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = s^+ - s^-, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = s^+ + s^-. \tag{2.2}$$

Poznámka 2.4.14.
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, potom sú obe hodnoty $s^+ - s^-$, $s^+ + s^-$ reálnymi číslami. To znamená, že musí tiež platiť $s^+, s^- \in R$.
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne, potom $s^+ - s^-$ je číslom a $s^+ + s^- = \infty$. Lenže to je možné iba v prípade, ak $s^+ = s^- = \infty$.

Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ [resp. $a_n \leq 0$], potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

nazývame **rad so striedavými znamienkami** (**alternujúci rad**).

Veta 2.4.13 (Leibnizovo kritérium).
Nech je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ a nech

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Potom alternujúci rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, t.j. $a_n - a_{n+1} \geq 0$.
Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ pre všetky $n \in N$ platí

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq a_1 - a_2, \\ s_{2n} &= a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \\ s_{2(n+1)} &= s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n} + 0 = s_{2n}. \end{aligned}$$

To znamená, že vybraná postupnosť $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a ohraničená, t.j. konverguje a má konečnú limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$, pre ktorú platí

$$a_1 - a_2 \leq s_{2n} \leq a_1, \quad \text{t.j.} \quad a_1 - a_2 \leq \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq a_1. \tag{2.3}$$

Pre vybranú postupnosť $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s.$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$, t.j. rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje. ■

Príklad 2.4.19.
Určte konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$.

Riešenie.
Tento rad sa nazýva **anharmonický rad** a konverguje na základe Leibnizovho kritéria, pretože postupnosť $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.
Jeho súčet je $\ln 2$ (viď napr. [19]) a je relatívne konvergentný, pretože platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \;■$$

[22]Poznámka 2.1.10 na strane 29: $a^+ = \max\{a,\ 0\}$, $a^- = \max\{-a,\ 0\}$.

Príklad 2.4.20.
Uvažujme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$.

Pre postupnosť čiastočných súčtov tohto radu platí

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad \text{pre všetky } n \in N.$$

Je zrejmé, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná postupnosť z postupnosti čiastočných súčtov anharmonického radu. Z toho vyplýva, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \ln 2$, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2$. ■

Niekedy je pri vyšetrovaní konvergencie daného radu výhodné jeho členy vyjadriť v tvare súčinu $a_n \cdot b_n$, $n \in N$ a overovať predpoklady pre $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre ilustráciu uvedieme dve kritériá bez dôkazov.

Veta 2.4.14 (Abelovo kritérium).
Nech:[23] a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna a ohraničená.

Potom číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Poznámka 2.4.15.
Požiadavku monotónnosti postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemôžeme vynechať. Ak položíme

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = (-1)^n,$$

potom predpoklady platia, ale rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Príklad 2.4.21.
Vyšetrite konvergenciu číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ln \left[a + \frac{1}{n} \right]$, kde $a > 0$.

Riešenie.
Označme $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = \ln \left[a + \frac{1}{n} \right]$. Potom pre všetky $a > 0$, $n \in N$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \qquad a + 1 \geq a + \frac{1}{n} \geq a + \frac{1}{n+1} \geq a.$$

Potom z vlastností funkcie logaritmus[24] vyplýva, že pre všetky $a > 0$, $n \in N$ platí

$$\ln (a+1) \geq \ln \left[a + \frac{1}{n} \right] = b_n \geq b_{n+1} = \ln \left[a + \frac{1}{n+1} \right] \geq \ln a.$$

Potom na základe Abelovho kritéria rad konverguje pre všetky $a > 0$. ■

Veta 2.4.15 (Dirichletovo kritérium).
Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a nech:

a) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

Potom číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Poznámka 2.4.16.
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria, potom spĺňa tiež predpoklady Dirichletovho kritéria. Stačí položiť $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = c_n$.
To znamená, že Leibnizovo kritérium je špeciálnym prípadom Dirichletovho kritéria.

[23] *Niels Henrik Abel* [1802–1829] — nórsky matematik.
[24] Bližšie sa jej venujeme v časti 3.1.3 na strane 85.

Príklad 2.4.22.
Vyšetrite konvergenciu číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n}$, kde $a\in R$.

Riešenie.
Overíme predpoklady Dirichletovho kritéria. Ak označíme $a_n=\sin 2n$, $b_n=n^{-1}$, potom je postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca a platí $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}n^{-1}=0$.

Pre postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ pre všetky $n\in N$ platí

$$|s_n|=|\sin 2+\sin 4+\cdots+\sin 2n|=\left|\frac{\sin\frac{2(n+1)}{2}\ \sin\frac{2n}{2}}{\sin\frac{2}{2}}\right|=\left|\frac{\sin(n+1)\sin n}{\sin 1}\right|\leq\frac{1}{|\sin 1|}.$$

To znamená, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a daný rad konverguje. ■

2.4.5 Prerovnanie radov a rady s predpísaným súčtom

Už sme spomínali, že pre nekonečné rady vo všeobecnosti neplatí asociatívny zákon. Platí iba pre konvergentné rady (veta 2.4.5). S komutatívnym zákonom je to trochu zložitejšie, nemusí platiť ani pre konvergentné rady (príklad 2.4.23).

Nech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je číselný rad a nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť prirodzených čísel taká, že obsahuje každé prirodzené číslo práve raz.[25] Potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{k_n}=a_{k_1}+a_{k_2}+a_{k_3}+\cdots+a_{k_n}+\cdots$$

nazývame **prerovnaným radom** (**prerovnaním**) **radu** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Príklad 2.4.23.
Uvažujme konvergentný rad z príkladu 2.4.19

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots.$$

Označme jeho n-tý čiastočný súčet symbolom s_n.
Ak ho prerovnáme pomocou postupnosti $\{2k-1,\ 2(2k-1),\ 2\cdot 2k\}_{k=1}^{\infty}$, dostaneme rad

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ +\ \frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\ +\ \cdots\ +\ \frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k}\ +\ \cdots.$$

Pre jeho n-tý čiastočný súčet, kde $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$, $k\in N$, potom platí

$$\begin{aligned}t_{3k}&=\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k}\right]=\\&=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k}\right]=\\&=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]+\cdots+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right]=\frac{1}{2}s_{2k}=\frac{s_{2k}}{2},\end{aligned}$$

$$t_{3k+1}=t_{3k}+\frac{1}{2k+1}=\frac{s_{2k}}{2}+\frac{1}{2k+1},\qquad t_{3k+2}=\frac{s_{2k}}{2}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)}.$$

Z toho vyplýva, že pre limity čiastočných súčtov t_{3k}, t_{3k+1}, t_{3k+2} platí

$$\lim_{k\to\infty}t_{3k}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}s_{2k},\quad \lim_{k\to\infty}t_{3k+1}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}s_{2k}+0,\quad \lim_{k\to\infty}t_{3k+2}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}s_{2k}+0-0.$$

To znamená, že prerovnaný rad konverguje k (inému) číslu $\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}s_{2k}=\frac{\ln 2}{2}$. ■

Prerovnaním konvergentného radu môžeme dostať aj divergentný rad. Dokonca môžeme tento rad prerovnať tak, aby smeroval k ľubovoľnej hodnote $s\in R^*$.

[25] Postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bijekcia množiny N na množinu N. To znamená, že pre každé $n\in N$ existuje $m\in N$ také, že platí $k_m=n$ (surjekcia) a pre všetky $m,n\in N$, $m\neq n$ platí $k_n\neq k_m$ (injekcia).

Veta 2.4.16 (Riemann).
Nech číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne a nech $\alpha \in R^*$ je ľubovoľné.

Potom existuje prerovnanie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ také, že platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \alpha$.

Dôkaz.
Dôkaz je formálne náročný a preto ho nebudeme robiť. Myšlienku dôkazu ukážeme na príklade 2.4.24. Je založená na skutočnosti, že súčet kladných, resp. záporných členov relatívne konvergentného radu je nevlastný (poznámka 2.4.14). ■

Príklad 2.4.24.
Prerovnajte anharmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, aby konvergoval k číslu $\alpha = \frac{5}{4}$.

Riešenie.
Z príkladu 2.4.19 vyplýva, že anharmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne.
Rozdeľme kladné a záporné členy tohto radu do dvoch radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots.$$

Z poznámky 2.4.14 vyplývajú nasledujúce vzťahy pre súčty radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty.$$

Z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ vyberieme toľko prvých členov, aby ich súčet bol väčší ako $\alpha = 1,25$.

Potom k nim pridáme toľko prvých členov z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n$, aby ich spoločný súčet bol menší ako α. V našom prípade to bude

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,333 > 1,25, \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \approx 0,8333 < 1,25.$$

K týmto členom pridáme toľko prvých nevybratých členov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, aby spoločný súčet všetkých týchto členov bol väčší ako α. Potom dostaneme

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{811}{630} \approx 1,287 > 1,25.$$

Potom k nim pridáme prvé členy radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n$, aby ich súčet bol menší ako α, t.j.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \frac{1307}{1260} \approx 1,037 < 1,25.$$

Týmto spôsobom môžeme teoreticky pokračovať bez obmedzenia do nekonečna, pretože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n = -\infty$. Prerovnaný rad bude konvergovať k číslu $\alpha = 1,25$.
Prakticky pokračujeme po požadovanú presnosť. Pre ilustráciu uvedieme ešte štyri kroky

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15} &&\approx 1,272 > 1,25,\\
&1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6} &&\approx 1,105 < 1,25,\\
&1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21} &&\approx 1,264 > 1,25.\\
&1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{8} &&\approx 1,139 < 1,25.
\end{aligned}$$ ■

Poznámka 2.4.17.
Pre absolútne konvergentné rady Riemannova veta neplatí. V tomto prípade každé prerovnanie daného radu konverguje k rovnakému súčtu (poznámka 2.4.14).

Príklad 2.4.25.
Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ pre n nepárne, $a_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$ pre n párne.

Riešenie.
Daný rad môžeme zapísať v tvare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \cdots = \left[-\frac{1}{2}\right]^2 + \left[-\frac{1}{2}\right]^1 + \left[-\frac{1}{2}\right]^4 + \left[-\frac{1}{2}\right]^3 + \cdots .$$

Tento rad je prerovnaním geometrického radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ s koeficientom $q = -1/2$, ktorý konverguje absolútne. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2}\right]^n = -\left[-\frac{1}{2}\right]^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2}\right]^n = -1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}. \blacksquare$$

Ďalej sa budeme zaoberať **úlohou ako nájsť nejaký rad s predpísaným súčtom**. Princíp tvorby takýchto radov môžeme často využiť pri určovaní súčtov konkrétnych číselných radov. Vytvoriť rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s konkrétnym súčtom $s \in R^*$ nie je zložité.

Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Označme $s_0 = 0$. Ak pre $n \in N$ položíme

$$a_1 = s_1 = s_1 - s_0, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad a_3 = s_3 - s_2, \quad \ldots, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots,$$

potom pre n-tý čiastočný súčet t_n radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$t_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) = s_n.$$

Z toho vyplýva, že platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s.$

Niekedy je výhodné vyjadriť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocou nulovej postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, t.j. postupnosti, ktorá konverguje k číslu 0. Potom pre $n \in N$ stačí položiť

$$s_n = s + b_n, \quad \text{resp.} \quad s_n = s - b_n, \qquad \text{t.j.} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s \pm b_n) = s \pm 0 = s.$$

Potom pre n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí

$$a_1 = s_1 = s \pm b_1, \qquad a_n = s_n - s_{n-1} = (s \pm b_n) - (s \pm b_{n-1}) = \pm(b_n - b_{n-1}).$$

To znamená, že ak je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca, prípadne neklesajúca postupnosť, dokážeme vytvoriť rad s predpísaným súčtom $s \neq 0$, ktorý má iba nezáporné, resp. nekladné členy. Je zrejmé, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je v tomto prípade absolútne konvergentný.

Príklad 2.4.26.
Ak položíme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$, potom pre všetky $n \in N$, $n \geq 2$ platí

$$a_1 = s_1 = 1, \qquad a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-n}{n(n-1)} = \frac{-1}{(n-1)n}.$$

Potom pre daný číselný rad platí

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \cdots - \frac{1}{(n-1)n} - \cdots .$$

Z toho navyše vyplýva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$ $\blacksquare$

Príklad 2.4.27.
Zostrojte číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby konvergoval k súčtu $s = 1$.

Riešenie.
Položíme $a_1 = s \pm b_1$, $s_n = \pm(b_n - b_{n-1})$, pričom $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

a) Ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, potom $a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2\cdot 1+1}{1\cdot(1+1)}$ a pre $n = 2, 3, 4, \ldots$ platí

$$a_n = b_n - b_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right] = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Z toho vyplýva $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{3}{1\cdot 2} - \frac{5}{2\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 4} - \frac{9}{4\cdot 5} + \cdots .$

b) Ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, potom $a_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot(1+1)^2}$ a pre $n = 2, 3, 4, \ldots$ platí

$$a_n = -(b_n - b_{n-1}) = -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{-n^2+n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Z toho vyplýva $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{5}{4\cdot 9} + \frac{7}{9\cdot 16} + \frac{9}{16\cdot 25} + \cdots$. ■

Vytváranie radov s predpísaným súčtom nie je samoúčelné. Znalosť súčtu niektorého radu môžeme využiť pri určovaní súčtu iného radu (príklad 2.4.28).

Príklad 2.4.28.
Určte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots$.

Riešenie.
Na základe príkladov 2.4.20 a 2.4.26 platí

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n(n+1)} &= \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \tfrac{1}{4\cdot 5} + \tfrac{1}{5\cdot 6} + \tfrac{1}{6\cdot 7} + \tfrac{1}{7\cdot 8} + \tfrac{1}{8\cdot 9} + \cdots = 1,\\
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(2n-1)2n} &= \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \tfrac{1}{5\cdot 6} + \tfrac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2,\\
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2n(2n+1)} &= \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{4\cdot 5} + \tfrac{1}{6\cdot 7} + \tfrac{1}{8\cdot 9} + \cdots = ?.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} = 1 - \ln 2$. ■

Príklad 2.4.29.
Na záver uvedieme bez výpočtu niektoré číselné rady a ich súčty. Nech $a \in R$, potom platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}. \ ■$$

2.4.6 Súčiny číselných radov

Nech $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_m$, $b = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ sú dva číselné výrazy s konečnými počtami členov. Ak ich vynásobíme, potom dostaneme výraz

$$\begin{aligned}
c &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_m)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) =\\
&= (a_0b_0 + a_0b_1 + \cdots + a_0b_n) + (a_1b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_1b_n) + \cdots + (a_mb_0 + a_mb_1 + \cdots + a_mb_n).
\end{aligned}$$

Ak výraz c prerovnáme, potom ho môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}
c = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3) + \cdots\\
\cdots + (a_mb_{n-2} + a_{m-1}b_{n-1} + a_{m-2}b_n) + (a_mb_{n-1} + a_{m-1}b_n) + a_mb_n.
\end{aligned}$$

Súčet indexov $i + j$ výrazov a_ib_j v každej zátvorke je konštantný.

Predchádzajúcu úvahu môžeme vykonať aj pre nekonečné rady[26] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Ich súčin vyjadríme v tvare dvojnásobného radu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)b_0 + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)b_1 + \cdots\\
&\qquad \cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)b_m + \cdots =\\
&= (a_0b_0 + a_1b_0 + \cdots + a_nb_0 + \cdots) + (a_0b_1 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_1 + \cdots) + \cdots\\
&\qquad \cdots + (a_0b_m + a_1b_m + \cdots + a_nb_m + \cdots) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_nb_m.
\end{aligned}$$

Ak členy súčinu radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ prerovnáme, potom číselný rad

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots\\
&\qquad \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_ib_{n-i} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) + \cdots =
\end{aligned}$$

[26] Pre ďalšie účely bude výhodnejšie, ak budeme číselné rady indexovať od čísla 0.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

nazývame **Cauchyho súčinom radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.**

Poznámka 2.4.18.
Cauchyho súčin číselných radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + \cdots + a_n b_1) + \cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + \cdots + a_i b_{n+1-i} + \cdots + a_n b_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

Poznámka 2.4.19.
Predstavu Cauchyho súčinu radov si môžeme ilustrovať na násobení dvoch polynómov nekonečného stupňa. Ak vynásobíme dva polynómy nekonečného stupňa

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots, \qquad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x + \cdots$$

dostaneme opäť polynóm nekonečného stupňa

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} x^n.$$

Príklad 2.4.30.
Číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje na základe Leibnizovho kritéria.

Pre Cauchyho súčin $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1-i} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} \frac{(-1)^{n+1-i}}{\sqrt{n+1-i}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{i(n+1-i)}}.$$

Keďže pre všetky $n \in N$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $\sqrt{i}\sqrt{n+1-i} \leq \sqrt{n}\sqrt{n} = n$, potom

$$|c_n| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i(n+1-i)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n+1-i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Z toho vyplýva, že platí $\lim_{n\to\infty} |c_n| \geq 1$. To znamená, že nemôže platiť $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Potom nie je splnená nutná podmienka konvergencie, t.j. rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nekonverguje. ■

Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že Cauchyho súčin dvoch konvergentných radov nemusí konvergovať. Ale ako ukazuje nasledujúca veta (uvádzame ju bez dôkazu), ak aspoň jeden z týchto radov konverguje absolútne, potom Cauchyho súčin konverguje.

Veta 2.4.17.
Ak rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t$ konvergujú, pričom aspoň jeden z nich absolútne,

potom Cauchyho súčin týchto radov $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje a má súčet st, t.j. platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Dôsledok 2.4.17.a.
Ak číselné rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergujú absolútne, potom ich Cauchyho súčin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje tiež absolútne.

Príklad 2.4.31.
Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$, kde $q \in (-1\,;\,1)$.

Riešenie.
Pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\,|q|^{n+1}}{(n+1)\,|q|^n} = |q| \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = |q| < 1,$$

T.j. rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ konverguje absolútne na základe d'Alembertovho kritéria.
Pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ a pre všetky $i = 0, 1, \ldots, n$ platí

$$a_n = (n+1)q^n = q^0q^n + q^1q^{n-1} + \cdots + q^iq^{n-i} + \cdots + q^{n-1}q^1 + q^nq^0 = \sum_{i=0}^{n} q^iq^{n-i}.$$

To znamená, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ je Cauchyho súčinom radov $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Keďže $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje absolútne, potom platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}. \ \blacksquare$$

Cvičenia

2.4.1. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{n}}$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$, m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$,

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$, q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$, s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$,

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$, w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$, x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}$, y) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$.

2.4.2. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)^2}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n^2}$, p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{3}{8}\right)^n$, s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

u) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$, v) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, w) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$, x) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}$.

2.4.3. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{\sqrt{n}}}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n}}$, j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{n}}$, k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n}}$, l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n\cdot n}}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots n^2}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$, n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\sqrt[2]{3}\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}$, o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$,

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 11\cdots(10n-9)}{(2n-1)!}$, q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$, r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^4}$.

2.4.4. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n}-\sqrt{n-1}]$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{2n-1}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{2n-1}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-(-1)^n}{(-1)^n 2n}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$, k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}\right)$, l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n+1}(n+1)}$, n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$, o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$, q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(n^2+1)\pi}{n}$, r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$,

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$, t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$, u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$,

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$, w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$, x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}(\ln n)^n$.

2.4.5. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n n}{n+1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}$, g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{101\cdot 102\cdot 103\cdots(100+n)}$, j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\cdots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n-2)}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002\cdots(999+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}$, l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

2.4.6. Vypočítajte súčet radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+3}{n}^{-1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+7)}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right]$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{7}\right)^n$, l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}]$, n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n+7)(4n+11)}$.

2.4.7. Vyšetrite relatívnu a absolútnu konvergenciu radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n-1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+\ln n}$,

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{6^n}$, k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$, l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$,

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$, n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}$, o) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

2.4.8. Pre aké $a \in R$ konvergujú rady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+a}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin\frac{\pi}{n}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$.

2.4.9. Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergujú. Čo platí o konvergencii radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

2.4.10. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Čo platí o konvergencii radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

2.4.11. Dokážte, že ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom tiež konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

2.4.12. Dokážte, že ak konvergujú číselné rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, potom konvergujú tiež rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)^2$.

2.4.13. Dokážte, že ak $\lim_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$, potom číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2.4.14. Vypočítajte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$.

2.4.15. Vypočítajte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + 7^{n+1}}{14^n}$.

2.4.16. Dokážte, že platí $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

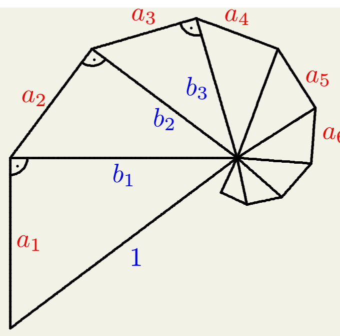
2.4.17. Dokážte: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

2.4.18. Prerovnajte rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, aby divergoval do ∞, do $-\infty$ a konvergoval k 0.

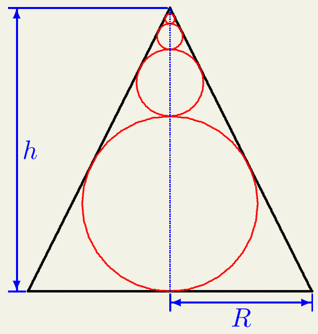
2.4.19. Prerovnajte rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, aby divergoval do ∞, do $-\infty$ a konvergoval k 0.

2.4.20. Určte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho n-tý člen a_n, ak jeho n-tý čiastočný súčet je:

a) $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, b) $s_n = 1 + \frac{1}{2^n}$, c) $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$, d) $s_n = \frac{n-2}{2n}$.



Obr. 2.4.14: Cvičenie 2.4.22.



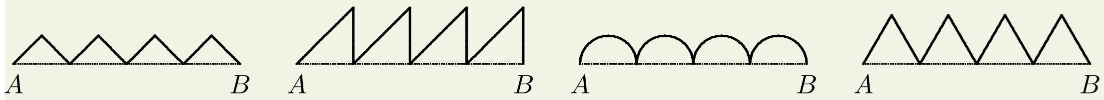
Obr. 2.4.15: Cvičenie 2.4.23.

2.4.21. Nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s chybou menšou ako ε, ak:

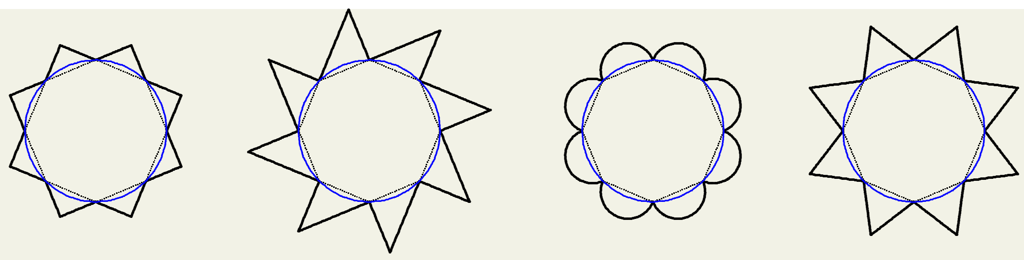
a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 0,1$, b) $a_n = \dfrac{1}{n^3}$, $\varepsilon = 0,01$, c) $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n-3}$, $\varepsilon = 0,03$.

2.4.22. Nech $a_1 \in (0\,;1)$. Uvažujme pravouhlý trojuholník s preponou 1 a odvesnami a_1, b_1. Nech b_1 predstavuje preponu podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami a_2, b_2. Nech b_2 predstavuje preponu podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami a_3, b_3. Takto zostrojíme nekonečnú postupnosť podobných pravouhlých trojuholníkov s odvesnami a_n, b_n (obr. 2.4.14). Zistite, či rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Ak áno, vypočítajte jeho súčet a. Vypočítajte súčet obsahov P týchto trojuholníkov.

2.4.23. Do rotačného kužeľa s výškou h a polomerom podstavy R sú postupne vpísané gule (obr. 2.4.15). Nájdite súčet objemov týchto gulí.



Obr. 2.4.16: Cvičenie 2.4.24.



Obr. 2.4.17: Cvičenie 2.4.25.

2.4.24. Úsečka AB dĺžky $d > 0$ je rozdelená deliacimi bodmi na $n \in N$ rovnakých častí. Nad každou z týchto častí zostrojíme (viď obrázok 2.4.16):

a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na úsečke AB,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na úsečke AB,
c) polkružnicu, ktorej priemer leží na úsečke AB, d) rovnostranný trojuholník.

Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte ju s hodnotou d.

2.4.25. Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšeme pravidelný n-uholník, $n \in N$. Nad každou z jeho strán zostrojíme smerom von z kružnice (viď obrázok 2.4.17):

a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na strane n-uholníka,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na strane n-uholníka,
c) polkružnicu s priemerom na strane n-uholníka, d) rovnostranný trojuholník.

Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte s obvodom kružnice o.

2.4.26. Vypočítajte obsah plochy, ktorú ohraničujú obrazce z cvičenia 2.4.25 a porovnajte ju s obsahom P vnútra kružnice.

„Čo robíte, keď máte niekoho rád?“ opýtal sa niekto pána Keunera.
„Vytvorím si o ňom obraz a snažím sa, aby sa mu podobal“ odpovedal pán Kreuner.
„Kto? Ten obraz?“
„Nie, ten človek.“
BERTOLT BRECHT

Častú uzavrú dvaja idioti sobáš z rozumu.
WIESLAW LEON BRUDZIŃSKI

Optimista vyhlasuje, že žijeme v najlepšom možnom svete.
Pesimista sa obáva, že je to pravda.
JAMES BRANCH CABELL

Každá brzda si myslí, že je záchranna.
TOMÁŠ JANOVIC

Zaujímam sa o budúcnosť, pretože v nej
hodlám stráviť zvyšok svojho života.
CHARLES KETTERING

Vyspať sa s ňou, to ano, ale žiadne dôvernosti.
KARL KRAUS

Čestní muži sa ženia rýchlo, múdri nikdy.
MIGUEL de CERVANTES

Kapitola 3

Reálne funkcie reálnej premennej

3.1 Reálne funkcie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať zobrazeniami, ktorých definičný obor aj obor hodnôt sú podmnožinami množiny reálnych čísel R, prípadne rozšírenej množiny reálnych čísel R^*. Takéto zobrazenia nazývame reálne funkcie reálnej premennej.

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je zobrazenie. Ak pre všetky $x \in D(f)$ platí, že $f(x) \in R$, t.j. $H(f) = f[D(f)] = \{f(x) ; x \in D(f)\} \subset R$, potom zobrazenie f nazývame **reálna funkcia**. Ak $D(f) \subset R$, potom zobrazenie f nazývame **funkcia reálnej premennej**.

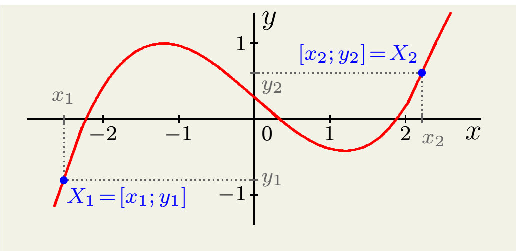
Hodnoty x nazývame **nezávislé premenné** a hodnoty $f(x)$ nazývame **závislé premenné**, resp. **funkčné hodnoty funkcie f v bode x**. Množinu $D(f)$ nazývame **definičný obor funkcie f** a $H(f)$ nazývame **obor hodnôt funkcie f**.

Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom **funkcia** rozumieť **reálnu funkciu jednej reálnej premennej**.

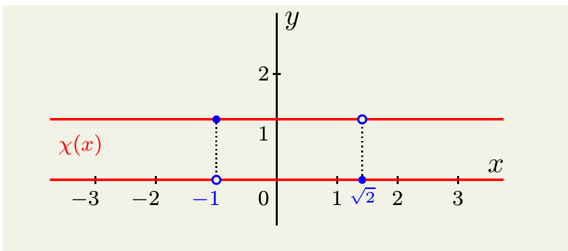
Poznámka 3.1.1.
Reálne číselné postupnosti, ktorými sme sa zaoberali v predchádzajúcej kapitole, sú špeciálnym prípadom reálnych funkcií s definičným oborom $N \subset R$.

Funkcia $y = f(x)$ je množina usporiadaných dvojíc $[x; f(x)]$, kde $x \in D(f)$. Takže ju môžeme v euklidovskej rovine R^2 graficky zobraziť ako množinu bodov, ktoré majú v **pravouhlom súradnicovom systéme**[1]súradnice $[x; f(x)]$. Túto množinu, t.j. množinu $\{[x; y] \in R^2 ; x \in D(f),\ y = f(x)\}$ nazývame **graf funkcie $y = f(x)$**.

Karteziánsky súradnicový systém sa skladá z dvoch na seba kolmých **súradnicových osí**, ktoré obyčajne označujeme x, y a nazývame **x-ová** a **y-ová** (**súradnicová**) **os**. Ich priesečník označujeme symbolom 0 alebo O a nazývame **počiatok súradnicového systému**. Každému bodu $X \in R^2$ je priradená dvojica hodnôt $[x; y]$, ktoré nazývame **x-ová súradnica** a **y-ová súradnica**. Situácia je znázornená na obrázku 3.1.1.



Obr. 3.1.1: Karteziánsky systém.



Obr. 3.1.2: Dirichletova funkcia $\chi(x)$.

Geometrická interpretácia funkcie nám v mnohých prípadoch pomôže pri skúmaní vlastností danej funkcie. Pojem grafu je ale u mnohých ľudí spojený s pojmom krivka, t.j. „súvislá čiara“. Táto predstava je ale vzhľadom k veľkej všeobecnosti pojmu funkcie zavádzajúca. Existujú funkcie, ktorých grafy majú veľmi málo spoločné s touto predstavou, dokonca sa dajú veľmi ťažko nakresliť. Príkladom je **Dirichletova funkcia χ** (obr. 3.1.2) definovaná $\chi(x) = 1$ pre x racionálne a $\chi(x) = 0$ pre x iracionálne. Jej body ležia na priamkách $y = 0$ a $y = 1$, ale nevypĺňajú tieto priamky úplne.

Funkcia je určená definičným oborom a vzťahom medzi nezávislou a závislou premennou. Predpis $y = f(x)$, $x \in D(f)$ vyjadruje aj obor hodnôt $H(f)$. Definičným oborom býva často interval alebo zjednotenie intervalov. Ak nie je definičný obor funkcie zadaný, resp. ak je ako definičný obor zadaná množina reálnych čísel R, potom budeme pod definičným oborom rozumieť množinu reálnych čísel, pre ktoré má daný vzťah zmysel. Túto množinu nazývame **prirodzený** (**maximálny**) **definičný obor funkcie**.[2]

To znamená, že predpisy $y = f(x)$, resp. $y = f(x)$, $x \in R$, resp. $y = f(x)\colon\ R \to R$ predstavujú funkciu zadanú výrazom $f(x)$ s maximálnym definičným oborom. Na druhej strane funkcia $y = f(x)$, $x \in A$, $A \subset R$, resp. $y = f(x)\colon\ A \to R$, $A \subset R$ predstavuje funkciu zadanú výrazom $f(x)$ s definičným oborom A. Obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ reprezentuje množina $H(f) = \{f(x) ; x \in D(f)\}$, kde $D(f)$ je definičný obor funkcie f.

[1]Tiež sa nazýva (**karteziánsky**) **súradnicový systém**, (**karteziánska**) **súradnicová sústava**, resp. **systém karteziánskych súradníc**.
[2]Je to tzv. **existenčný obor výrazu**, ktorým je funkcia definovaná.

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$, $x \in A$ je **injektívna** (**injekcia**, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, t.j. ak zo vzťahu $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva $x_1 = x_2$.

Ak $f(A) = B$, potom hovoríme, že funkcia $y = f(x)$, $x \in A$ **zobrazuje množinu** A **na množinu** B a funkciu f nazývame **surjektívna** (**surjekcia**, **na množinu** B). To znamená, že funkcia f je surjektívna, ak ku každému $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$ Ak $f(A) \subset B$, potom hovoríme, že funkcia f **zobrazuje množinu** A **do množiny** B.

Ak je funkcia f injektívna a zároveň surjektívna (prostá na), nazývame ju **bijektívna** (**bijekcia**, **prostá na množinu**, **jednojednoznačná**).

Príklad 3.1.1.
Predpis $f\colon\ y = x^2$ vyjadruje funkciu $f(x) = x^2$, $x \in R$, t.j. $f(x) = x^2$, $f\colon\ R \to R$.
Predpis $f\colon\ y = \sqrt{x}$ vyjadruje funkciu $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$, t.j. $f\colon\ \langle 0\,;\,1\rangle \to R$.
Predpis $f\colon\ y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0\,;\,1\rangle$ vyjadruje inú funkciu $f(x) = \sqrt{x}$, $f\colon\ \langle 0\,;\,1\rangle \to R$
alebo presnejšie povedané $f\colon\ \langle 0\,;\,1\rangle \to \langle 0\,;\,1\rangle$. ■

Výraz, ktorým je daná funkcia definovaná, môže mať rôzne tvary. Najčastejšie a pre účely matematickej analýzy najvhodnejšie je analytické zadanie vzorcom, t.j. rovnicou $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Výraz $f(x)$ na pravej strane rovnice obsahuje najviac jednu premennú x a nadobúda pre konkrétne x jednoznačné hodnoty. Hovoríme, že funkcia f je zadaná **explicitne**.

Funkcia môže byť analyticky zadaná aj ináč ako vzťahom $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Časté je **parametrické vyjadrenie** (obr. 3.1.3), t.j. vyjadrenie dvojicou rovníc

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\quad t \in J,$$

kde φ, ψ sú zobrazenia (funkcie) definované na množine $J \subset R$. Množina J býva obyčajne interval. Premenná t sa nazýva **parameter** a má pomocný význam, pretože nás zaujíma vzťah medzi x a y. Predchádzajúce rovnice definujú reláciu $f \subset R^2$:

$$f = \left\{[x;y] \in R^2\,;\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in J\right\}. \tag{3.1}$$

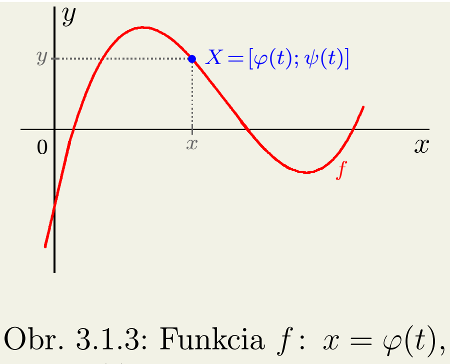
Táto relácia môže byť za určitých podmienok funkciou. Je to v prípade, keď je zobrazenie $x = \varphi(t)$, $t \in J$ prosté a ku každému $\varphi(t)$, $t \in J$ existuje práve jedno $\psi(t)$. Vtedy hovoríme, že funkcia f je definovaná **parametricky** (funkciu **parametrizujeme**) rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$.

Keďže je zobrazenie $x = \varphi(t)$ na množine J prosté (t.j. je bijektívne), existuje k nemu inverzné zobrazenie $t = \varphi^{-1}(x)$, ktoré je definované na nejakej množine $M = \varphi(J)$. Funkciu f môžeme potom vyjadriť v tvare

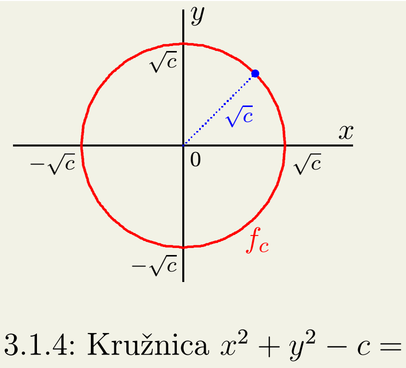
$$y = f(x) = \psi(t) = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right],\ x \in M. \tag{3.2}$$

Prechod od systému rovníc $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ k tvaru (3.2) nazývame **eliminácia**[3] **parametra** t v parametrickom vyjadrení funkcie f.

Poznámka 3.1.2.
Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme parametrizovať nekonečným množstvom funkcií. Stačí zvoliť funkciu $x = \varphi(t)$, $t \in J$ tak, aby bola prostá na množinu $D(f)$, t.j. aby bola bijekciou $J \to D(f)$. Hodnotu y môžeme potom vyjadriť $y = f(x) = f(\varphi(t))$, $t \in J$. Je zrejmé, že najjednoduchšie parametrické vyjadrenie má tvar $x = t$, $y = f(t)$, $t \in D(f)$.



Obr. 3.1.3: Funkcia $f\colon\ x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ zadaná parametricky.



Obr. 3.1.4: Kružnica $x^2 + y^2 - c = 0$, $c \geq 0$ z príkladu 3.1.2.

Funkcia f môže byť zadaná rovnicou $F(x, y) = 0$, kde F je zobrazenie z množiny R^2 do R. Niekedy sa navyše požaduje, aby platilo $[x;y] \in A$, kde $A \subset R^2$ je vopred daná množina. Predchádzajúca rovnica opäť definuje nejakú reláciu $f \subset R^2$:

$$f = \left\{[x;y] \in R^2\,;\ F(x,y) = 0\right\},\ \text{resp. } f = \left\{[x;y] \in R^2\,;\ F(x,y) = 0, [x;y] \in A\right\}. \tag{3.3}$$

Ak je relácia f funkciou, potom hovoríme, že funkcia f je definovaná **implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$. Ak uvážime $y = f(x)$, potom môžeme písať $F(x, f(x)) = 0$.

[3] Teoreticky vieme eliminovať parameter z každého vyjadrenia, prakticky to ale môže byť problém.

Poznámka 3.1.3.
Funkcia $y=f(x)$, ktorá je zadaná implicitne rovnicou $F(x,y)=0$ sa obyčajne vyšetruje metódami matematickej analýzy funkcií viac premenných.

Príklad 3.1.2.
Uvažujme reláciu $f_c = \{[x;y]\in R^2\,;\, x^2+y^2=c\}$, kde $c\in R$ (obr. 3.1.4).
Pre $c=0$ dostaneme reálnu funkciu $f_0=\{[0;0]\}$, ktorú môžeme explicitne vyjadriť napríklad v tvare $f\colon\ y=x,\ x\in\{0\}$ alebo v tvare $f\colon\ y=0,\ x\in\{0\}$.
Pre $c<0$ dostaneme $f_c=\emptyset$, pretože pre všetky $x,y\in R$ platí $x^2+y^2-c\geq -c>0$.
Pre $c>0$ dostaneme reláciu $f_c=\big\{\big[x;\pm\sqrt{c-x^2}\,\big]\ ;\ x\in\langle -\sqrt{c}\,;\ \sqrt{c}\rangle\big\}$, ktorá funkciou nie je. Predstavuje kružnicu so stredom v počiatku $[0;0]$ a s polomerom $\sqrt{c}$. ■

Príklad 3.1.3.
Funkciu $f\colon y=|x|,\ x\in R$ môžeme zadať rôznymi spôsobmi. Týchto spôsobov je zrejme nekonečne veľa. Na ilustráciu uvedieme niektoré z nich:

Explicitne: $y=\sqrt{x^2}$, resp. $y=\max\{-x,x\}$, resp. $y=\begin{cases}-x, & \text{pre } x<0,\\ x, & \text{pre } x\geq 0.\end{cases}$

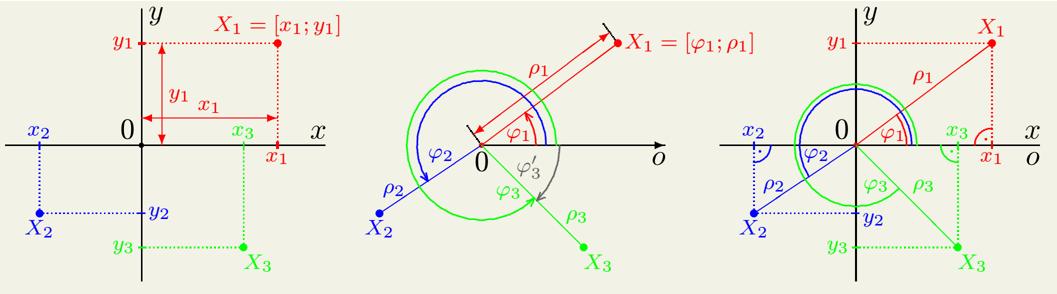
Parametricky: $x=t,\ y=|t|,\ t\in R$, resp. $x=t,\ y=\sqrt{t^2},\ t\in R$, resp. $x=t^3,\ y=|t^3|,\ t\in R$.
Implicitne: $y^2-x^2=0,\ y\geq 0$, resp. $y-|x|=0$, resp. $y-\sqrt{x^2}=0$. ■

Funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ môže byť niekedy zadaná aj **tabuľkou**, t.j. dvojicami hodnôt nezávislej premennej x a funkčnej hodnoty $f(x)$. Táto metóda sa používa najmä v prípadoch, keď chceme nájsť závislosť medzi nejakými nameranými hodnotami. Je zrejmé, že takýmto spôsobom môžeme definovať funkciu úplne iba, ak jej definičný obor je konečná množina. Ale na objasnenie situácie to v mnohých prípadoch stačí.

V technických aplikáciach sa niekedy funkcia zadáva tiež **graficky**, pomocou nakresleného grafu. Z grafu môžeme hodnoty funkcie určiť iba približne a teda pre ďalšie matematické spracovanie je táto metóda prinajmenšom málo vhodná, aj keď jej nemôžeme poprieť praktický význam.

Okrem pravouhlého karteziánskeho súradnicového systému sa na vyjadrenie funkcie používa tzv. **polárny súradnicový systém**. Tento systém sa skladá z **počiatku** (**pólu**) **polárneho súradnicového systému** a z jednej poloosi z neho vychádzajúcej, ktorú nazývame **polárna os**. Počiatok ztotožníme s počiatkom 0 karteziánskeho pravouhlého súradnicového systému. Polárna os o je polpriamka vychádzajúca z bodu 0 a ztotožníme ju s kladnou x-ovou poloosou (obr. 3.1.5) karteziánskeho systému.

Ak má bod X v karteziánskom pravouhlom systéme súradnice $[x;y]$, potom v polárnych súradniciach mu priradíme dvojicu súradníc $[\varphi;\rho]$. Súradnica ρ predstavuje vzdialenosť bodu X od počiatku 0 a nazýva sa **sprievodič** (**rádiusvektor**) **bodu** X. To znamená, že platí $\rho=|0X|$. Súradnica φ predstavuje orientovaný uhol, ktorý zviera polárna os o s polpriamkou $0X$ a nazýva sa **polárny uhol** (**amplitúda**) **bodu** X.



Obr. 3.1.5: Pravouhlý a polárny súradnicový systém v Euklidovskej rovine R^2.

Z definície a zo základných vlastností goniometrických funkcií vyplýva, že pre karteziánske súradnice $[x;y]$ a polárne súradnice $[\varphi;\rho]$ daného bodu X platí

$$x=\rho\cdot\cos\varphi,\ \ y=\rho\cdot\sin\varphi,\qquad \text{pričom}\quad \rho\in\langle 0\,;\,\infty)\,,\ \ \varphi\in(-\infty\,;\,\infty)\,.$$

Z toho pre $\rho\neq 0$ vyplýva $\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\varphi=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Poznámka 3.1.4.
Musíme si uvedomiť, že každý bod $X\in R^2$ má v karteziánskom systéme súradnice určené jednoznačne. V polárnych súradniciach má bod X nekonečne veľa vyjadrení, pretože funkcie sínus a kosínus sú periodické s periodou 2π. Je zrejmé, že stačí zmeniť polárny uhol φ o ľubovoľnú hodnotu $2k\pi$, $k\in Z$. Z tohto dôvodu sa pre rozsah polárneho uhla φ zvykne určiť interval dĺžky 2π.

Poznámka 3.1.5.
Funkcia f má v polárnom systéme tvar $f = \{[\varphi;\rho]\in R^2\}$, resp. $f\colon\ \rho = f(\varphi)$.
Funkcia $y = f_1(x) = 1$, $x\in R$ zodpovedá v karteziánskom pravouhlom systéme konštantnej funkcii, ktorej grafom je priamka rovnobežná s osou x.
Funkcia $\rho = f_2(\varphi) = 1$, $\varphi\in R$ zodpovedá v polárnom systéme taktiež konštantnej funkcii, ale jej grafom je kružnica so stredom v počiatku súradnicového systému 0 a polomerom $\rho = 1$. Je zrejmé, že v karteziánskom systéme f_2 funkciou nie je.

Príklad 3.1.4.
Nech $x_1, x_2\in R$, $x_1 \neq x_2$ a $y_1, y_2\in R$ sú dané čísla.
Určte koeficienty $a, b\in R$ funkcie $f\colon\ y = ax + b$ tak, aby $[x_1; y_1]\in f$, $[x_2; y_2]\in f$.

Riešenie.
Máme určiť $a, b\in R$ tak, aby $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$. Po odčítaní rovníc dostaneme

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1), \quad \text{t.j. } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Z prvej rovnice vyjadríme koeficient b a dosadíme a. Potom platí

$$b = y_1 - ax_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 = \frac{y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_1 + y_1x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}.$$

Funkcia $f\colon\ y = ax + b$ má potom tvar

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2x - y_1x + y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2 + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}y_1. \blacksquare$$

Poznámka 3.1.6.
Funkcia $f\colon\ y = ax + b$, kde $a, b\in R$, sa nazýva **lineárna funkcia**. Jej grafom je priamka. Takže sme hľadali rovnicu priamky, ktorá je určená dvomi rôznymi bodmi. Hodnota a predstavuje smernicu tejto priamky, t.j. tangens uhla, ktorý zviera s osou x.

3.1.1 Základné vlastnosti funkcií

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **ohraničená zdola** [resp. **ohraničená zhora**] **na množine** $A \subset D(f)$, ak je ohraničená zdola [resp. ohraničená zhora] množina funkčných hodnôt $f(A) = \{f(x)\,;\, x\in A\}$, t.j. ak existuje číslo $m\in R$ [resp. $M\in R$] také, že pre všetky $x\in A$ platí $m \leq f(x)$ [resp. $f(x) \leq M$].

Funkcia f sa nazýva **ohraničená na množine** A, ak je ohraničená zdola a aj zhora na množine A, t.j. ak existujú $m, M\in R$ také, že pre všetky $x\in A$ platí $m \leq f(x) \leq M$.

Ak nie je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora] na množine A, potom sa nazýva **neohraničená zdola** [resp. **zhora**] **na množine** A.

Ak funkcia f nie je ohraničená (t.j. nie je ohraničená zdola alebo zhora) na množine A, potom sa nazýva **neohraničená na množine** A

Poznámka 3.1.7.
Uvedené vlastnosti boli definované na podmnožine $A \subset D(f)$, preto hovoríme o **lokálnych vlastnostiach**. V prípade, že nejaká vlastnosť platí na celom definičnom obore $D(f)$ (t.j. ak $D(f) = A$), potom hovoríme **o globálnej vlastnosti** a prívlastok „na množine $D(f)$“ vynechávame.

Funkcia f sa nazýva **ohraničená zdola** [resp. **ohraničená zhora**], ak existuje číslo $m \in R$ [resp. $M \in R$] také, že pre všetky $x\in D(f)$ platí $m \leq f(x)$ [resp. $f(x) \leq M$].

Funkcia f sa nazýva **ohraničená**, ak je ohraničená zdola a aj zhora na množine, t.j. ak existujú $m, M \in R$ také, že pre všetky $x\in D(f)$ platí $m \leq f(x) \leq M$.

Ak nie je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora], potom sa nazýva **neohraničená zdola** [resp. **zhora**]. Ak funkcia f nie je ohraničená (t.j. nie je ohraničená zdola alebo zhora), potom sa nazýva **neohraničená**.

Príklad 3.1.5.
a) Funkcia $f\colon\ y = x^2 + 1$ je ohraničená zdola a nie je ohraničená zhora.
Na intervale $(0\,;\,1)$ je ohraničená, pretože pre všetky $x\in(0\,;\,1)$ platí $1 < x^2 + 1 < 2$.
b) Funkcia $f\colon\ y = (x^2 + 1)^{-1}$ je ohraničená.
Pre všetky $x\in R$ platí $1 \leq x^2 + 1$, t.j. $0 < (x^2 + 1)^{-1} \leq 1$. $\blacksquare$

Infimum [resp. suprémum] množiny $f(A)$ nazývame **infimum** [resp. **suprémum**] **funkcie** f **na množine** A a označujeme symbolmi $\inf f(A) = \inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf\{f(x)\,;\, x\in A\}$ [resp. $\sup f(A) = \sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup\{f(x)\,;\, x\in A\}$].

Infimum [resp. suprémum] funkcie f na celom definičnom obore $D(f)$ nazývame **infimum** [resp. **suprémum**] **funkcie** f a označujeme $\inf f(x)$ [resp. $\sup f(x)$].

Poznámka 3.1.8.
Z definície vyplýva, že ak je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora] na množine A, potom $\inf f(A)$ [resp. $\sup f(A)$] je číslo. Ak je funkcia f neohraničená zdola [resp. zhora] na množine A, potom $\inf f(A) = -\infty$ [resp. $\sup f(A) = \infty$].

Ak existuje najmenší [resp. najväčší] prvok množiny $f(A)$, potom ho nazývame **najmenšia hodnota** (**minimálna hodnota, minimum**) [resp. **najväčšia hodnota** (**maximálna hodnota, maximum**)] **funkcie f na množine A** a označujeme symbolom $\min\limits_{x\in A} f(x) = \min\{f(x)\,;\, x\in A\}$ [resp. $\max\limits_{x\in A} f(x) = \max\{f(x)\,;\, x\in A\}$].

Je zrejmé, že pre aspoň jedno $x_0\in A$ platí $f(x_0) = \min f(A)$ [resp. $f(x_0) = \min f(A)$]. Ak pre všetky $x\in A$ platí $f(x_0) \leq f(x)$ [resp. $f(x) \geq f(x_0)$], potom hovoríme, že **funkcia f nadobúda (má) v bode x_0 na množine A minimum** [resp. **maximum**].

Ak platia ostré nerovnosti, t.j. ak pre všetky $x\in A$, $x\neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x) > f(x_0)$], potom hovoríme, že **funkcia f nadobúda (má) v bode x_0 na množine A ostré minimum** [resp. **ostré maximum**].

Minimum a maximum funkcie f na množine A nazývame súhrnne (**ostré**) **extrémy funkcie f na množine A**.

Ak $A = D(f)$, potom hovoríme o **globálnych** (**absolútnych**) **extrémoch funkcie f** a označujeme ich symbolmi $\min f(x)$, resp. $\max f(x)$.

Ak $A = O(x_0)$, kde $O(x_0) \subset D(f)$ je nejaké okolie, potom hovoríme o **lokálnych extrémoch funkcie f**.

To znamená, že **funkcia f má v bode x_0 lokálne minimum** [resp. **maximum**], ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x\in O(x_0)$ platí $f(x_0) \leq f(x)$ [resp. $f(x_0) \geq f(x)$].

Funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum [resp. **maximum**], ak existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x\in O(x_0)$, $x\neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x_0) > f(x)$].

Poznámka 3.1.9.
Ak existuje $\min\{f(x)\,;\, x\in A\}$, potom $\min\{f(x)\,;\, x\in A\} = \inf\{f(x)\,;\, x\in A\}$.
Ak existuje $\max\{f(x)\,;\, x\in A\}$, potom $\max\{f(x)\,;\, x\in A\} = \sup\{f(x)\,;\, x\in A\}$.

Príklad 3.1.6.
Uvažujme funkciu $f\colon\ y = x^2 + 1$.
Ak $A = D(f)$, potom $\inf f(x) = \min f(x) = 1$, $\sup f(x) = \infty$ a $\max f(x)$ neexistuje.
Ak $A = (0\,;\,1)$, potom $\inf\limits_{x\in A} f(x) = 1$, $\sup\limits_{x\in A} f(x) = 2$, $\min\limits_{x\in A} f(x)$ a $\max\limits_{x\in A} f(x)$ neexistujú.
Ak $A = \langle 0\,;\,1\rangle$, potom $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \min\limits_{x\in A} f(x) = 1$, $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \max\limits_{x\in A} f(x) = 2$. ■

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **rastúca** [resp. **klesajúca**] **na množine $A \subset D(f)$**, ak pre všetky $x_1, x_2\in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ [resp. $f(x_1) > f(x_2)$].

Funkcia f sa nazýva **neklesajúca** [resp. **nerastúca**] **na množine A**, ak pre všetky $x_1, x_2\in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ [resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$].

Funkcia f sa nazýva **konštantná na množine $A \subset D(f)$**, ak pre všetky $x_1, x_2\in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$, t.j. ak existuje $c\in R$ také, že pre všetky $x\in A$ platí $f(x) = c$. Konštantnú funkciu zjednodušene zapisujeme $f(x) =$ konšt., špeciálne funkcia $f(x) = 0$, $x\in A$ sa nazýva **nulová funkcia na množine A**.

V zmysle poznámky 3.1.7 sa funkcia f nazýva **rastúca** [resp. **klesajúca**, resp. **neklesajúca**, resp. **nerastúca**], ak pre všetky $x_1, x_2\in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ [resp. $f(x_1) > f(x_2)$, resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$, resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$]. Ak pre všetky $x\in D(f)$ platí $f(x) = c$, kde $c\in R$, potom sa nazýva **konštantná**.

Funkcia f sa nazýva **monotónna**, ak je neklesajúca alebo nerastúca (t.j. aj rastúca, klesajúca alebo konštantná). Ak je funkcia f iba rastúca alebo klesajúca, potom sa nazýva **rýdzo** (**ostro**) **monotónna**.

Niekedy je výhodné definovať pojem rastúcej alebo klesajúcej funkcie v bode. Funkcia f sa nazýva **rastúca** [resp. **klesajúca**] **v bode $x_0\in D(f)$**, ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x\in O^-(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$ [resp. $f(x) > f(x_0)$] a pre všetky $x\in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x_0) > f(x_0)$].

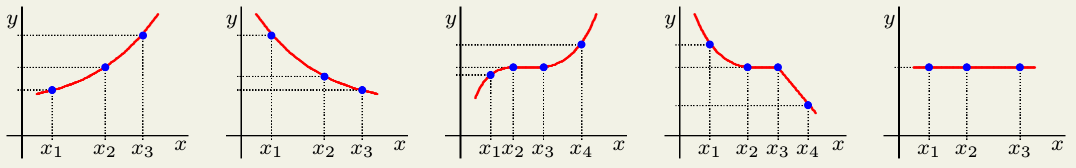
Funkcia f sa nazýva **neklesajúca** [resp. **nerastúca**] **v bode $x_0\in D(f)$**, ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x\in O^-(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ [resp. $f(x) \geq f(x_0)$] a pre všetky $x\in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) \leq f(x)$ [resp. $f(x_0) \geq f(x_0)$].

Z predchádzajúcich definícií vyplýva nasledujúca veta.

Veta 3.1.1.
Funkcia f je rastúca [resp. klesajúca] na otvorenom intervale $(a\,;\,b)$ práve vtedy, ak je rastúca [resp. klesajúca] v každom bode $x_0\in(a\,;\,b)$.

Na obrázku 3.1.6 sú postupne uvedené grafy rastúcej, klesajúcej, neklesajúcej (ale nie rastúcej), nerastúcej (ale nie klesajúcej) a konštantnej funkcie.

Príklad 3.1.7.
a) Funkcia $f\colon\ y = x + 1$ je rastúca na $D(f) = R$
b) Funkcia $f\colon\ y = \lfloor x\rfloor$ je neklesajúca na R, konštantná na $\langle k\,;\,k+1)$, $k\in Z$.
c) Funkcia $f\colon\ y = x^2$ je klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 0\,;\,\infty)$.
d) Funkcia $f\colon\ y = x/x$ je konštantná na množine $R - \{0\}$. ■



Obr. 3.1.6: Grafy rastúcej, klesajúcej, neklesajúcej, nerastúcej a konštantnej funkcie.

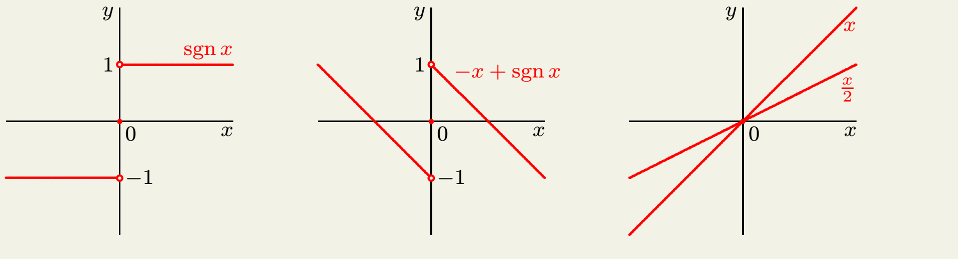
Z predchádzajúcich definícií vyplýva nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta 3.1.2.
Nech $y = f(x)$ je funkcia a nech $A \subset D(f)$, potom platí:

a) Funkcia $f =$ konšt. na A práve vtedy, ak je neklesajúca a nerastúca na A.
b) Ak je funkcia f rastúca na A, potom je funkcia f neklesajúca na A.
c) Ak je funkcia f klesajúca na A, potom je funkcia f nerastúca na A.
d) Funkcia f je rastúca na A práve vtedy, ak je neklesajúca na A a na každej podmnožine $B \subset A$ (s aspoň dvomi prvkami) nie je konštantná.
e) Funkcia f je klesajúca na A práve vtedy, ak je nerastúca na A a na každej podmnožine $B \subset A$ (s aspoň dvomi prvkami) nie je konštantná.
f) Ak je funkcia f rastúca na A, potom je rastúca v každom vnútornom bode $x_0 \in A$.
g) Ak je funkcia f klesajúca na A, potom je klesajúca v každom vnútornom bode $x_0 \in A$.

Poznámka 3.1.10.
Ako dokazuje nasledujúci príklad, ak je funkcia f rastúca [resp. klesajúca] v jednom bode $x_0 \in A$, ešte nemusí byť rastúca [resp. klesajúca] v jeho okolí.

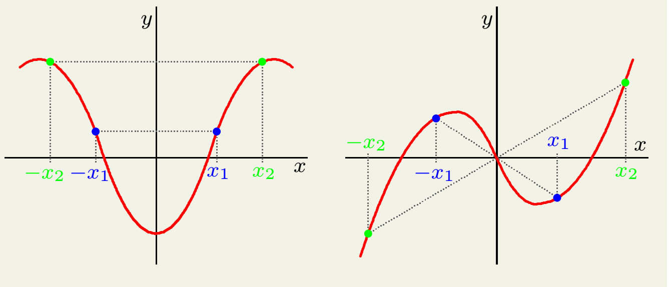
Príklad 3.1.8.
a) Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je rastúca v bode 0, konštantná na $(-\infty\,;\,0)$ a na $(0\,;\,\infty)$.
b) Funkcia $f(x) = -x + \operatorname{sgn} x$ je rastúca v bode 0 a klesajúca na $(-\infty\,;\,0)$ a $(0\,;\,\infty)$.
c) Funkcia $f(x) = x$ pre $x \in Q$, $f(x) = x/2$ pre $x \in R - Q$ je rastúca v bode $x_0 = 0$, je rastúca na množine Q a tiež na množine $R - Q$. Na druhej strane je zrejmé, že neexistuje reálny interval I, na ktorom je f rastúca (obr. 3.1.7). ■



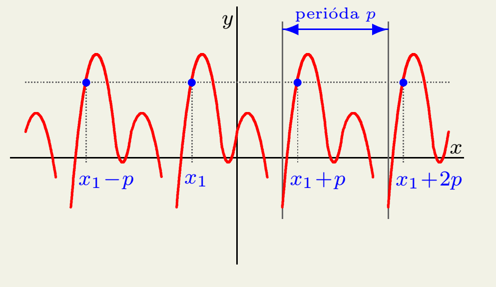
Obr. 3.1.7: Grafy funkcií z príkladu 3.1.8 a), b), c).

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **párna** [resp. **nepárna**], ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = f(-x)$ [resp. $f(x) = -f(-x)$].

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y a graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku súradnicového systému (obr. 3.1.8).



Obr. 3.1.8: Graf párnej a nepárnej funkcie.



Obr. 3.1.9: Graf periodickej funkcie.

Príklad 3.1.9.
a) Funkcia $y = |x|$ je párna, funkcia $y = \operatorname{sgn} x$ je nepárna (obr. 2.1.4, 2.1.5 na str. 27).
b) Funkcia $y =$ konšt. je párna a funkcia $y = 0$ je párna a zároveň aj nepárna.
c) Funkcia $y = x^2$, $x \in R$ je párna, ale funkcia $y = x^2$, $x \in \langle 0\,;\, 1\rangle$ párna nie je.
d) Funkcie $y = x^{-5}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-1}$, $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ sú nepárne.
e) Dirichletova funkcia $y = \chi(x)$ je párna. ■

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **periodická**, ak existuje $p \in R$, $p \neq 0$ také, že $x \in D(f)$ práve vtedy, ak $x + p \in D(f)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x + p) = f(x)$, t.j ak platí

$$x \in D(f) \iff x + p \in D(f), \qquad \forall x \in D(f)\colon\ f(x+p) = f(x).$$

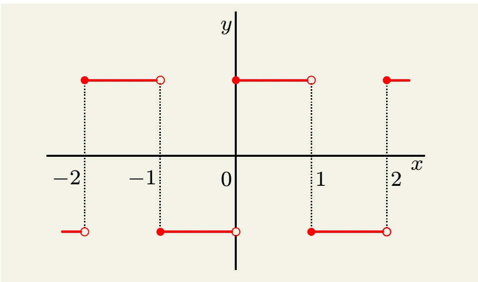
Číslo p nazývame **perióda funkcie f** (obrázok 3.1.9). Najmenšia kladná perióda (pokiaľ existuje) sa nazýva **primitívna** (**základná**) **perióda funkcie f**.

Poznámka 3.1.11.
Každý celočíselný násobok periódy je tiež perióda.
Ak je funkcia $y = f(x)$ periodická s periódou $p > 0$, potom ju stačí vyšetrovať na intervale s dĺžkou p, napríklad na intervale $\langle 0\,;\, p)$.
Každý interval s dĺžkou p nazývame **interval periodicity**.

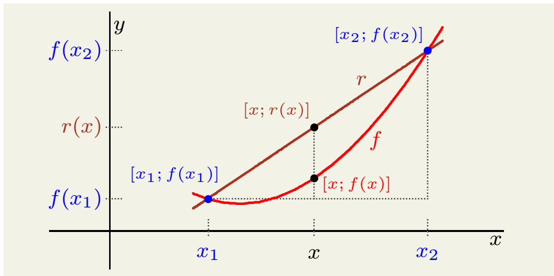
Príklad 3.1.10.
a) Goniometrické funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$ sú periodické so základnou periódou 2π.
b) Goniometrické funkcie $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ sú periodické so základnou periódou π.
c) Funkcia $y =$ konšt. je periodická, pričom periódou je každé $p \in R$, $p \neq 0$.
To znamená, že táto funkcia nemá základnú periódu.
d) Funkcia $y = x - \lfloor x \rfloor$ je periodická s periódou 1 (obr. 2.1.2 na str. 27).
e) Dirichletova funkcia χ je periodická, pričom periódou je každé $p \in Q$, $p \neq 0$. ■

Príklad 3.1.11.
Funkcia $y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ je periodická so základnou periódou 2 (obr. 3.1.10). Pre $x \in R$ platí

$$f(x+2) = (-1)^{\lfloor x+2 \rfloor} = (-1)^{\lfloor x \rfloor + 2} = (-1)^{\lfloor x \rfloor} \cdot (-1)^2 = (-1)^{\lfloor x \rfloor} = f(x). \ ■$$



Obr. 3.1.10: Funkcia $y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.



Obr. 3.1.11: Konvexná funkcia.

Funkcia f sa nazýva **konvexná** [resp. **konkávna**] **na intervale $I \subset D(f)$**, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x < x_2$ platí

$$f(x) \leq r(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) \quad [\text{resp. } \ f(x) \geq r(x)]. \tag{3.4}$$

Ak platia ostré nerovnosti, t.j. ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí

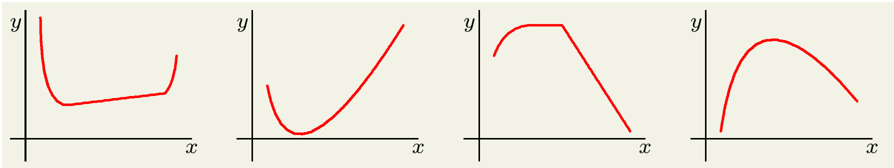
$$f(x) < r(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) \quad [\text{resp. } \ f(x) > r(x)], \tag{3.5}$$

potom funkciu f nazývame **rýdzo konvexná** [resp. **rýdzo konkávna**] **na intervale I**.

Funkcia f sa nazýva **rýdzo konvexná** [resp. **rýdzo konkávna**] **v bode $x_0 \in D(f)$**, ak existuje okolie $O(x_0)$, v ktorom je funkcia f rýdzo konvexná [resp. **rýdzo konkávna**].

Hovoríme, že funkcia f **má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexný bod** (**má v bode x_0 inflexiu**), ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že v ľavom okolí $O^-(x_0)$ je funkcia f rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna] a v pravom okolí $O^+(x_0)$ rýdzo konkávna [resp. rýdzo konvexná].

Na obrázku 3.1.12 sú postupne uvedené grafy konvexnej (nie však rýdzo), rýdzo konvexnej, konkávnej (nie rýdzo) a rýdzo konkávnej funkcie.



Obr. 3.1.12: Grafy konvexnej, rýdzo konvexnej, konkávnej a rýdzo konkávnej funkcie.

Poznámka 3.1.12.
Vzťah $f(x) \leq r(x)$ [resp. $f(x) \geq r(x)$] graficky znamená, že každý bod $[x; f(x)]$ leží pod [resp. nad] priamkou r (obrázok 3.1.11) určenou bodmi $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$. Z príkladu 3.1.4 vyplýva, že priamka r má tvar

$$r(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x + \frac{f(x_1)x_2 - f(x_2)x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1).$$

Príklad 3.1.12.
a) Funkcia $y = \sin x$ je rýdzo konkávna na $\langle 0\,;\,\pi\rangle$ a rýdzo konvexná na $\langle \pi\,;\,2\pi\rangle$.
b) Funkcia $y = x^2$ je rýdzo konvexná na R a funkcia $y = -x^2$ je rýdzo konkávna na R.
c) Funkcia $y =$ konšt. je konvexná (nie rýdzo) a konkávna (nie rýdzo) na R.
d) Funkcia $y = ax + b$ je konvexná aj konkávna na R pre všetky $a, b \in R$. ■

Veta 3.1.3.
Funkcia $y = f(x)$ je konvexná [resp. konkávna] na intervale $I \subset D(f)$ práve, vtedy ak pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre všetky $p \in R$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ platí:

$$f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2) \quad [\text{resp. } f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2)].$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme iba pre konvexnosť, pre konkávnosť sa dokáže analogicky.
$NP_{\Rightarrow}$: Nech $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Potom pre všetky $p \in (0\,;\,1)$, $q = 1 - p$ existuje $x \in (x_1\,;\,x_2)$ také, že platí

$$p = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q = 1 - p = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Potom platí

$$px_1 + qx_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2 = \frac{x_2x_1 - xx_1 + xx_2 - x_1x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x.$$

Takže $x_1 < px_1 + (1 - p)x_2 < x_2$. Potom z konvexnosti vyplýva

$$f(px_1 + qx_2) = f(x) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) = qf(x_2) + pf(x_1).$$

$PP_{\Leftarrow}$: Nech $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $p \in (0\,;\,1)$, $q = 1 - p$. Označme $x = px_1 + qx_2$, potom platí

$$x_1 < x_1 + q(x_2 - x_1) = (1-q)x_1 + qx_2 = px_1 + (1-p)x_2 = x_2 + p(x_1 - x_2) < x_2.$$

To znamená, že $px_1 + (1 - p)x_2 = x \in (x_1\,;\,x_2)$. Z toho vyplýva

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-q)x_1 + qx_2 = x_1 + q(x_2 - x_1) \\ x &= px_1 + (1-p)x_2 = x_2 - p(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \implies p = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Potom platí

$$f(x) = f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2). \blacksquare$$

Hovoríme, že bod $c \in D(f)$ je **nulový bod** (**koreň**) **funkcie** $y = f(x)$, ak platí $f(c) = 0$. Korene funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x) = 0$, $x \in D(f)$.

Príklad 3.1.13.
a) Funkcie $y = |x|$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^2 + x^4$ majú jediný koreň $c = 0$.
b) Dirichletova funkcia $\chi(x)$ má nekonečne veľa koreňov, sú to všetky iracionálne čísla.
c) Funkcia $y = x^2 + 2$ nemá koreň, pretože pre všetky $x \in R$ platí $x^2 + 2 \geq 2 > 0$. ■

3.1.2 Operácie s funkciami

Funkcie sú množiny, ktorých prvkami sú usporiadané dvojice vzorov x a obrazov $f(x)$. Takže aj relácie a operácie s funkciami musíme chápať ako relácie a operácie s množinami.

- **Rovnosť a usporiadanie funkcií**

Rovnosť funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ predstavuje rovnosť dvoch množín. To znamená, že musia byť ekvivalentné vzťahy $[x; y] \in f$ a $[x; y] \in g$. Potom musí platiť $D(f) = D(g)$ a $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in D(f)$.

Hovoríme, že **funkcia $y = f(x)$ sa rovná funkcii $y = g(x)$**, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$. Rovnosť funkcií f a g symbolicky zapisujeme $f = g$. V opačnom prípade hovoríme, že **funkcia f sa nerovná funkcii g** a zapisujeme $f \neq g$.

Funkcie $y = f(x)$, $y = g(x)$ sa môžu rovnať aj iba na časti svojho definičného oboru. Nech $A \subset D(f) \cap D(g)$. Hovoríme, že **funkcia f sa rovná funkcii g na množine A**, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$. Zapisujeme $f = g$, $x \in A$, resp. $f = g$ na množine A.

Príklad 3.1.14.
Nech $f\colon\ y = 1$, $g\colon\ y = x/x$, potom $f \neq g$, pretože $R = D(f) \neq D(g) = R - \{0\}$.
Keďže pre všetky $x \neq 0$ platí $1 = x/x$, potom $f = g$ na množine $R - \{0\}$. ■

Nech množina $A \subset D(f) \cap D(g)$. Hovoríme, že **funkcia f je menšia** [resp. **väčšia**] **ako funkcia g na množine A**, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) < g(x)$ [resp. $f(x) > g(x)$]. Zapisujeme $f < g$ [resp. $f > g$], $x \in A$ alebo $f < g$ [resp. $f > g$] na množine A.

Ak pripustíme aj rovnosť funkcií f, g na množine A, potom stručne píšeme $f \leq g$ [resp. $f \geq g$], $x \in A$.

Príklad 3.1.15.
Nech $f\colon\ y = x$, $g\colon\ y = x^2$. Na množine R neplatí ani jedna z relácií $f < g$, $f = g$, $f > g$. Ale $f < g$ na množine $R - (0\,;\,1)$, $f = g$ na množine $\{0, 1\}$, $f > g$ na množine $(0\,;\,1)$. ■

Poznámka 3.1.13.
Z príkladu 3.1.15 vyplýva, že vo všeobecnosti nemôžeme porovnávať funkcie f, g. Je ale zrejmé, že môžeme určiť množiny, na ktorých platia relácie $f < g$, $f = g$ alebo $f > g$.

- **Algebraické operácie s funkciami**

Funkcie môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť a deliť. Nech $y = f(x)$, $y = g(x)$ sú funkcie definované na množine $A \subset R$, potom **súčet $f+g$**, **rozdiel $f-g$**, **súčin fg**, **podiel f/g**, kde $g(x) \neq 0$ pre $x \in A$, **funkcií f a g na množine A** definujeme vzťahmi:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in A.$$

Absolútnu hodnotu $|f|$ funkcie f na množine A definujeme $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in A$.

Poznámka 3.1.14.
Operácie sčítania a násobenia funkcií môžeme definovať pre viac funkcií. Špeciálne pre $n \in N$ definujeme **n-tú mocninu f^n funkcie f** vzťahom $f^n(x) = [f(x)]^n$.

Príklad 3.1.16.
Nech $f\colon\ y = \sin x + 2$, $g\colon\ y = x^2$, potom

$$f \pm g\colon\ y = \sin x + 2 \pm x^2, \quad fg\colon\ y = x^2 \sin x + 2x^2, \quad g/f\colon\ y = x^2/(\sin x + 2). \ ■$$

- **Zúženie funkcie na množinu**

Uvažujme funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množinu $A \subset D(f)$. Hovoríme, že funkcia $y = h(x)$, $x \in A$ je **zúžením** (**reštrikciou**) **funkcie f na množinu A**, ak pre všetky $x \in A$ platí $h(x) = f(x)$. Označujeme $h = f|_A$. Je zrejmé, že graf funkcie h je časťou grafu f.

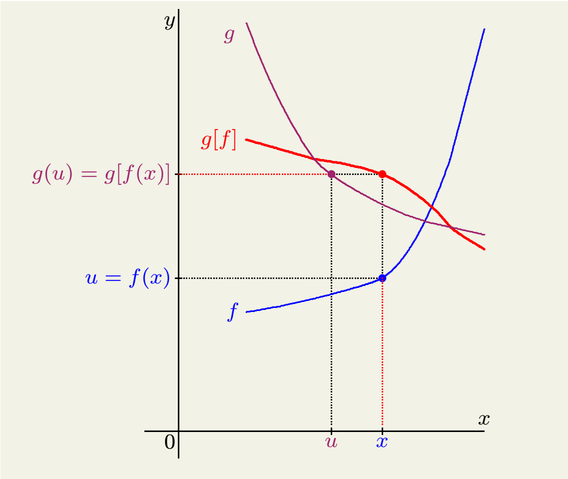
Príklad 3.1.17.
a) Funkcia $y = x^2$, $x \in \langle -1\,;\,1)$ je zúžením funkcie $y = x^2$, $x \in R$ na interval $\langle -1\,;\,1\rangle$.
b) Funkcia $y = 1$, $x \in Q$ je zúžením Dirichletovej funkcie $\chi(x)$, $x \in R$ na množinu Q.
c) Funkcia $y = 0$, $x \in \langle 0\,;\,1)$ je zúžením funkcie $y = \lfloor x \rfloor$, $x \in R$ na interval $\langle 0\,;\,1)$. ■

- **Zložená a inverzná funkcia**

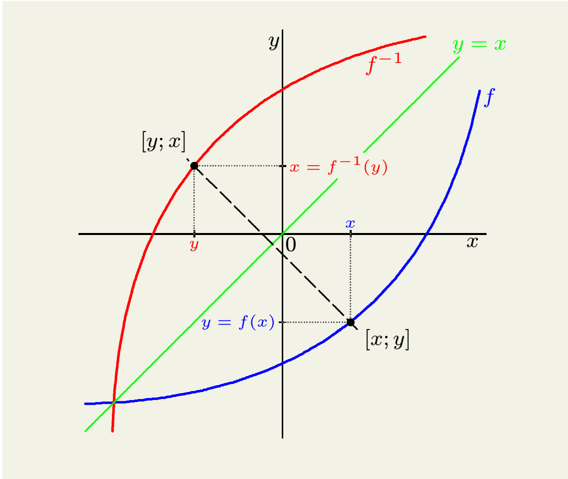
Ďalšia dôležitá operácia je **skladanie funkcií** a s tým súvisiaci pojem **zloženej funkcie** (**zloženého zobrazenia**), ktorý sme už definovali v kapitole 1.

Nech $y = f(x)$, $x \in A$ a $y = g(x)$, $x \in B$ sú funkcie také, že $H(f) \subset B$. Potom funkcia $y = F(x)$, $x \in A$ definovaná pre všetky $x \in A$ vzťahom $F(x) = g[f(x)]$, sa nazýva **zložená funkcia f a g** a označuje sa $g(f)$, resp. $f \circ g$. Funkcia f sa nazýva **vnútorná zložka** (**vnútorná funkcia**) a funkcia g sa nazýva **vonkajšia zložka** (**vonkajšia funkcia**) zloženej funkcie. Skladanie dvoch funkcií je ilustrované na obrázku 3.1.13.

Ak sú funkcie f, g zadané analyticky $u = f(x)$, $y = g(u)$, $H(f) \subset D(g)$, potom vzorec pre zloženú funkciu $g(f)$ dostaneme tak, že vo výraze $y = g(u)$ dosadíme za premennú u výraz $f(x)$. Hovoríme, že **vykonávame substitúciu premennej u výrazom $f(x)$**.



Obr. 3.1.13: Graf zloženej funkcie.



Obr. 3.1.14: Graf inverznej funkcie.

Príklad 3.1.18.
Nech $f\colon\ y = x^2$, $g\colon\ y = \sin x$. Nájdite zložené funkcie $f(g)$ a $g(f)$.

Riešenie.
Keďže $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0\,;\,\infty)$, $D(g) = R$, $H(g) = \langle -1\,;\,1\rangle$, potom

$$f(g)\colon\ y = f[g(x)] = [g(x)]^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x, \quad g(f)\colon\ y = g[f(x)] = \sin f(x) = \sin x^2. \ \blacksquare$$

Poznámka 3.1.15.
V mnohých prípadoch potrebujeme danú funkciu, ktorú považujeme za zloženú, rozložiť na vnútornú a vonkajšiu zložku. Takýto rozklad väčšinou nebýva jednoznačný, preto ho musíme prispôsobiť našim možnostiam a daným požiadavkám.

Príklad 3.1.19.
Funkciu $F\colon\ y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$ môžeme považovať za zloženú funkciu $F = g(f)$, pričom $f\colon\ y = 1 - x^2$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, $g\colon\ y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$. $\blacksquare$

Predpokladajme, že je $y = f(x)$, $x \in D(f)$ injektívna, t.j. pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$. To znamená, že $y = f(x)\colon\ D(f) \to H(f)$ je bijektívna.[4]

Potom k f existuje **inverzná funkcia** $x = f^{-1}(y)$, $y \in H(f)$ taká, že $x = f^{-1}(y)$ práve vtedy, ak $y = f(x)$. Je zrejmé, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$.

Keďže sa usporiadané dvojice $[x; y] \in f$ a $[y; x] \in f^{-1}$ líšia iba poradím prvkov, sú grafy funkcie f a inverznej funkcie f^{-1} osovo súmerné podľa priamky $y = x$ (obrázok 3.1.14).

Poznámka 3.1.16.
Je zrejmé, že uvedené tvrdenia pre zobrazenia z kapitoly 1, platia aj pre reálne funkcie reálnej premennej. To znamená, že platia tvrdenia vety 1.3.5:

Nech je funkcia $f\colon\ D(f) \to H(f)$ je bijektívna, potom platí:

a) $f^{-1}\colon\ H(f) \to D(f)$ je bijektívna,
b) $(f^{-1})^{-1} = f$,
c) $\forall y \in D(f^{-1}) = H(f)\colon\ f[f^{-1}(y)] = y$,
d) $\forall x \in H(f^{-1}) = D(f)\colon\ f^{-1}[f(x)] = x$.

V niektorých prípadoch, keď je funkcia f zadaná jednoduchými vzťahmi, dokážeme inverznú funkciu f^{-1} určiť bez problémov. Napríklad, ak je zadaná nie príliž zložitým analytickým vzorcom $y = f(x)$, vyriešime rovnicu $y = f(x)$ vzhľadom k neznámej x.

Spravidla sa dodržiava dohoda, že argument funkcie f a inverznej funkcie f^{-1} značíme rovnakým symbolom. Preto namiesto $x = f^{-1}(y)$ píšeme $y = f^{-1}(x)$.

Príklad 3.1.20.
Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f\colon\ y = 3x + 2$, $x \in R$.

Riešenie.
Je zrejmé, že funkcia f je prostá. Ak riešime rovnicu $y = 3x + 2$ vzhľadom k x, dostaneme $x = (y-2)/3$. Z toho vyplýva $f^{-1}\colon\ y = (x-2)/3$, $x \in R$. $\blacksquare$

[4] Surjektívnosť je zaručená existenciou vzoru pre každý obraz z množiny $H(f)$.

Poznámka 3.1.17.
Nech $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$ je parametrické vyjadrenie funkcie f. Ak je φ prostá na J, potom existuje inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$ a f môžeme vyjadriť v explicitnom tvare

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),\ x\in\varphi(J).$$

Tento prechod k explicitnému vyjadreniu nazývame **vylúčenie parametra** t.

Veta 3.1.4.
Ak je funkcia f rýdzo monotónna, potom je prostá.

Dôkaz.
Dôkaz je zrejmý a vyplýva priamo z definície. ∎

Poznámka 3.1.18.
Ako dokazuje príklad 3.1.21, funkcia f môže byť prostá a nemusí byť rýdzo monotónna. To znamená, že tvrdenie vety 3.1.4 nemôžeme obrátiť.

Veta 3.1.5.
Ak je funkcia f rastúca [resp. klesajúca], potom f^{-1} je tiež rastúca [resp. klesajúca].

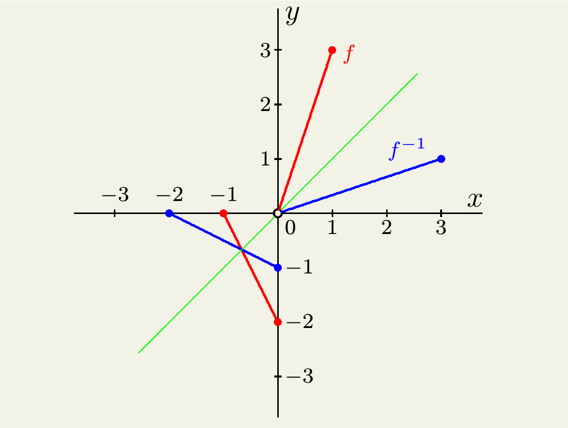
Dôkaz.
Nech $y=f(x)$, $x\in D(f)$ je rastúca (pre klesajúcu funkciu je dôkaz analogický).
Potom pre všetky $x_1, x_2\in D(f)$, $x_1<x_2$ platí $y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2$. Potom (veta 3.1.4) je f prostá, t.j. existuje funkcia $x=f^{-1}(y)$, $y\in D(f^{-1})=H(f)$.
Nech f^{-1} nie je rastúca, t.j. existujú $y_1, y_2\in D(f^{-1})$, $y_2<y_1$ také, že platí

$$x_2=f^{-1}(y_2)\geq f^{-1}(y_1)=x_1.$$

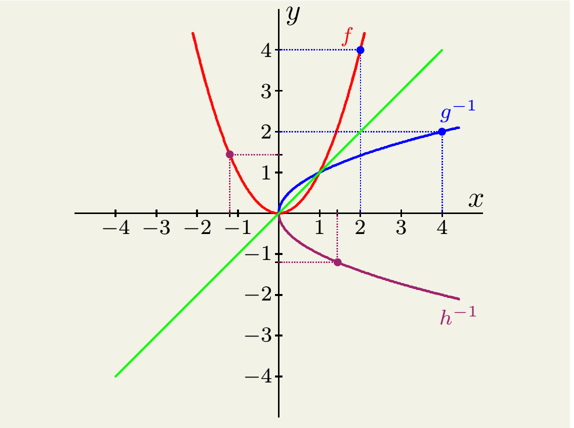
Pretože je f^{-1} prostá, platí $x_2=f^{-1}(y_2)>f^{-1}(y_1)=x_1$.
To znamená, že pre $x_1<x_2$ platí $f(x_1)=y_1>y_2=f(x_2)$, čo je spor.
Z toho vyplýva, že aj funkcia f^{-1} je rastúca (obr. 3.1.14). ∎

Príklad 3.1.21.
Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f\colon\ y=\begin{cases}2x+2, & \text{pre } x\in\langle -1\,;\,0\rangle\,,\\ 3x+3, & \text{pre } x\in(0\,;\,1\rangle\,.\end{cases}$

Riešenie.
Funkcia f je prostá a nie je rýdzo monotónna na $D(f)=\langle -1\,;\,1\rangle$.
Na intervale $\langle -1\,;\,0\rangle$ je klesajúca a na intervale $(0\,;\,1\rangle$ je rastúca (obr. 3.1.15).
Ľahko overíme, že $f^{-1}\colon\ y=\begin{cases}x/2-1, & \text{pre } x\in\langle 0\,;\,2\rangle\,,\\ x/3-1, & \text{pre } x\in(3\,;\,6\rangle\,.\end{cases}$ ∎



Obr. 3.1.15: Graf k príkladu 3.1.21.



Obr. 3.1.16: Graf k príkladu 3.1.22.

Poznámka 3.1.19.
Často sa stáva, že funkcia f je prostá iba na nejakej časti $A\subset D(f)$. V tomto prípade môžeme utvoriť reštrikciu $g=f|_A$, ku ktorej inverzná funkcia g^{-1} existuje. Funkciu g^{-1} potom nazývame **inverznou funkciou k funkcii** f **na množine** A.

Príklad 3.1.22.
Funkcia $f\colon\ y=x^2$, $x\in R$ nie je prostá, ale je prostá na intervaloch $(-\infty\,;\,0\rangle$, $\langle 0\,;\,\infty)$.
Funkcia $g=f|_{(-\infty\,;\,0)}$ má inverznú funkciu $g^{-1}=-\sqrt{x}$, $x\in\langle 0\,;\,\infty)$ a funkcia $h=f|_{\langle 0\,;\,\infty)}$ má inverznú funkciu $h^{-1}=\sqrt{x}$, $x\in\langle 0\,;\,\infty)$ (obr. 3.1.16). ∎

3.1.3 Elementárne funkcie

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam, pretože sa dajú pomocou nich popísať (aspoň približne, aj keď nie vždy) mnohé prírodné a spoločenské zákonitosti a taktiež mnohé veľmi zložité funkcie.

Elementárnou funkciou nazývame každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť z funkcií

$$y = \text{konšt.},\quad y = x,\quad y = \mathrm{e}^x,\quad y = \ln x,\quad y = \sin x,\quad y = \arcsin x,\quad y = \operatorname{arctg} x$$

pomocou sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania funkcií.

- **Racionálna celistvá funkcia**

Polynómom (**racionálnou celistvou funkciou**)[5] nazývame funkciu

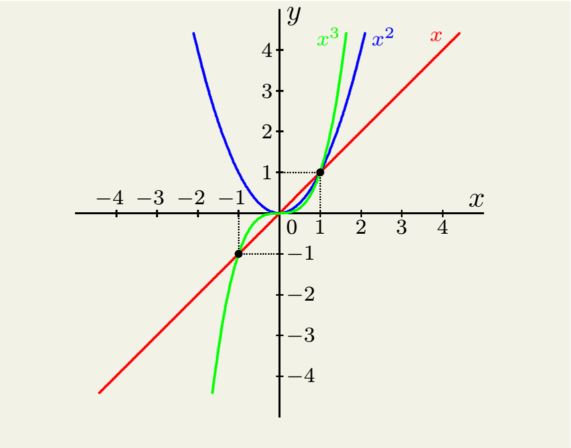
$$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \qquad \text{kde}\ \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R,\ n \in N \cup \{0\}\,.$$

Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame **koeficienty polynómu** f_n. Ak $a_n \neq 0$, potom n nazývame **stupeň polynómu** f_n. Prirodzeným definičným oborom polynómu f_n je množina R.

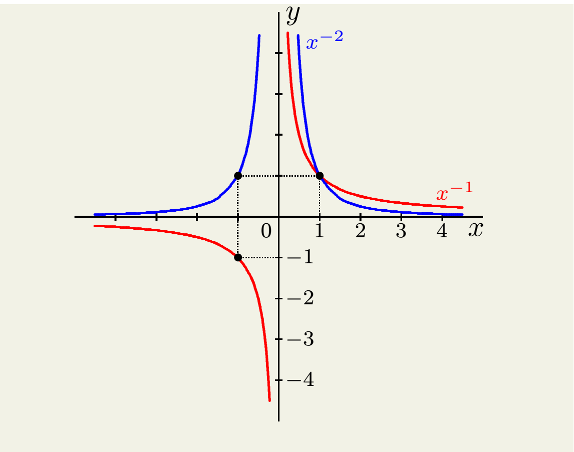
Polynóm druhého stupňa $f_2\colon\ y = a_0+a_1x+a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická funkcia** a polynóm prvého stupňa $f_1\colon\ y = a_0+a_1x$, $a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**. Polynómom nultého stupňa $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ je **konštantná funkcia**.

Polynóm $f\colon\ y = 0$ predstavuje **nulovú funkciu** a jeho stupeň definujeme -1.

Z algebry vieme, že funkcia f_n, $n \in N$ má najviac n reálnych koreňov.[6]



Obr. 3.1.17: $f\colon\ y = x^n$, $n = 1, 2, 3$.



Obr. 3.1.18: $f\colon\ y = x^{-n}$, $n = 1, 2$.

Príklad 3.1.23.
Funkcia $f_n\colon\ y = x^n$, $n \in N$ je definovaná pre všetky $x \in R$.
Jej grafom je tzv. **parabola stupňa** n. Pre $n = 1$ je to priamka a pre $n = 2$ je to parabola. Funkcia f_n má pre všetky $n \in N$ práve jeden nulový bod $x = 0$. ■

Príklad 3.1.24.
Funkcia $f\colon\ y = x^3 - 2x^2$ má nulové body $x_{1,2} = 0$ (dvojnásobný) a $x_3 = 2$.
Jej graf je načrtnutý na obrázku 3.1.19. ■

- **Racionálna lomená funkcia**

Racionálnou lomenou funkciou nazývame funkciu

$$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + b_mx^m},$$

kde f_n, f_m sú polynómy stupňov n a m, pričom $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$, $n, m \in N - \{0\}$. Aby mala f zmysel, musí mať nenulový menovateľ. To znamená, že jej prirodzeným definičným oborom je množina R okrem nulových bodov polynómu f_m.

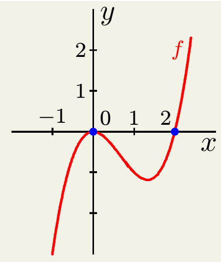
Príklad 3.1.25.
Funkcia $f\colon\ y = x^{-n}$, $n \in N$ je definovaná pre všetky $x \in R - \{0\}$. Jej grafom je tzv. **hyperbola stupňa** $n+1$. Funkcia f nemá nulový bod (obr. 3.1.18). ■

- **Mocninná funkcia s reálnym exponentom**

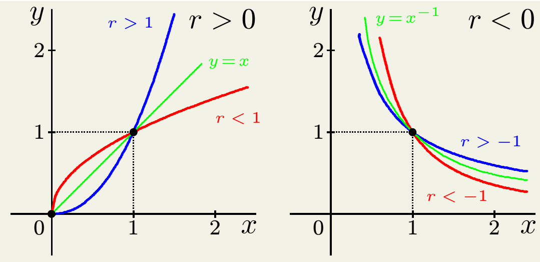
Mocninnou funkciou nazývame funkciu

$$f\colon\ y = x^r, \qquad \text{kde}\ \ r \in R.$$

[5] Viac informácií o polynómoch čitateľ nájde v [33].
[6] V množine komplexných čísel C má práve n koreňov (vrátane násobnosti).



Obr. 3.1.19: $f\colon\ y = x^3 - 2x^2$.



Obr. 3.1.20: $f\colon\ y = x^r$ pre $r > 0$ a $r < 0$.

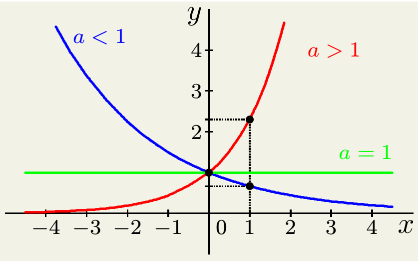
Pre $r \in N$ je polynómom a pre $r \in Z^-$ je racionálnou lomenou funkciou. Pre $r > 0$, $r \notin N$ je jej prirodzeným definičným oborom interval $\langle 0\,;\infty)$ a pre $r < 0$, $r \notin Z^-$ je jej prirodzeným definičným oborom interval $(0\,;\infty)$.

Základné vlastnosti mocninných funkcií vyplývajú z vety 2.1.18. Pre $r > 0$ je funkcia f rastúca a pre $r < 0$ je klesajúca (obr. 3.1.20). Inverznou funkciou k funkcii $f\colon\ y = x^r$, $r \neq 0$ je mocninná funkcia $f^{-1}\colon\ y = x^{1/r}$.

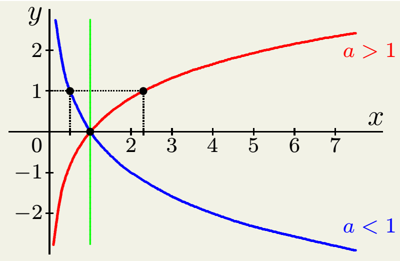
- **Exponenciálna funkcia**

  Exponenciálnou funkciou so základom a, $a > 0$ nazývame funkciu
$$f\colon\ y = a^x.$$
Jej prirodzeným definičným oborom je množina R a oborom hodnôt je interval $(0\,;\infty)$. Najdôležitejšia z nich je funkcia $f\colon\ y = \exp x = \mathrm{e}^x$ so základom e (Eulerovo číslo).

Ak $a = 1$, potom sa f rovná konštantnej funkcii $y = 1$. Exponenciálna funkcia je rýdzo monotónna pre $a \neq 1$. Jej graf nazývame **exponenciálna krivka** alebo **exponenciála** (obr. 3.1.21). Každá exponenciálna krivka prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$. Navyše grafy funkcií $y = a^x$ a $y = a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y.



Obr. 3.1.21: $f\colon\ y = a^x$, $a > 0$.



Obr. 3.1.22: $f\colon\ y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- **Logaritmická funkcia**

  Nech $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$, potom číslo x také, že $y = a^x$, označujeme $x = \log_a y$ a nazývame **logaritmus čísla** y **so základom** a (**pri základe** a).

Funkcia $f\colon\ y = \log_a x$, $x > 0$ sa nazýva **logaritmická funkcia so základom** a. Funkcia f je inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$, $x \in R$. Graf funkcie f sa nazýva **logaritmická krivka** a je osovo súmerný podľa priamky $y = x$ s grafom funkcie $y = a^x$. Je zrejmé, že každá logaritmická krivka prechádza bodom $[1; 0]$ a bodom $[a; 1]$.

Funkcia f je rýdzo monotónna (obr. 3.1.22). Logaritmus so základom 10 nazývame **dekadický** a označujeme $y = \log x$. Logaritmus so základom e nazývame **prirodzený** a označujeme[7] $y = \ln x$.

Poznámka 3.1.20.
Nech $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funkcie $f\colon\ y = \log_a x$, $x > 0$ a $g\colon\ y = a^x$, $x \in R$ sú inverzné, takže pre všetky $x > 0$ platí $x = a^{\log_a x}$ a pre všetky $x \in R$ platí $x = \log_a a^x$.

Uvedieme bez dôkazu základné vlastnosti logaritmov.

Veta 3.1.6.
Nech $a > 0$, $a \neq 1$, potom pre všetky $x, x_1, x_2 \in (0\,;\infty)$, $r \in R$ platí:

a) $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$, b) $\log_a x^r = r \log_a x$,

c) $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \dfrac{x_1}{x_2}$, d) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ pre všetky $b > 0$, $b \neq 1$.

[7]Niekedy (hlavne v anglickej literatúre) sa označenie $y = \log x$ používa pre prirodzený logaritmus.

Poznámka 3.1.21.
Mocninná, exponenciálna a logaritmická funkcia sú elementárne funkcie, pretože platí

$$y = x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}, \qquad y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}, \qquad y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

- **Goniometrické funkcie**

Základné **goniometrické funkcie**[8] sú sínus, kosínus, tangens, kotangens a čitateľovi sú určite známe. Definujú sa pomocou jednotkovej kružnice v rovine R^2.

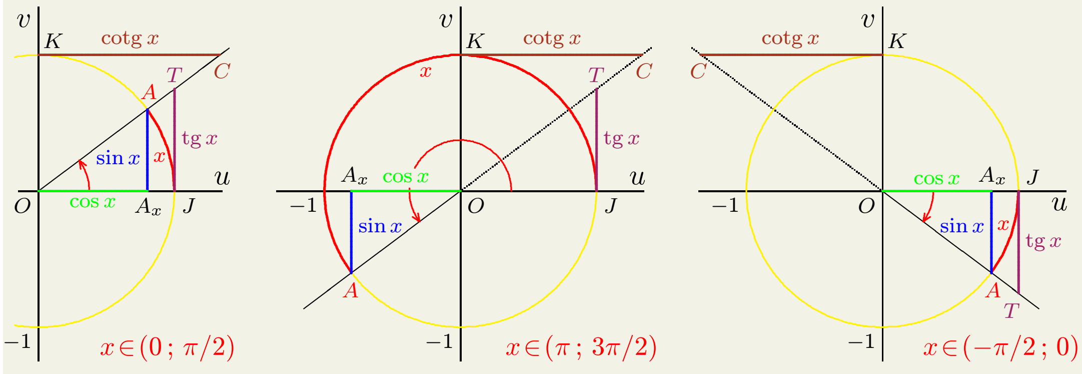
Uvažujme v rovine R^2 súradnicový systém s osami u, v a kružnicu so stredom v bode $O = [0; 0]$ a s polomerom $r = 1$. Označme $J = [1; 0]$. Každému $x \in R$ je priradený práve jeden orientovaný uhol JOA (zvoľme bod $A = [u; v]$, aby ležal na kružnici). Číslo x vyjadruje veľkosť tohto uhla **v oblúkovej miere** v jednotkách **radiány**. Pre $x < 0$ je orientácia tohto uhla súhlasná so smerom otáčania hodinových ručičiek a pre $x > 0$ je jeho orientácia opačná.

Prvú súradnicu bodu A nazývame **kosínus uhla** x a označujeme $\cos x$, druhú súradnicu nazývame **sínus uhla** x a označujeme $\sin x$, t.j. $A = [\cos x; \sin x]$. Tým sú definované funkcie $\cos x$ a $\sin x$ pre všetky $x \in R$. V prípade $\cos x \neq 0$, resp. $\sin x \neq 0$ definujeme **tangens** a **kotangens uhla** x vzťahmi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Poznámka 3.1.22.
Graficky sú hodnoty goniometrických funkcií v bode x znázornené na obr. 3.1.23. Úsečka $OA_x = \cos x$, úsečka $AA_x = \sin x$ a úsečky $OJ = 1$, $OK = 1$. Z podobnosti trojuholníkov OA_xA, OJT a OA_xA, CKO vyplýva

$$\operatorname{tg} x = TJ = \frac{TJ}{OJ} = \frac{AA_x}{OA_x}, \qquad \operatorname{cotg} x = CK = \frac{CK}{OK} = \frac{OA_x}{AA_x}.$$



Obr. 3.1.23: Funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Obvod kružnice s polomerom $r = 1$ je rovný 2π, kde π je tzv. **Ludolfovo číslo**.[9] To znamená, že veľkosť oblúka od bodu J po bod J je 2π, veľkosť oblúka od bodu J po bod $[0; 1]$ je $\pi/2$, od bodu J po bod $[0; -1]$ je $-\pi/2$, resp. $2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$.

Je zrejmé, že ak sa veľkosť oblúku x zväčší o 2π (dĺžku kružnice), hodnoty goniometrických funkcií sa nezmenia.

Poznámka 3.1.23.
Niekedy sa na vyjadrenie veľkosti uhla používajú **deväťdesiatinové stupne**, ktoré značíme °. Jeden stupeň sa delí na 60 **minút** ($1° = 60'$) a jedna minúta sa delí na 60 **sekúnd** ($1' = 60''$). Uhlu 2π zodpovedá 360° a uhlu $\pi/2$ zodpovedá 90°. Uhol $x°$ prevedieme na rádiany pomocou vzorca $\pi x°/180°$.

Funkcia $y = \sin x$ zobrazuje $R \to \langle -1 ; 1 \rangle$, jej graf nazývame **sínusoida**. Je nepárna, periodická s periódou 2π. Jej nulové body sú $k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.24).

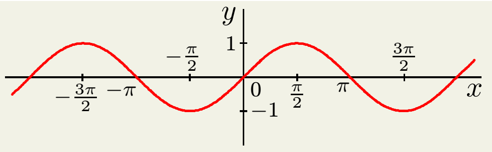
Funkcia $y = \cos x$ zobrazuje $R \to \langle -1 ; 1 \rangle$, jej graf nazývame **kosínusoida**. Je párna, periodická s periódou 2π. Jej nulové body sú $\pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.25).

Funkcia $y = \operatorname{tg} x$ zobrazuje $(R - \{\pi/2 + k\pi ; k \in Z\}) \to R$, jej graf nazývame **tangenta**. Je nepárna, periodická s periódou π a jej nulové body sú $k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.26).

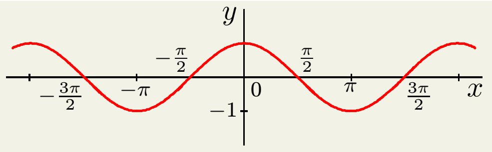
Funkcia $y = \operatorname{cotg} x$ zobrazuje $(R - \{k\pi ; k \in Z\}) \to R$, jej graf nazývame **kotangenta**. Je nepárna, periodická s periódou π a jej nulové body sú $\pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.27).

Hodnoty $\cos x$, $\sin x$ sú odvesnami pravouhlého trojuholníka s preponou 1 (obr. 3.1.23). Potom z Pytagorovej vety pre všetky $x \in R$ platí

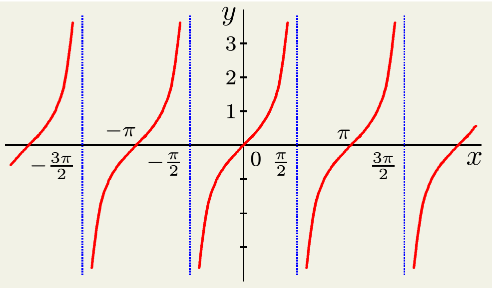
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$



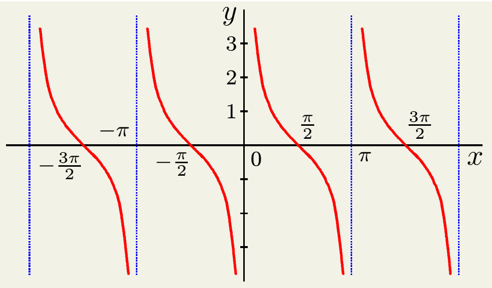
Obr. 3.1.24: $f\colon\ y = \sin x$.



Obr. 3.1.25: $f\colon\ y = \cos x$.



Obr. 3.1.26: $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$.



Obr. 3.1.27: $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$.

V tabuľke 3.1.1 sú uvedené niektoré dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus. Na záver uvedieme bez dôkazov niektoré vzťahy, ktoré platia pre goniometrické funkcie.

Veta 3.1.7 (Súčtové vzorce pre funkcie sínus a kosínus).
Pre všetky $x, y \in R$ platí:

a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

Dôsledok 3.1.7.a (Vzorce pre dvojnásobný a polovičný uhol).
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

c) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, d) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

Veta 3.1.8.
Pre všetky $x, y \in R$ platí:

a) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$, b) $\sin x - \sin y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$,

c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$, d) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$.

Veta 3.1.9 (Súčtové vzorce pre funkcie tangens a kotangens).
Nech $x, y \in R$ a nech sú všetky príslušné výrazy definované, potom platí:

a) $\operatorname{cotg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$, b) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

V tabuľke 3.1.2 sú uvedené prevodové vzťahy medzi jednotlivými goniometrickými funkciami pre $x \in (0\,;\, \pi/2)$. Pre ostatné hodnoty $x \in R$ platia rovnaké vzťahy, ktoré sa však môžu líšiť znamienkom.

- **Cyklometrické funkcie**

Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté na svojom definičnom obore. Keď ich zúžime na vhodné intervaly, potom k nim inverzné funkcie utvoriť môžeme. Tieto funkcie sa nazývajú **cyklometrické funkcie**.

Reštrikcia $y = \sin x$ zobrazujúca $\langle -\pi/2\,;\, \pi/2 \rangle \to \langle -1\,;\, 1 \rangle$ je bijektívna. Inverznú funkciu nazývame **arkussínus** a značíme symbolom $y = \arcsin x$ (obr. 3.1.28). Funkcia arkussínus je rastúca, nepárna a zobrazuje $\langle -1\,;\, 1 \rangle \to \langle -\pi/2\,;\, \pi/2 \rangle$.

Reštrikcia $y = \cos x$ zobrazujúca $x \in \langle 0\,;\, \pi \rangle \to \langle -1\,;\, 1 \rangle$ je bijektívna. Inverznú funkciu nazývame **arkuskosínus** a označujeme symbolom $y = \arccos x$ (obr. 3.1.28). Funkcia arkuskosínus je klesajúca a zobrazuje $\langle -1\,;\, 1 \rangle \to \langle 0\,;\, \pi \rangle$.

Veta 3.1.10.
Pre všetky $x \in \langle -1\,;\, 1 \rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Reštrikcia $y = \operatorname{tg} x$ zobrazujúca $(-\pi/2\,;\, \pi/2) \to R$ je bijektívna. Inverznú funkciu nazývame **arkustangens** a označujeme symbolom $y = \operatorname{arctg} x$ (obr. 3.1.29). Funkcia arkustangens je rastúca, nepárna a zobrazuje $R \to (-\pi/2\,;\, \pi/2)$.

Reštrikcia $y = \operatorname{cotg} x$ zobrazujúca $(0\,;\, \pi) \to R$ je bijektívna. Inverznú funkciu nazývame **arkuskotangens** a označujeme symbolom $y = \operatorname{arccotg} x$ (obr. 3.1.29). Funkcia arkuskotangens je klesajúca a zobrazuje $R \to (0\,;\, \pi)$.

[8] Tiež sa nazývajú **trigonometrické funkcie**.
[9] Číslo π je iracionálne a jeho hodnota je približne $3,141592654$.

$\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2}$	$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$	$\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tab. 3.1.1: Niektoré dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
$\sin x =$	$\sin x$	$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}$
$\cos x =$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x =$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} x}$
$\operatorname{cotg} x =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{cotg} x$

Tab. 3.1.2: Vzťahy medzi jednotlivými goniometrickými funkciami.

Veta 3.1.11.
Pre všetky $x \in R$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

- **Hyperbolické funkcie**

Sínus hyperbolický a **kosínus hyperbolický**, definujeme vzťahmi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2\, e^x}, \ x \in R, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2\, e^x}, \ x \in R.$$

Funkcia $y = \sinh x$ zobrazuje $R \to R$, je nepárna a rastúca. Funkcia $y = \cosh x$ zobrazuje $R \to \langle 1 ; \infty)$, je párna (obr. 3.1.30).
Tangens hyperbolický a **kotangens hyperbolický** definujeme vzťahmi

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ x \in R, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ x \in R - \{0\}.$$

Funkcia $y = \operatorname{tgh} x$ zobrazuje $R \to (-1 ; 1)$, je nepárna a rastúca. Funkcia $y = \operatorname{cotgh} x$ zobrazuje $(R - \{0\}) \to (R - \langle -1 ; 1 \rangle)$, je nepárna (obr. 3.1.30).

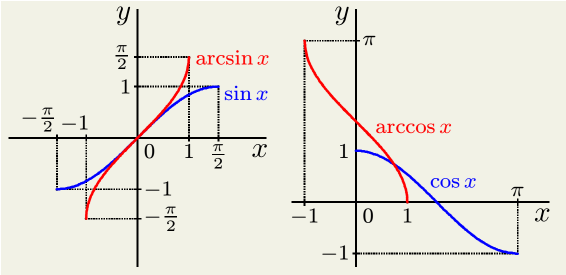
Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti ako pre goniometrické funkcie, preto sú ich názvy podobné. Na záver uvedieme bez dôkazov niektoré vzťahy, ktoré pre ne platia.

Veta 3.1.12.
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sinh x \pm \cosh x = \pm\, e^{\pm x}$, b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

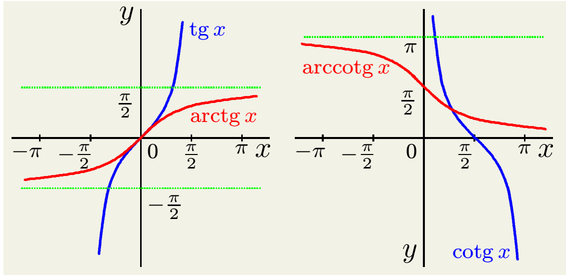
Poznámka 3.1.24.
Rovnosť $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ znamená, že body so súradnicami $[\cosh x ; \sinh x]$ ležia na hyperbole danej rovnicou $y^2 - x^2 = 1$. Odtiaľ pochádza názov hyperbolické funkcie.

Veta 3.1.13 (Súčtové vzorce pre hyperbolický sínus a kosínus).
Pre všetky $x, y \in R$ platí: a) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$,
b) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$.

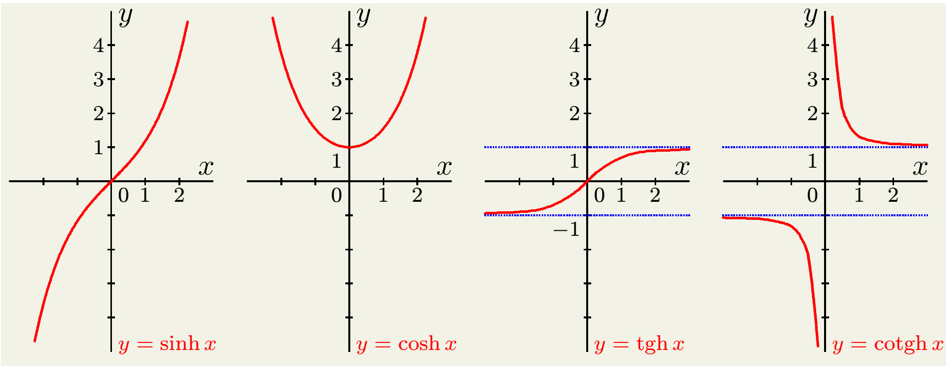
Dôsledok 3.1.13.a (Vzorce pre dvojnásobný a polovičnýargument).
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$, b) $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$,
c) $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$, d) $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.



Obr. 3.1.28: Funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.



Obr. 3.1.29: Funkcie $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arccotg}\, x$.



Obr. 3.1.30: Hyperbolické funkcie $\sinh x$, $\cosh x$, $\mathrm{tgh}\, x$ a $\mathrm{cotgh}\, x$.

Veta 3.1.14.
Pre všetky $x, y \in R$ platí:

a) $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$,

b) $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \dfrac{x+y}{2} \sinh \dfrac{x-y}{2}$,

c) $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$,

d) $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \dfrac{x+y}{2} \sinh \dfrac{x-y}{2}$.

Veta 3.1.15 (Súčtové vzorce pre hyperbolický tangens a kotangens).
Nech $x, y \in R$ a nech v časti b) pri $\mathrm{cotgh}\,(x-y)$ navyše $x \neq y$, potom platí:

a) $\mathrm{tgh}\,(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tgh}\, x \pm \mathrm{tgh}\, y}{1 \pm \mathrm{tgh}\, x\, \mathrm{tgh}\, y}$, b) $\mathrm{cotgh}\,(x \pm y) = \dfrac{1 \pm \mathrm{cotgh}\, x\, \mathrm{cotgh}\, y}{\mathrm{cotgh}\, x \pm \mathrm{cotgh}\, y}$.

Veta 3.1.16 (Moivreov vzorec).
Pre všetky $x \in R$, $n \in N$ platí $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$.

Podobne ako goniometrické funkcie, môžeme aj hyperbolické funkcie vyjadriť navzájom jednu funkciu pomocou druhej (tabuľka3.1.2). Uvedené vzťahy platia pre $x > 0$. Pre ostatné hodnoty x sa môžu líšiť znamienkom.

- **Hyperbolometrické funkcie**

Funkcie $\sinh x$, $\mathrm{tgh}\, x$ a $\mathrm{cotgh}\, x$ sú bijektívne na celom svojom definičnom obore, funkcia $\cosh x$ je bijektívna na intervale $\langle 0 ; \infty)$. Inverzné funkcie k týmto funkciám nazývame **hyperbolometrické funkcie**.

Inverzná funkcia k funkcii $\sinh x$ sa nazýva **argument sínusu hyperbolického** a označuje $\mathrm{argsinh}\, x$. Zobrazuje $R \to R$ a je rastúca (obr. 3.1.31).

Inverzná funkcia k funkcii $\cosh x$ sa nazýva **argument kosínusu hyperbolického** a označuje $\mathrm{argcosh}\, x$. Zobrazuje $\langle 1 ; \infty) \to \langle 0 ; \infty)$ a je rastúca (obr. 3.1.31).

Funkcie $\mathrm{argsinh}\, x$ a $\mathrm{argcosh}\, x$ môžeme vyjadriť v tvare

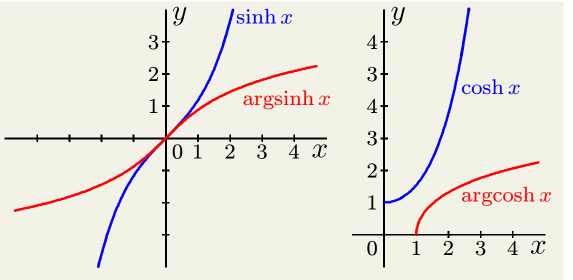
$$\mathrm{argsinh}\, x = \ln \left[x + \sqrt{x^2+1} \right],\ x \in R, \quad \mathrm{argcosh}\, x = \ln \left[x + \sqrt{x^2-1} \right],\ x \in \langle 1 ; \infty).$$

Inverzná funkcia k funkcii $\mathrm{tgh}\, x$ sa nazýva **argument tangensu hyperbolického** a označuje $\mathrm{argtgh}\, x$. Zobrazuje $(-1 ; 1) \to R$, je rastúca (obr. 3.1.32) a má tvar

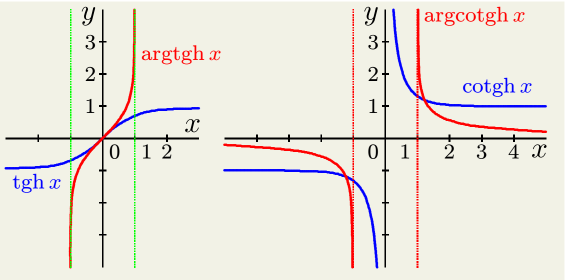
$$\mathrm{argtgh}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\ln (1+x) - \ln (1-x)}{2},\ x \in (-1 ; 1).$$

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{cotgh} x$
$\sinh x =$	$\sinh x$	$\sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\dfrac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$
$\cosh x =$	$\sqrt{\sinh^2 x + 1}$	$\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}}$	$\dfrac{\operatorname{cotgh} x}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$
$\operatorname{tgh} x =$	$\dfrac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$	$\dfrac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{cotgh} x}$
$\operatorname{cotgh} x =$	$\dfrac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$	$\dfrac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tgh} x}$	$\operatorname{cotgh} x$

Tab. 3.1.3: Vzťahy medzi jednotlivými hyperbolickými funkciami.



Obr. 3.1.31: Funkcie $y = \operatorname{argsinh} x$, $y = \operatorname{argcosh} x$.



Obr. 3.1.32: Funkcie $y = \operatorname{argtgh} x$, $y = \operatorname{argcotgh} x$.

Inverzná funkcia k funkcii $\operatorname{cotgh} x$ sa nazýva **argument kotangensu hyperbolického** a označuje $\operatorname{argcotgh} x$. Zobrazuje $(R - \langle -1\,;\,1\rangle) \to (R - \{0\})$, na každom z intervalov $(-\infty\,;\,-1)$, $(1\,;\,\infty)$ je klesajúca (obr. 3.1.32) a má tvar

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{2},\quad x \in R - \langle -1\,;\,1\rangle\,.$$

Ako sme už spomínali, elementárne funkcie popisujú mnohé prírodné a spoločenské zákonitosti. Na záver uvedieme funkciu, ktorá by mohla potešiť nejedno srdiečko.

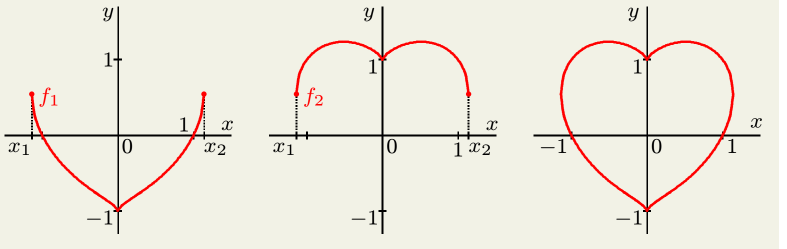
Príklad 3.1.26.
Rovnica $(x^2+y^2-1)^3 = x^2y^3$ určuje dve funkcie (viď obr. 3.1.33)

$$f_1\colon\; y = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{\sqrt[3]{x^4} - 4x^2 + 4}}{2},\qquad f_2\colon\; y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{\sqrt[3]{x^4} - 4x^2 + 4}}{2}.$$

Výraz pod odmocninou $\sqrt[3]{x^4} - 4x^2 + 4$ sa rovná nule práve vtedy, ak platí

$$x_{1,2} = \frac{\pm 1}{8\sqrt{3}}\sqrt{193 + \frac{385}{\sqrt[3]{55873 + 1536\sqrt{1299}}} + \sqrt[3]{55873 + 1536\sqrt{1299}}} \approx \pm 1,139028165.$$

Keďže pre funkcie $f_{1,2}$ platí $f_1(0) = -1$, $f_2(0) = 1$, potom ich definičný obor je interval ohraničený bodmi $x_{1,2}$, t.j. $D(f_{1,2}) = \langle -1,139028165\,;\,1,139028165\rangle$. ■



Obr. 3.1.33: Grafy funkcií $f_{1,2}$ z príkladu 3.1.26.

Cvičenia

3.1.1. Rozhodnite, či sú nasledujúce relácie funkciami:

a) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ x + |y-1| = 0\}$,
b) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ |x-1| + y = 0\}$,
c) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ |x| + |y| = 2, y \geq 0\}$,
d) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ |x-1| + |y| = 0\}$,
e) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ x^2 + y^2 - 2x = 0\}$,
f) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ x^2 + y^2 - 2x = -1\}$,
g) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ x^2 + y^2 - 2x = -2\}$,
h) $f = \{[x; y] \in R^2 ;\ y^2 + 2y + 1 = 0\}$.

3.1.2. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:

a) $y = \arcsin \ln x$,
b) $y = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$,
c) $y = \arcsin x^{-1}$,
d) $y = \sqrt{\sin x^2}$,
e) $y = \sqrt{x \sin^2 \pi x}$,
f) $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$,
g) $y = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$,
h) $y = \sqrt{\cos x^2}$,
i) $y = \dfrac{x+2}{2x^2-1}$,
j) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$,
k) $y = \ln \sin \dfrac{\pi}{x}$,
l) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$,
m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$,
n) $y = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$,
o) $y = \dfrac{2}{2 - \lfloor x \rfloor}$,
p) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$,
q) $y = \sqrt{\sin x + 1}$,
r) $y = \ln \ln \ln x$,
s) $y = \sqrt{\ln \operatorname{tg} x}$,
t) $y = \sqrt{|x| - x}$,
u) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,
v) $y = \dfrac{x^2}{1+x}$,
w) $y = \ln \dfrac{x}{x+1}$,
x) $y = \ln \dfrac{x+2}{x-3}$.

3.1.3. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:

a) $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg} 2x}$,
b) $y = \ln (x^2 - 4)$,
c) $y = \ln (x-2) + \ln (x+2)$,
d) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$,
e) $y = \sqrt{\sin x} \sqrt{\cos x}$,
f) $y = \sqrt{\ln \sin x} + \sqrt{\ln \cos x}$,
g) $y = \arccos (2 \sin x)$,
h) $y = \ln |1 - \sqrt{x}|$,
i) $y = \ln |x^2 - 2x - 6|$,
j) $y = \ln (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,
k) $y = \ln (1 - \operatorname{tg} x)$,
l) $y = \ln (2 \cos x - \sqrt{3})$,
m) $y = \arcsin \sin x$,
n) $y = \arcsin \cos x$,
o) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{2+x}$,
p) $y = \sin \arcsin x$,
q) $y = \sin \arccos x$,
r) $y = \cos \arccos x$,
s) $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$,
t) $y = \sqrt{3x - x^3}$,
u) $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{-x}$.

3.1.4. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:

a) $y = \arcsin \dfrac{x-1}{2}$,
b) $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x}$,
c) $y = \ln \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$,
d) $y = \arcsin \log \dfrac{x}{10}$,
e) $y = \dfrac{x}{\sin (2x-1)}$,
f) $y = \dfrac{\arcsin (x+1)}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$,
g) $y = \arcsin \dfrac{10x}{x^2 + 16}$,
h) $y = \dfrac{\sqrt{2\,\mathrm{e}^x - 1}}{\ln (2 - \mathrm{e}^x)}$,
i) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} - \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$,
j) $y = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$,
k) $y = \arccos \dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{2}$,
l) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \ln x} - 1}$,
m) $y = \sin \ln \dfrac{1}{3x+1}$,
n) $y = \dfrac{\ln (2x-3)}{\sqrt{x^2 - 1}}$,
o) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$,
p) $y = \arcsin \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$,
q) $y = \dfrac{1}{1 - (-1)^{\lfloor x \rfloor}}$,
r) $y = \arcsin \dfrac{x}{x+1}$.

3.1.5. Zostrojte graf funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:

a) $y = \lfloor \sin^2 x \rfloor$,
b) $y = \lfloor \cos^2 x \rfloor$,
c) $y = \sin (x+1)$,
d) $y = |x| - |x-1|$,
e) $y = \arcsin 3x$,
f) $y = \sin 3x$,
g) $y = 3 \sin x$,
h) $y = \max \{x, x^2\}$,
i) $y = \mathrm{e}^{\lfloor x \rfloor}$,
j) $y = \lfloor \mathrm{e}^x \rfloor$,
k) $y = \lfloor \ln x \rfloor$,
l) $y = \arcsin x + 1$,
m) $y = x + \sin x$,
n) $y = x \sin x$,
o) $y = x^2 + \sin x$,
p) $y = \arcsin (x+1)$,
q) $y = x^2 \sin x$,
r) $y = x^3 \sin x$,
s) $y = \lfloor \sin x \rfloor$,
t) $y = |x + |x| + 1|$,
u) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$,
v) $y = \dfrac{4}{x-1}$,
w) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$,
x) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$.

3.1.6. Zostrojte graf parametricky zadanej funkcie $y = f(x)$ a určte jej explictný tvar.

a) $x = 1 - t,\ y = t,\ t \in (-\infty; \infty)$,
b) $x = t,\ y = t^2,\ t \in (-\infty; \infty)$,
c) $x = 1 - t^2,\ y = t^2,\ t \in (-\infty; \infty)$,
d) $x = t^2,\ y = t^3,\ t \in (-\infty; \infty)$,
e) $x = 2 \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; 2\pi)$,
f) $x = 2 \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0; \pi \rangle$,
g) $x = t - t^2,\ y = t^2 - t^3,\ t \in (-\infty; \infty)$,
h) $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t,\ t \in \langle 0; 2\pi)$,
i) $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ t \in R$,
j) $x = \dfrac{t}{1+t^3},\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3},\ t \in R - \{-1\}$.

3.1.7. Zistite, či sa rovnajú funkcie f a g, ak platí:
a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x^2}$, b) $f(x)=1$, $g(x)=\dfrac{x}{x}$, c) $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$.

3.1.8. Ktoré z funkcií $f\colon\ y=\dfrac{1}{x^2+x}$, $g\colon\ y=\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x^2}}$, $h\colon\ y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ sa rovnajú?

3.1.9. Dokážte, že ak sú funkcie f, g párne, resp. nepárne, potom sú funkcie fg, f/g, g/f (pokiaľ sú definované) párne.

3.1.10. Dokážte, že ak je funkcia f párna a g nepárna, potom sú funkcie fg, f/g, g/f (pokiaľ sú definované) nepárne.

3.1.11. Rozhodnite, či je funkcia $y=f(x)$ párna alebo nepárna.
a) $y=x^2+\sin x^2$, b) $y=\cos(\pi-x)$, c) $y=x\cosh x$, d) $y=\sin x+\cos x$,
e) $y=x\ln|x|$, f) $y=x-x^3$, g) $y=x-x^2$, h) $y=\chi(x)-\chi^2(x)$,
i) $y=|x|\,x^{-1}$, j) $y=x^2+|x|$, k) $y=x+\sin x$, l) $y=|x|+\cos x$,
m) $y=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$, n) $y=\dfrac{\sinh x}{\sin x}$, o) $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$, p) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$,
q) $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$, r) $y=x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$, s) $y=\dfrac{x}{2^x-1}$, t) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$,
u) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, v) $y=\dfrac{1}{2+\cos^3 x}$, w) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, x) $y=\dfrac{x+\operatorname{tgh} x}{3+2\cos x}$.

3.1.12. Nech $y=f(x)$ je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale $(-k\,;\,k)$, kde $k\in R$, $k>0$. Dokážte, že funkcia $f(x)+f(-x)$ je párna a funkcia $f(x)-f(-x)$ je nepárna na intervale $(-k\,;\,k)$.

3.1.13. Rozložte funkciu $y=f(x)$ na súčet párnej a nepárnej funkcie.
a) $y=x+1$, b) $y=x+|x|$, c) $y=x^2+|x|$, d) $y=x^2+x$,
e) $y=\chi(x)$, f) $y=\mathrm{e}^x$, g) $y=(x+1)^{-1}$, h) $y=x^2-2x+1$,
i) $y=x-\lfloor x\rfloor$, j) $y=x+\lfloor x\rfloor$, k) $y=(-1)^{\lfloor x-1\rfloor}$, l) $y=\lfloor x\rfloor+|x|$.

3.1.14. Doplňte definíciu funkcie $y=f(x)$ tak, aby bola párna, resp. nepárna.
a) $y=x-1$, $x>0$, b) $y=|x-1|$, $x>0$, c) $y=\sqrt{x+1}$, $x>0$,
d) $y=(x+1)^{-1}$, $x>0$, e) $y=x+\lfloor x\rfloor$, $x>0$, f) $y=x^2-x$, $x>0$.

3.1.15. Je funkcia $y=f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu:
a) $y=|\sin x|$, b) $y=\sin x^2$, c) $y=\sin^2 x$, d) $y=(-1)^{\lfloor x-1\rfloor}$,
e) $y=x-\lfloor x\rfloor$, f) $y=\lfloor\chi(x)\rfloor$, g) $y=\chi(\lfloor x\rfloor)$, h) $y=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.

3.1.16. Je funkcia $y=f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu:
a) $y=\sin x+\cos x$, b) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$, c) $y=\operatorname{sgn}(x-\lfloor x\rfloor)$,
d) $y=\sin x+\cos 2x$, e) $y=\arcsin\sin x$, f) $y=\cos x-3\sin 4x$,
g) $y=\ln|\sin x+\cos x|$, h) $y=2^{3+\sin 2x}$, i) $y=x\arccos x$,
j) $y=\dfrac{1+(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}$, k) $y=\dfrac{3^{\lfloor x\rfloor}+(-3)^{\lfloor x\rfloor}}{3^{\lfloor x\rfloor}}$, l) $y=\dfrac{1+(-2)^{\lfloor x\rfloor}}{3^{\lfloor x\rfloor}}$.

3.1.17. Zostrojte funkciu $y=f(x)$ s primitívnou periódou $p=1$, ak platí:
a) $y=x^2$, $x\in(0\,;\,1\rangle$, b) $y=x^2$, $x\in(1\,;\,2\rangle$, c) $y=\sqrt{x}$, $x\in(3\,;\,4\rangle$.

3.1.18. Zostrojte periodickú funkciu $y=f(x)$, $D(f)\subset R$ s primitívnou periódou p a načrtnite jej graf tak, aby funkcia $f(x)$ bola:
a) Párna, rastúca na intervale $\langle 3\,;\,4\rangle$, $p=4$ a $f(1)=0$.
b) Párna, rastúca na intervale $\langle 1\,;\,2\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 6\,;\,8\rangle$.
c) Nepárna, rastúca na intervale $\langle 1\,;\,4)$ a klesajúca na intervale $\langle 7\,;\,9\rangle$.
d) Nepárna, $p=6$, $f(x)=9-x$ pre $x\in\langle 7\,;\,9\rangle$ a interval $\langle 0\,;\,1\rangle\notin D(f)$.
e) Nepárna, $p=6$, $f(x)=9-x$ pre $x\in\langle 7\,;\,9\rangle$ a interval $(0\,;\,1)\notin D(f)$.
f) Párna, $p=8$, $f(x)=3-x$ pre $x\in\langle 0\,;\,3)$ a interval $(3\,;\,4\rangle\notin D(f)$.

3.1.19. Nech sú funkcie f, g periodické s primitívnou periódou $p\neq 0$. Dokážte, že funkcie $f\pm g$, fg, f/g, g/f (pokiaľ sú definované) sú periodické.

3.1.20. Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $y = f(x)$ monotónna:

a) $y = \lfloor x^{-1} \rfloor$, b) $y = (x^2 - x)^3$, c) $y = 2^{x^2-3x+2}$, d) $y = 2^{|x-2|+|x+1|}$,
e) $y = x^2 - 3x + 2$, f) $y = x^4 - 3x^2 + 2$, g) $y = x - |x|$, h) $y = \ln^2 x - \ln x$,
i) $y = 2 - 3x$, j) $y = x^3 - x$, k) $y = \sqrt{2 - 3x}$, l) $y = |x+3| - |x|$,
m) $y = x - \lfloor x \rfloor$, n) $y = |x+1|$, o) $y = x + |x|$, p) $y = x + \sqrt{x-1}$,
q) $y = \dfrac{x}{x-3}$, r) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$, s) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, t) $y = \ln \dfrac{x^2+3x}{x+2}$.

3.1.21. Zistite, či je funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ ohraničená zhora alebo zdola a určte jej suprémum a infimum, prípadne maximum a minimum, ak existuje.

a) $y = (1+x^2)^{-1}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$, b) $y = (1+x^2)^{-1}$, $x \in R$,
c) $y = (1+x^2)^{-1}$, $x \in (-1\,;\,1\rangle$, d) $y = 1 - 3x$, $x \in \langle 0\,;\,5)$,
e) $y = x^2 - 4x + 5$, $x \in R$, f) $y = x^2 - 4x + 5$, $x \in \langle 3\,;\,6)$.

3.1.22. Nájdite maximum a minimum funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:

a) $y = x^2 - 3x + 1$, b) $y = x^3 - 3x + 1$, c) $y = x^2 + |x|$, d) $y = x^2 - |x|$,
e) $y = \sin^2 x$, f) $y = \sin x^2$, g) $y = 2 + \sin x$, h) $y = \sin(x+1)$.

3.1.23. Nech $f\colon\ y = x$, $g\colon\ y = 1 - x^2$, $h\colon\ y = \sin x$. Určte funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(h)$, $h(f)$, $g(h)$, $h(g)$, $f[g(h)]$, $f[h(g)]$, $g[f(h)]$, $g[h(f)]$, $h[f(g)]$, $h[g(f)]$.

3.1.24. Nájdite funkcie $f \pm g$, fg, f/g, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, ak:

a) $f(x) = 2x$, $g(x) = 4 - x$, b) $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$,
c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$, d) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sinh x$,
e) $f(x) = \operatorname{argsinh} x$, $g(x) = \cosh x$, f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,
g) $f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$,
i) $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$, $g(x) = x^2 - x$, j) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = (x+2)^{-1}$.

3.1.25. Nájdite funkcie $|g|$, $f + g$, g^2, fg, f/g, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ a ich definičné obory, ak $f(x) = x$ pre $x < 0$ a $f(x) = x^2$ pre $x \geq 0$ a platí:

a) $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x + 1, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

3.1.26. Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$, $\ldots$, $f_n = f(f(f \cdots f(f)))$, ak funkcia $f_1 = f$ je definovaná predpisom:

a) $f(x) = 1 + x$, b) $f(x) = 1 - x$, c) $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$, d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$,
e) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, f) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, g) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, h) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,
i) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, j) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, k) $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$, l) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

3.1.27. Nech je daná funkcia $y = f(x)$. Nájdite všetky $x \in R$ tak, aby platilo:

a) $y = \dfrac{1+x}{1-x} \leq 1$, b) $y = \dfrac{1+x^2}{(1-x)^2} \geq 2$, c) $y = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} < 1$.

3.1.28. Nech $f\colon\ y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1\,;\,1)$. Dokážte, že $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$.

3.1.29. Nech sú funkcie f, g elementárne a nech pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) > 0$. Dokážte, že funkcia f^g je elementárna. [Návod: $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$.]

3.1.30. Nájdite inverznú funkciu k funkcii $y = f(x)$ zadanej predpisom:

a) $y = x^2 - 1$, $x \in \langle 2\,;\,5\rangle$, b) $y = x/(x+3)$, $x \in R - \{3\}$,
c) $y = x^2 - 8x + 16$, $x \in \langle 4\,;\,5\rangle$, d) $y = \sin(3x - 1)$, $|3x - 1| < \pi/2$,
e) $y = \ln \sqrt{x-1}$, $x \in (1\,;\,\infty)$, f) $y = \ln(\sqrt{x} - 1)$, $x \in (1\,;\,\infty)$.

3.1.31. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ tak, aby bola prostá. Potom k nej určte inverznú funkciu $y = f^{-1}(x)$.

a) $y = 1 + 2\operatorname{tg} x$, b) $y = \arcsin \sin x$, c) $y = \sqrt{1 + \sin x}$, d) $y = \arccos \mathrm{e}^x$,
e) $y = \ln \cos x$, f) $y = \mathrm{e}^{1-x^2} - 1$, g) $y = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$, h) $y = \mathrm{e}^{x-1} - 1$,
i) $y = |x|(-1)^{\lfloor x \rfloor}$, j) $y = x^2 - 2x - 1$, k) $y = x^4 - 1$, l) $y = \sqrt{|x+1|}$,
m) $y = \dfrac{x-1}{2-3x}$, n) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, o) $y = \sqrt{\arcsin \dfrac{x}{3}}$, p) $y = \dfrac{1 - 2^x}{1 + 2^x}$.

3.1.32. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ tak, aby bola prostá. Potom k nej určte inverznú funkciu $y = f^{-1}(x)$.

a) $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$, b) $y = 1 + \sqrt{1 + e^{2x}}$, c) $y = 1 + \arccos(2x - 1)$,

d) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ 2x, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ e) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ f) $y = \begin{cases} x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

3.1.33. Dokážte vzťahy pre goniometrické funkcie z tabuľky 3.1.2.

3.1.34. Dokážte vzťahy pre hyperbolické funkcie z tabuľky 3.1.3.

3.2 Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti, t.j. jej chovanie v okoliach daných bodov. Zaujímajú nás napríklad hodnoty funkcie v okolí bodu, v ktorom nie je definovaná.

Príklad 3.2.1.
Uvažujme funkciu $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, $x \in R - \{2\}$. Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Je zrejmé, že ak sa argument x bude blížiť k číslu 2, potom sa funkčná hodnota $f(x)$ bude blížiť k číslu $2 + 2 = 4$. To znamená, že ak bude nejaká postupnosť argumentov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to 2$, potom bude príslušná postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to 4$. ■

Všimnime si, že funkcia f nemusí byť definovaná v bode, v okolí ktorého ju skúmame. V každom prípade je tento bod hromadným bodom $D(f)$. Ak to zhrnieme, zaujíma nás ako sa správa hodnota závislej premennej $f(x)$ v prípade, že $x \to a$.

Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f a nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ je ľubovoľná postupnosť, taká že $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre všetky $n \in N$. Potom skúmame hodnotu $b \in R^*$ (pokiaľ existuje), pre ktorú platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to b$.

Hovoríme, že **funkcia $y = f(x)$ má v bode $a \in R^*$ limitu rovnú $b \in R^*$** (**limita funkcie f v bode a sa rovná bodu b**)[10] a označujeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ak:

a) Bod a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

b) Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to b$
(t.j. pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ také, že $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$).

Ak $a \in R$, potom hovoríme **o limite vo vlastnom bode a**. Ak $a = \pm\infty$, potom hovoríme **o limite v nevlastnom bode a**. Ak $b \in R$, potom hovoríme o **vlastnej limite** a ak $b = \pm\infty$, hovoríme **o nevlastnej limite**.

Poznámka 3.2.1.
Pretože a je hromadný bod množiny $D(f)$, potom existuje (veta 2.3.5) aspoň jedna postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že pre všetky $n \in N$ platí $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.
Z definície vyplýva, že pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Z definície jednoznačnosti limity postupnosti vyplýva jednoznačnosť limity funkcie f v danom bode a.

Príklad 3.2.2.
Vypočítajte $\lim\limits_{x \to 0} \chi(x)$, kde $\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \notin Q$.

Riešenie.
Je zrejmé, že bod 0 je hromadným bodom množiny $D(\chi) = R$.
Uvažujme postupnosti $\{1/n\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, $\{\sqrt{2}/n\}_{n=1}^{\infty} \to 0$. Pre všetky $n \in N$ platí

$$\frac{1}{n} \in D(\chi),\ \frac{1}{n} \neq 0,\ \chi\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \qquad \frac{\sqrt{2}}{n} \in D(\chi),\ \frac{\sqrt{2}}{n} \neq 0,\ \chi\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0.$$

Potom $\lim\limits_{x \to 0} \chi(x)$ neexistuje, pretože

$$\lim_{n \to \infty} \chi\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \chi\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0. \ ■$$

[10] Táto definícia sa nazýva **definícia limity funkcie v zmysle Heineho**, resp. **Heineho definícia limity funkcie v bode a**.

Príklad 3.2.3.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to a} c$, kde $c\in R$, $a\in R^*$.

Riešenie.
Označme $f\colon\ y=c$. Je zrejmé, že $a\in R^*$ je hromadným bodom $D(f)=R$.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R-\{a\}$ je ľubovoľná postupnosť taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} c=c,\qquad \text{t.j.}\quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c.\ \blacksquare$$

Príklad 3.2.4.
Nech $f\colon\ y=x^2$. Vypočítajte $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} x^2$, kde $a\in R^*$.

Riešenie.
Každý bod $x=a\in R^*$ je hromadným bodom množiny $D(f)=R$.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R-\{a\}$ je ľubovoľná postupnosť taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n^2=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\lim_{n\to\infty} x_n=a\cdot a=\begin{cases} a^2, & \text{pre } a\in R,\\ \infty, & \text{pre } a=\pm\infty.\end{cases}$$

Z toho vyplýva, že pre $a\in R$ platí $\lim\limits_{x\to a} x^2=a^2$ a pre $a=\pm\infty$ platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=\infty$. $\blacksquare$

Príklad 3.2.5.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

Riešenie.
Označme $f\colon\ y=\cos x^{-1}$. Je zrejmé, že bod 0 je hromadný bod množiny $D(f)=R-\{0\}$.
Uvažujme postupnosti $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(2n\pi)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}\to 0$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(\pi+2n\pi)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}\to 0$. Pre všetky $n\in N$ platí $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$ a tiež pre všetky $n\in N$ platí

$$f(\alpha_n)=f\left((2n\pi)^{-1}\right)=\cos(2n\pi)=1,\quad f(\beta_n)=f\left((\pi+2n\pi)^{-1}\right)=\cos(\pi+2n\pi)=-1$$

Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n)=1\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n)=-1$, t.j. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{-1}$ neexistuje. $\blacksquare$

3.2.1 Základné vlastnosti

Z definície je zrejmé, že limita funkcie je lokálna záležitosť v nejakom okolí bodu $a\in R^*$ na jednej strane a v nejakom okolí bodu $b\in R^*$ na strane druhej. Ak $O(a)$, $O(b)$ sú ľubovoľné okolia, potom na základe vety 2.3.2 existujú indexy $n_a, n_b\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_a$ platí $x_n\in O(a)-\{a\}$ a pre všetky $n\in N$, $n\geq n_b$ platí $f(x_n)\in O(b)$.

Preto je prirodzené charakterizovať limitu funkcie v bode a pomocou prstencových okolí $P(a)$ a okolí $O(b)$.[11] Tento vzťah vyjadruje nasledujúca veta.

Veta 3.2.1.
Funkcia f má v bode $a\in R^*$ limitu rovnú $b\in R^*$ práve vtedy, ak:

a) Bod a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
b) Pre každé okolie $O(b)$ existuje okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x\in P(a)\cap D(f)$ platí $f(x)\in O(b)$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech $O(b)$ je ľubovoľné okolie bodu b.
Potom pre každé $P(a)$ existuje $x\in P(a)\cap D(f)$, pre ktoré platí $f(x)\notin O(b)$.
Nech $a\in R$. Pre každé $n\in N$ označme $P_n(a)$ prstencové okolie s polomerom $1/n$. V každom z týchto okolí existuje $x_n\in P_n(a)\cap D(f)$ tak, že $f(x_n)\notin O(b)$. Je zrejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ a z definície limity vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$.
Lenže z konštrukcie postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že ak $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existuje, potom určite nepatrí do $O(b)$, t.j. sa nerovná bodu b. To je spor.
Pre $a=\pm\infty$ je dôkaz analogický.
$PP_{\Leftarrow}$: Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)-\{a\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ a nech $O(b)$ je ľubovoľné okolie bodu b.
Potom existuje okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x\in P(a)\cap D(f)$ platí $f(x)\in O(b)$. Z definície limity postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že existuje index $n_0\in N$ taký, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $x_n\in P(a)\cap D(f)$.
Z toho vyplýva, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $f(x_n)\in O(b)$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$. $\blacksquare$

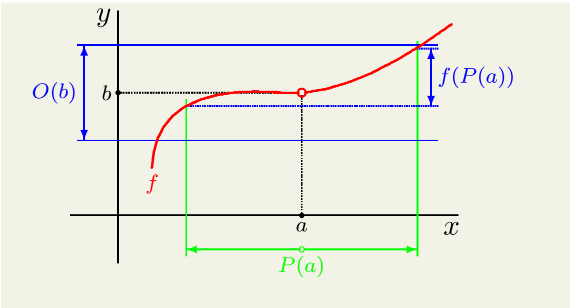
[11] V literatúre sa limita funkcie v danom bode často definuje pomocou okolí a definícia pomocou postupností sa uvádza ako ekvivalentná definícia.

Poznámka 3.2.2.
Ak označíme ε, δ polomery okolí $O(a)$, $O(b)$, môžeme tvrdenie b) symbolicky zapísať:

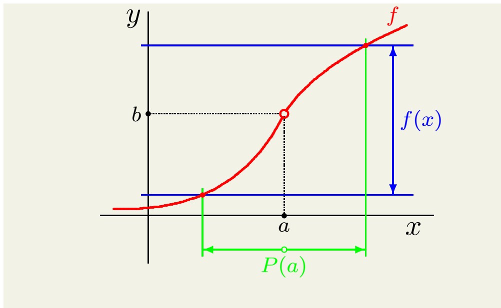
$$\begin{array}{rcccccc}
\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ a,b\in R & \Leftrightarrow & \underbrace{\forall O_\varepsilon(b)}_{\forall\varepsilon>0} & \underbrace{\exists O_\delta(a)}_{\exists\delta>0}\ \forall x\in D(f): & \underbrace{x\in O_\delta(a), x\neq a}_{0<|x-a|<\delta} & \Rightarrow & \underbrace{f(x)\in O_\varepsilon(b)}_{|f(x)-b|<\varepsilon}, \\
\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b,\ b\in R & \Leftrightarrow & \forall\varepsilon>0 & \exists\delta\in R & \delta<x & & |f(x)-b|<\varepsilon, \\
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b,\ b\in R & \Leftrightarrow & \forall\varepsilon>0 & \exists\delta\in R & x<\delta & & |f(x)-b|<\varepsilon, \\
\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,\ a\in R & \Leftrightarrow & \forall\varepsilon\in R & \exists\delta>0 & 0<|x-a|<\delta & & \delta<f(x), \\
\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty,\ a\in R & \Leftrightarrow & \forall\varepsilon\in R & \exists\delta>0 & 0<|x-a|<\delta & & f(x)<\delta.
\end{array}$$

Veta 3.2.2.
Ak má funkcia f v bode $a\in R^*$ konečnú limitu, potom existuje prstencové okolie $P(a)$, v ktorom je ohraničená (obr. 3.2.35).

Dôkaz.
Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\in R$ a nech $O(b)$ je ľubovoľné okolie. Potom (veta 3.2.1) existuje $P(a)$ také, že pre všetky $x\in P(a)\cap D(f)$ platí $f(x)\in O(b)$, t.j. v ktorom je f ohraničená. ∎



Obr. 3.2.34: Veta 3.2.1.



Obr. 3.2.35: Veta 3.2.2.

Nasledujúce vety reprezentujú základné vlastnosti limít funkcií. Tieto tvrdenia vyplývajú z definície a z analogických vlastností limít postupností. Uvádzame ich bez dôkazov.

Veta 3.2.3.
Nech $a\in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$. Nech $P(a)$ je prstencové okolie také, že $P(a)\cap D(f)=P(a)\cap D(g)$ a nech pre všetky $x\in P(a)$ platí $f(x)=g(x)$.
Potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje práve vtedy, ak existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Príklad 3.2.6.
Dokážte, že $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}=5$.

Riešenie.
Tvrdenie vyplýva z predchádzajúcej vety, pretože pre všetky $x\in R-\{1\}$ platí

$$\frac{2x^2+x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}=2x+3,\qquad \lim_{x\to 1}(2x+3)=5.$$

Pri praktickom výpočte sa veta 3.2.3 neuvádza:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2x+3)=5. \blacksquare$$

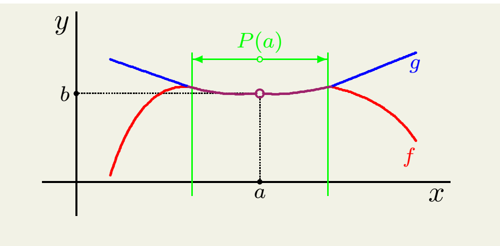
Poznámka 3.2.3.
A ako dokazuje nasledujúci príklad, podmienka $P(a)\cap D(f)=P(a)\cap D(g)$ v predpokladoch vety 3.2.3 je dôležitá a nemôžeme ju vynechať.

Príklad 3.2.7.
Uvažujme funkciu $y=f(x)=1$, $x\in Q$ a Dirichletovu funkciu $y=\chi(x)$, $x\in R$.
Bod 0 je hromadným bodom množín $D(f)=Q$, $D(\chi)=R$. Pre každé prstencové okolie $P(0)$ a pre všetky $x\in P(0)\cap D(f)$ platí $f(x)=\chi(x)=1$.
Lenže limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje. ∎

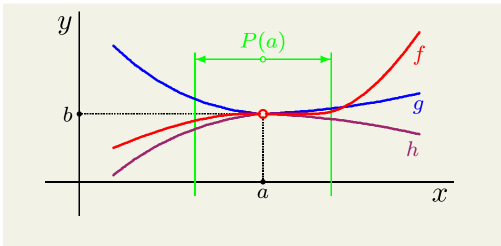
Veta 3.2.4.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$. Nech $P(a)$ je prstencové okolie také, že $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap D(g)$ a nech pre všetky $x \in P(a)$ platí $f(x) \leq g(x)$.
Potom (pokiaľ existujú) platí $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Dôsledok 3.2.4.a (Veta o zovretí).
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, $D(g)$, $D(h)$. Nech $P(a)$ je prstencové okolie také, že $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap D(g) = P(a) \cap D(h)$ a pre všetky $x \in P(a)$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
Ak $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$, $b \in R^*$, potom existuje $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Dôsledok 3.2.4.b.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, $D(g)$. Nech je f ohraničená v nejakom prstencovom okolí $P(a)$ a nech $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, potom $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.



Obr. 3.2.36: Veta 3.2.3.



Obr. 3.2.37: Dôsledok 3.2.4.a.

Príklad 3.2.8.
Dokážte, že $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Riešenie.
Označme $f\colon\ y = \sin x/x$, potom ∞ je hromadný bod množiny $D(f) = R - \{0\}$.
Keďže pre všetky $x \in R$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, potom pre všetky $x > 0$ platí

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \text{t.j.}\ \ 0 = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Iné riešenie.
Funkcia $y = \sin x/x$ sa dá zapísať ako súčin funkcií $f\colon\ y = \sin x$, $g\colon\ y = x^{-1}$.
Funkcia f je ohraničená a $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x^{-1} = 0$. Z toho vyplýva $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. ■

Poznámka 3.2.4.
Ak vo vete 3.2.4 nahradíme predpoklad $f(x) \leq g(x)$ predpokladom $f(x) < g(x)$, tvrdenie vety $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$ sa nezmení (príklad 3.2.9).

Príklad 3.2.9.
Uvažujme funkcie $f\colon\ y = 0$, $x \in R$ a $g\colon\ y = x^{-1}$, $x \in R - \{0\}$.
Bod ∞ je hromadným bodom množín $D(f)$, $D(g)$ a pre všetky $x > 0$ platí

$$0 = f(x) < g(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{ale} \quad \lim_{x\to\infty} 0 = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \ ■$$

Veta 3.2.5.
Ak $a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, potom: $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Dôsledok 3.2.5.a.
Ak $a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, $b \in R$, potom: $\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0$.

Príklad 3.2.10.
Dokážte, že $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Riešenie.
Bod 0 je hromadný bod definičného oboru funkcie $y = \sin x/x$, $x \in R - \{0\}$.

Pre všetky $x\in(0\,;\,\pi/2)$ platí

$$0<\sin x<x<\operatorname{tg}x,\qquad \text{t.j.}\ \ 1=\frac{\sin x}{\sin x}<\frac{x}{\sin x}<\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}$$

a pre všetky $x\in(-\pi/2\,;\,0)$ platí

$$\operatorname{tg}x<x<\sin x<0,\qquad \text{t.j.}\ \ 1=\frac{\sin x}{\sin x}<\frac{x}{\sin x}<\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Z uvedených vzťahov pre všetky $x\in(-\pi/2\,;\,\pi/2)$, $x\neq 0$ vyplýva

$$0<\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\qquad \text{t.j.}\ \ 1=\lim_{x\to 0}\cos x\leq\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\leq 1,\qquad \text{t.j.}\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\ \blacksquare$$

Veta 3.2.6.
Nech $a\in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$ a nech existuje prstencové okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x\in P(a)\cap D(f)$ platí $f(x)>0$, [resp. $f(x)<0$]. Potom platí

$$\lim_{x\to a}f(x)=0\iff\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty,\qquad\left[\text{resp. }\lim_{x\to a}f(x)=0\iff\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty\right].$$

Príklad 3.2.11.
Označme $f\colon\ y=x,\ x\in R$. Bod 0 je hromadný bod $D(f)$ a platí $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

Postupnosti $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{-n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú k bodu 0 a platí pre ne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty,\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty.$$

Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ neexistuje. $\blacksquare$

Veta 3.2.7.
Nech $a\in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)\cap D(g)$ a nech $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Potom existuje $P(a)$ také, že pre všetky $x\in P(a)\cap D(f)\cap D(g)$ platí $f(x)<g(x)$.

Dôsledok 3.2.7.a.
Nech $a\in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$ a nech $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$, [resp. $\lim\limits_{x\to a}f(x)<0$].

Potom existuje $P(a)$ také, že pre všetky $x\in P(a)\cap D(f)$ platí $f(x)>0$ [resp. $f(x)<0$].

Veta 3.2.8 (O limite zloženej funkcie).
Nech pre funkcie f, g platí $H(f)\subset D(g)$ a nech pre body $a,b,c\in R^*$ platí

$$\lim_{x\to a}f(x)=b,\qquad\lim_{u\to b}g(u)=c,\qquad g(b)=c.$$

Potom pre zloženú funkciu $F=g(f)$ platí

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{u\to b}g(u)=g\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)=c.$$

Dôkaz.
Z predpokladov je zrejmé, že bod a je tiež hromadným bodom množiny $D(F)$.
Z existencie $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ a existencie $\lim\limits_{u\to b}g(u)$ vyplýva:

Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)-\{a\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, platí $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=b$.
Pre všetky $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(g)-\{b\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=b$, platí $\lim\limits_{n\to\infty}g(u_n)=c$.

Potom pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)-\{a\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, platí

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b,\qquad\text{t.j.}\ \ \lim_{n\to\infty}F(x_n)=\lim_{n\to\infty}g(f(x_n))=\lim_{n\to\infty}g(b)=c.\ \blacksquare$$

Poznámka 3.2.5.
Ak pri výpočte limity zloženej funkcie $F=g(f)$ v bode a položíme $u=f(x)$, potom hovoríme, že **vykonávame substitúciu** $u=f(x)$.
Ak pri výpočte $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ položíme $x=h+a$, potom platí $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(h+a)$.

Príklad 3.2.12.
a) $\lim\limits_{x\to1}\ln\dfrac{x^2-1}{x-1}=\ln\left[\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to1}(x+1)\right]=\ln 2.$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}=\left[\begin{array}{c}x-2=z\\ z\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1.$ ■

Príklad 3.2.13.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Riešenie.
Zo vzorca $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}b+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ vyplýva

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-1}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left[\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right]}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left[\sqrt[6]{x}+1\right]}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+1}=\frac{3}{2}.$$

Ak použijeme substitúciu $z=\sqrt[6]{x}$, t.j. $x=z^6$, potom je riešenie prehľadnejšie

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{z\to1}\frac{\sqrt{z^6}-1}{\sqrt[3]{z^6}-1}=\lim_{z\to1}\frac{z^3-1}{z^2-1}=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+1)}=\lim_{z\to1}\frac{z^2+z+1}{z+1}=\frac{3}{2}.\ ■$$

Veta 3.2.9.
Nech $a\in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)\cap D(g)$, nech $r\in R$ a nech existujú limity

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\in R^*,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=c\in R^*.$$

Ak majú príslušné výrazy v R^* zmysel, potom existujú nasledujúce limity a platí:

a) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a}f(x)\right|=|b|$,

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=b\pm c$,

c) $\lim\limits_{x\to a}\left[r\,f(x)\right]=r\lim\limits_{x\to a}f(x)=rb$,

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\;g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)=bc$,

e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{1}{c}$,

f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{b}{c}$.

Poznámka 3.2.6.
Ak niektorý z daných výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že limita neexistuje. V tomto prípade ju musíme vypočítať iným spôsobom, napr. vhodnou úpravou výrazu.

Príklad 3.2.14.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$.

Riešenie.
Vetu 3.2.9 nemôžeme použiť priamo, pretože $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$. Ale platí

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty+\infty}=\frac{1}{\infty}=0.\ ■$$

Príklad 3.2.15.
Nech $a\in R$, $a\geq0$. Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}a^x$.

Riešenie.
Ak $a>1$, potom $a^x\longmapsto\infty$. Ak $a=1$, potom $a^x=1$. Ak $a\in\langle0\,;1)$, potom $a^x\longmapsto0$.

Ak to zhrnieme, potom $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}0, & \text{pre } a\in\langle0\,;1)\,,\\ 1, & \text{pre } a=1,\\ \infty, & \text{pre } a\in(1\,;\infty)\,.\end{cases}$ ■

3.2.2 Limita vzhľadom na množinu a jednostranné limity

Limitu funkcie f v bode $a \in R^*$ (v hromadnom bode definičného oboru funkcie f) sme definovali v nejakom prstencovom okolí $P(a)$, resp. na množine $P(a) \cap D(f)$. Ako ukazuje nasledujúci príklad, môže sa stať, že limita funkcie f v danom bode a neexistuje, ale existuje v bode a limita zúženia funkcie f na nejakú konkrétnu podmnožinu $A \subset D(f)$. Preto má zmysel definovať limitu vzhľadom na množinu.

Príklad 3.2.16.
a) Uvažujme Dirichletovu funkciu χ a jej zúženie $f = \chi|_Q\colon\ y = 1,\ x \in Q$.
Je zrejmé, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, aj keď $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$ neexistuje (príklad 3.2.2).

b) Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, kde $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,0)\,, \\ 2, & \text{pre } x \in \langle 0\,;\,\infty)\,, \end{cases}$ neexistuje (obr. 3.2.38).

Ale ak označíme $g = f|_{(-\infty\,;\,0)}$, $h = f|_{\langle 0\,;\,\infty)}$, potom $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 2$. ■

Hovoríme, že **funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu rovnú $b \in R^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$**, ak má v bode a limitu rovnú b jej zúženie $f|_A$.
Označujeme ju $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x),\ x \in A$, t.j. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f|_A(x) = b$.

Priamo z predchádzajúcej definície a z definície limity funkcie v danom bode vyplýva nasledujúce tvrdenie.

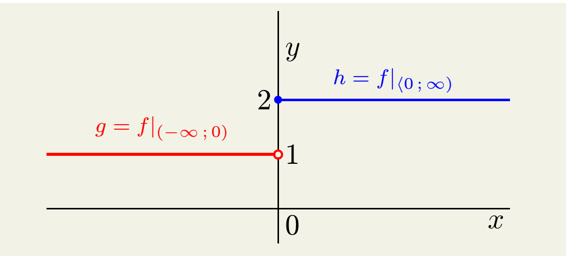
Veta 3.2.10.
Limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ práve vtedy, ak pre každú množinu $A \subset D(f)$ platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$.

Príklad 3.2.17.
Aj keď $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje, existujú napríklad limity

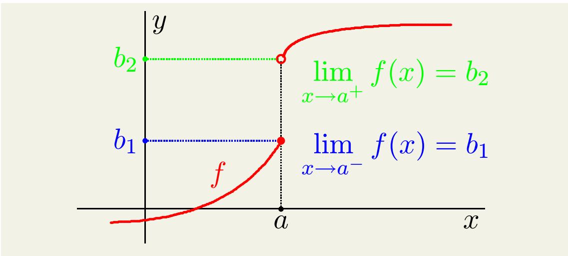
$$\lim_{x\to\infty} \sin x = 0,\ x \in \{k\pi\,;\,k \in Z\}\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \sin x = 1,\ x \in \{\pi/2 + 2k\pi\,;\,k \in Z\}\,. \ ■$$

Limitu funkcie f v bode $a \in R^*$ vzhľadom na množinu $D(f) \cap (-\infty\,;\,a)$ [resp. na množinu $D(f) \cap (a\,;\,\infty)$] nazývame **limita zľava** [resp. **sprava**] **funkcie f v bode a** a označujeme $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ [resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$].

Limitu zľava a limitu sprava funkcie f v bode a súhrnne nazývame **jednostranné limity funkcie f v bode a**. V tomto zmysle limitu funkcie f v bode a nazývame **obojstranná limita funkcie f v bode a**.



Obr. 3.2.38: Funkcia z príkladu 3.2.16.



Obr. 3.2.39: Jednostranné limity.

Poznámka 3.2.7.
Na obrázku 3.2.39 je znázornený graf funkcie f, ktorá nemá limitu v bode a, ale má jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b_2$, pričom $b_1 \neq b_2$.

Priamo z definície obojstrannej a jednostranných limít vyplýva nasledujúca veta.

Veta 3.2.11.
Nech $a \in R$ je hromadným bodom $D(f)$. Potom limita funkcie f v bode a existuje práve vtedy, ak existujú jednostranné limity funkcie f v bode a a rovnajú sa. T.j. platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Príklad 3.2.18.
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ neexistuje, ale existujú jednostranné limity $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ (obr. 3.1.26, 3.1.29). ■

Príklad 3.2.19.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$, kde $a\in R$.

Riešenie.
Pre jednostranné limity platí:
Pre $x>0$ platí $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \begin{bmatrix} z=1/x \\ z\to\infty \end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{z}\right)^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$.
Pre $x<$ platí

$$\lim_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \begin{bmatrix} z=1/x \\ z\to-\infty \end{bmatrix} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{-z}\right)^{-z} = \lim_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{a}{z}\right)^z\right]^{-1} = (\mathrm{e}^{-a})^{-1} = \mathrm{e}^a\,.$$

Potom (veta 3.2.11) platí $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$. ∎

Príklad 3.2.20.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln \mathrm{e}^1 = 1.$ ∎

3.2.3 Asymptotické vlastnosti

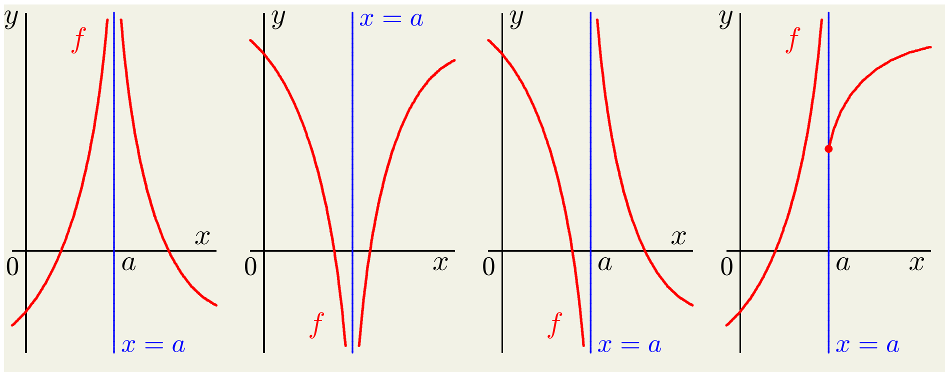
Nech $a\in R^*$ a nech f, g sú definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Potom hovoríme, že **funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a** (**funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú**) a označujeme $f\sim g$, $x\to a$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Príklad 3.2.21.
Asymptoticky sa rovnajú napríklad funkcie

$$x^2\sim x,\ x\to 1,\quad \sin x\sim x,\ x\to 0,\quad \sin x\sim 1,\ x\to\pi/2,\quad \ln(x+1)\sim x,\ x\to 0.\ \blacksquare$$

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti v nevlastných bodoch, t.j. pre $x\to\pm\infty$. Ak je $D(f)$ neohraničená množina, potom je potrebné preskúmať taktiež jej chovanie v okolí bodov $a\in R$, v ktorých je aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ nevlastná.

Nech je funkcia f definovaná v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Ak má funkcia f v bode a aspoň jednu z jednostranných limít nevlastnú, potom priamku $x=a$ nazývame **asymptota bez smernice** (**vertikálna**, resp. **zvislá**) **grafu funkcie f** (obr. 3.2.40).



Obr. 3.2.40: Príklady asymptoty bez smernice.

Nech je funkcia f definovaná na neohraničenej množine. Priamka určená rovnicou $y=kx+q$ sa nazýva **asymptota so smernicou k grafu funkcie f**, ak platí

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+q)] = 0, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+q)] = 0.$$

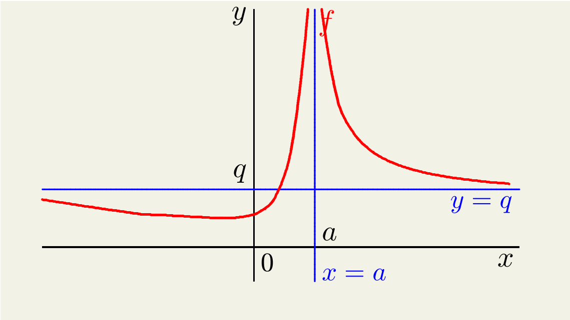
Asymptota s nulovou smernicou (t.j. $y=q$), sa nazýva **horizontálna** (**vodorovná**) **asymptota** (obr. 3.2.41).

Veta 3.2.12.
Priamka určená rovnicou $y=kx+q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie $y=f(x)$ práve vtedy, ak existujú reálne limity

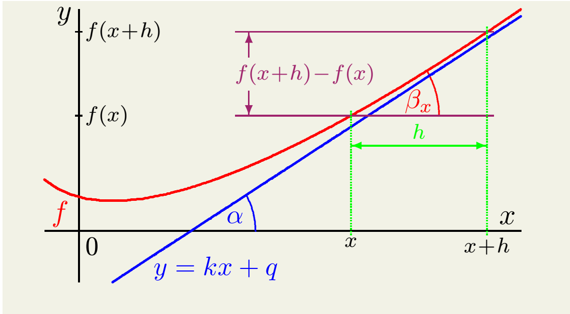
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx] = q, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = q.$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre prípad $x\to\infty$. Pre $x\to-\infty$ je dôkaz analogický.
$NP_{\Rightarrow}$: Nech $y=kx+q$ je asymptota grafu funkcie f, potom platí

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+q)] = 0, \qquad \text{t.j.} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(kx+q)}{x} = 0.$$



Obr. 3.2.41: Asymptoty $y = q$, $x = a$.



Obr. 3.2.42: Asymptota so smernicou.

Pretože existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{kx+q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(k + \dfrac{q}{x}\right) = k + 0 = k$, platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{kx+q}{x} = k \quad \text{a tiež} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

$PP_{\Leftarrow}$: Keďže $k, q \in R$, potom platí

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] - \lim_{x\to\infty} q = q - q = 0. \blacksquare$$

Poznámka 3.2.8.
Na obrázku 3.2.42 je načrtnutý graf funkcie f s asymptotou $y = kx + q$. Smernica priamky predstavuje tangens uhla α, ktorý zviera s osou x, t.j. $k = \operatorname{tg} \alpha$.
Nech $h \in R$ je pevne dané číslo. Pre jednoduchosť predpokladajme, že $h > 0$. Hodnota β_x predstavuje uhol, ktorý zviera priamka určená bodmi $[x; f(x)]$ a $[x + h; f(x+h)]$ s osou x. Potom pre uhol β_x platí

$$\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Je zrejmé, že pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t.j. $\operatorname{tg} \beta_x \to \operatorname{tg} \alpha$. Ak uvážime vetu 3.2.12, potom

$$\alpha = \lim_{x\to\infty} \beta_x, \qquad \text{t.j.} \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Príklad 3.2.22.
Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{8x}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R$, $x \neq 0$. V bode $x_0 = 0$ pre jednostranné limity platí

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2 + x + 1}{8x} = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + x + 1}{8x} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = 0 + \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

Z toho vyplýva, že asymptotou bez smernice je priamka $x = 0$.
Pre koeficienty asymptoty $y = kx + q$ so smernicou na základe vety 3.2.12 platí

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{8x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4},$$

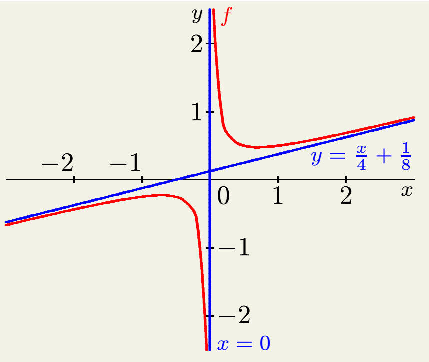
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2 + x + 1}{8x} - \frac{x}{4}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{8x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}.$$

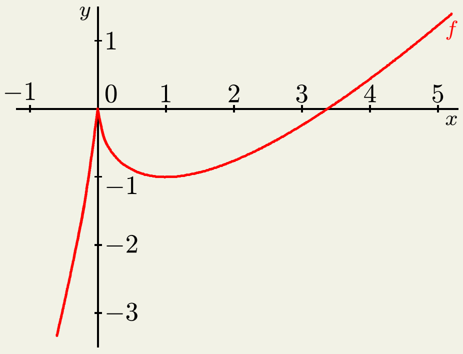
Z toho vyplýva, že rovnica asymptoty so smernicou je $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{8}$ (obr. 3.2.43). $\blacksquare$

Príklad 3.2.23.
Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$, takže asymptoty bez smernice nemá.



Obr. 3.2.43: Graf funkcie s dvoma asymptotami (príklad 3.2.22).



Obr. 3.2.44: Graf funkcie bez asymptôt (príklad 3.2.23).

Pre $x<0$ platí $\sqrt[3]{x^2}=(-x)^{2/3}$ a pre $x>0$ platí $\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$. Funkcia f môže mať dve asymptoty $y=kx+q$ so smernicou. Pre ich smernice $k_{1,2}$ platí

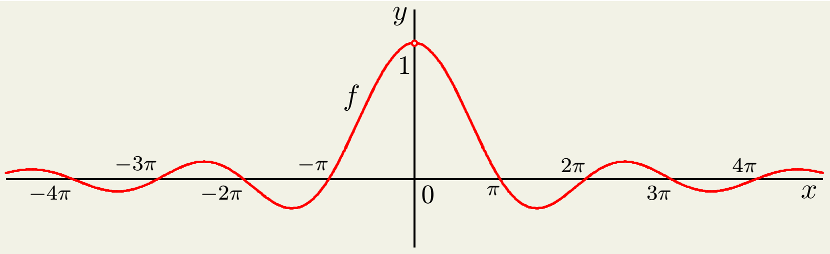
$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3(-x)^{2/3}}{-(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\left[2+\frac{3}{(-x)^{1/3}}\right]=2+0=2,$$

$$k_2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[2-\frac{3}{x^{1/3}}\right]=2-0=2.$$

Asymptota so smernicou taktiež neexistuje (obr. 3.2.44), pretože v oboch prípadoch platí

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-k_{1,2}\,x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2x-3\sqrt[3]{x^2}-2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-3\sqrt[3]{x^2}\right]=-\infty.\ \blacksquare$$

Poznámka 3.2.9.
V zhode s definíciou, je priamka $y=kx+q$ asymptotou so smernicou grafu funkcie f aj v prípade, keď graf funkcie f okolo priamky osciluje. Príkladom je funkcia $f\colon\ y=\sin x/x$, $x\in R-\{0\}$. Jej graf osciluje pre $x\to\pm\infty$ okolo priamky $y=0$ (obr. 3.2.45).



Obr. 3.2.45: Funkcia $f\colon\ y=\sin x/x$ a jej asymptota so smernicou $y=0$.

3.2.4 Riešené príklady

V tejto časti sú uvedené riešené príklady. A ako ukazujú niektoré z nich, v mnohých prípadoch sa riešenie zjednoduší, ak použijeme vhodnú substitúciu. Na úvod uvedieme bez výpočtu niektoré dôležité limity, na ktoré sa budeme v budúcnosti odvolávať.

Veta 3.2.13.
Nech $a,b\in R$, $a>0$, $q\in R$, potom platí:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}a^{1/x}=1$,
b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$,
c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$,
d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}=1$,
e) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)=1$,
f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(a^{1/x}-1\right)=\ln a$,
g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,
h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,
i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^x=\mathrm{e}^b$,
j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^q}{a^x}=0$ pre $a\in(1\,;\,\infty)$,
k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^q}{a^x}=\infty$ pre $a\in(0\,;\,1\rangle$,

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^q} = 0$ pre $a\in(0\,;\,1)$, m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^q} = \infty$ pre $a\in(1\,;\,\infty)$,

Príklad 3.2.24.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}} \cdot \dfrac{x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2}{x^2+4} = \dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{1-x}{x^2} + \dfrac{1-2x}{2-3x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right] + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1-2x)x^{-1}}{(2-3x)x^{-1}} = 0 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1}-2}{2x^{-1}-3} = \dfrac{2}{3}.$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{2}.$ ∎

Príklad 3.2.25.

Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$, $m\in R$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Riešenie.

a) Ak $m=0$, potom platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$

Ak $m\neq 0$, potom zo substitúcie $1+mx = z^3$, t.j. $x = \dfrac{z^3-1}{m}$, $z\to 1$ vyplýva

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x} = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{(z^3-1)m^{-1}} = \lim_{z\to 1} \frac{m(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to 1} \frac{m}{z^2+z+1} = \frac{m}{3}.$$

b) Ak požijeme substitúciu $x = z^{12}$, potom $z\to 1$ a platí

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{z\to 1} \frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1} = \lim_{z\to 1} \frac{z^4-1}{z^3-1} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{4}{3}. \ ∎$$

Príklad 3.2.26.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{-1}\sqrt{x^2-x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right] = 2.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x} = 1.$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{5x^2}{x^2-1} + 2^{\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{1-x^{-2}} + \lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} = \dfrac{5}{1} + 2^0 = 6.$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{1-x^3} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1. \ ∎$$

Príklad 3.2.27.

Nech $a>0$. Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{-x}-1}{x}$.

Riešenie.

a) Ak použijeme substitúciu $a^x - 1 = z$, potom $z\to 0$ a platí

$$\ln a^x = x\ln a = \ln(z+1), \quad \text{t.j.} \quad x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a}.$$

Potom (príklad 3.2.20) platí $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\ln a}{\ln(z+1)}=1\cdot\ln a=\ln a$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{-x}-1}{x}=\begin{bmatrix} x=-z \\ z\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{a^z-1}{-z}=-\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{a^z-1}{z}=-\ln a.$ ■

Poznámka 3.2.10.
Ak v príklade 3.2.27 položíme $a=\mathrm{e}$, potom platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\ln\mathrm{e}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}=-\ln\mathrm{e}=-1.$$

Príklad 3.2.28.
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\begin{bmatrix} 5x=z \\ z\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{5\sin z}{z}=5.$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x}=\begin{bmatrix} \arcsin(x-2)=z \\ x-2=\sin z,\ z\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\sin z}\cdot\dfrac{1}{2+\sin z}\right)=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\begin{bmatrix} x=-z \\ z\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\sin z}\cos z\right)=1\cdot 1=1.$ ■

Príklad 3.2.29.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$.

Riešenie.
a) Použijeme substitúciu $\sin^2 x=z$, potom $z\to 0$. Pre $x\to 0$ je (v dostatočne malom okolí) funkcia $\cos x$ kladná, takže platí

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=(1-z)^{\frac{1}{2}},\qquad \operatorname{cotg}^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-z}{z}.$$

Potom $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}=\lim\limits_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}}=\lim\limits_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}}=\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$

b) Použijeme substitúciu $\cos^2 2x=z$, potom $z\to 0$. Pre $x\to\pi/4$ je (v dostatočne malom okolí) funkcia $\sin 2x$ kladná, takže platí

$$\sin 2x=\sqrt{1-\cos^2 2x}=(1-z)^{\frac{1}{2}},\qquad \operatorname{tg}^2 2x=\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}=\frac{1-z}{z}.$$

Potom platí $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}=\lim\limits_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$ ■

Príklad 3.2.30.
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x\cos^{-1}x}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{2\cos^2 x}=\dfrac{1}{2(-1)^2}=\dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}=2.$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}+1)\sin 4x}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}+1)\sin 4x}{x+1-1}=$

$=4\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 2\cdot 1=8.$ ■

Príklad 3.2.31.
Nech $a\in R$. Vypočítajte a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{a/\ln x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{a/\ln x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln x}$.

Riešenie.
a) Z inverznosti funkcií e^x, $\ln x$ a zo vzťahu $x\to 0^+$, t.j. $x>0$ vyplýva

$$\lim_{x\to 0^+}x^{a/\ln x}=\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln\left[x^{\frac{a}{\ln x}}\right]}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a.$$

b) Analogicky ako v časti a) platí $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{a}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\ln x}=\mathrm{e}^a.$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{(-\infty)\cdot(-\infty)}=\mathrm{e}^{\infty}=\infty$ ■

V príklade 3.2.31 sme počítali limity výrazov, ktoré mali tvar 0^0. Vo všeobecnosti nevieme určiť, čomu sa rovná výraz 0^0 a nazývame ho neurčitý výraz. S neurčitými výrazmi sa stretávame pomerne bežne a na ich určenie sa často používajú limity. Medzi **neurčité výrazy** patria výrazy typu

$$\infty-\infty,\quad \pm\infty\cdot 0,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{1}{0},\quad \frac{\pm\infty}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0^0,\quad 0^{\pm\infty},\quad 1^{\pm\infty},\quad (\pm\infty)^0.$$

Príklad 3.2.32.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+2)-\ln x] = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left[1+\frac{2}{x}\right]^x = \ln e^2 = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix} tx=z \\ z\to 0\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{t\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{t}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} = \begin{bmatrix} 3x+1=z \\ z\to\infty\end{bmatrix} = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}} =$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = \left[e^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.33.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{\ln 3^x}}{x} = \begin{bmatrix} x\ln 3=z \\ z\to 0\end{bmatrix} = \ln 3\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-e^z}{z} = -\ln 3.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{3^x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x}{x} = 0-\infty = -\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{3^x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x} = 0-\frac{0}{-\infty} = 0.\ \blacksquare$

Príklad 3.2.34.

Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$.

Riešenie.

Pre všetky $x>0$ platí $x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\ln x/x}$.

a) Ak označíme $z=\ln x$, $z\to\infty$, potom pre $a=e>1$ platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^z} = 0, \quad \text{t.j.}\quad \lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{1/x}} = e^0 = 1.$$

b) Pre všetky $x\in(0\,;1)$ platí $\ln x<0$, t.j. $\frac{\ln x}{x}<0$. Keďže $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, potom platí

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty, \quad \text{t.j.}\quad \lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{1/x}} = e^{-\infty} = 0.\ \blacksquare$$

Príklad 3.2.35.

Nech $x\in R$. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n-\text{krát}}$.

Riešenie.

Ak označíme $a_0=x$, $a_n=\sin a_{n-1}$ pre $n\in N$, potom máme vypočítať $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Z vlastností funkcie sínus vyplýva, že platí

$$0<\sin x<x,\quad \text{pre}\quad x\in(0\,;\pi/2), \qquad x<\sin x<0,\quad \text{pre}\quad x\in(-\pi/2\,;0).$$

Je zrejmé, že pre všetky $n\in N$ platí $a_n=\sin a_{n-1}\in\langle -1\,;1\rangle$.

Ak $x=k\pi$, $k\in Z$, potom $a_1=0$ a pre všetky $n\in N$ platí $a_n=0$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ak $x\neq k\pi$, $k\in Z$ a $0<a_1\leq 1$, potom pre všetky $n\in N$ platí

$$0<a_n\leq 1<\pi/2, \qquad 0<a_n=\sin a_{n-1}<a_{n-1}<1.$$

Takže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, ohraničená zdola a konverguje.

Ak $x\neq k\pi$, $k\in Z$ a $-1\leq a_1<0$, potom pre všetky $n\in N$ platí

$$-\pi/2<-1\leq a_n<0, \qquad -1<a_{n-1}<a_n=\sin a_{n-1}<0.$$

To znamená, že je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca, ohraničená zhora a konverguje.

Ak označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, potom

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sin a_n = \sin\left[\lim_{n\to\infty}\sin a_n\right] = \sin a.$$

Keďže má rovnica $a=\sin a$ práve jedno riešenie $a=0$, platí $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n = 0.\ \blacksquare$

Príklad 3.2.36.
Nech $m, n \in N$. Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, a) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

Riešenie.
a) Z príkladu 3.2.10 vyplýva $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\sin mx}{mx} \cdot \dfrac{nx}{\sin nx} \cdot \dfrac{mx}{nx}\right] = 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{m}{n} = \dfrac{m}{n}$.

b) Keďže pre všetky $n \in N$ platí $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, potom zo súčtového vzorca pre funkciu sínus, substitúcie $x = \pi + z$, $z \to 0$ a časti a) vyplýva

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(m\pi + mz)}{\sin(n\pi + nz)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin m\pi \cos mz + \cos m\pi \sin mz}{\sin n\pi \cos nz + \cos n\pi \sin nz} =$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{0 + (-1)^m \sin mz}{0 + (-1)^n \sin nz} = (-1)^{m-n} \lim_{z\to 0} \frac{\sin mz}{\sin nz} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.37.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$, $n \in N$.

Riešenie.
a) Musíme si uvedomiť, že funkcia $y = x\sqrt{\cos x^{-1}}$ je definovaná, iba pre $\cos x^{-1}$ nezáporné, t.j. pre $x^{-1} \in \langle -\pi/2 + 2k\pi\,;\, \pi/2 + 2k\pi\rangle$, kde $k \in Z$. Potom platí

$$0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1, \quad \text{t.j.} \quad 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1.$$

Takže je funkcia $\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$ ohraničená a podľa dôsledku 3.2.4.b platí $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}} = 0$.

b) Ak použijeme substitúciu $x = u^{-1}$ pre $x \to 0^-$ a $x = v^{-1}$ pre $x \to 0^+$, potom platí

$$\lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \lim_{u\to -\infty} \frac{\lfloor u\rfloor}{u}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \lim_{v\to \infty} \frac{\lfloor v\rfloor}{v}.$$

Ak použijeme substitúciu $x = u^{-1}$ pre $x \to 0^-$ a $x = v^{-1}$ pre $x \to 0^+$, potom platí

$$\lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \lim_{u\to -\infty} \frac{\lfloor u\rfloor}{u}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \lim_{v\to \infty} \frac{\lfloor v\rfloor}{v}.$$

Nech u, v sú také, že $u < 0$, $v > 1$. Potom pre jednostranné limity platí

$$u - 1 \leq \lfloor u\rfloor \leq u < 0, \qquad 0 < v - 1 \leq \lfloor v\rfloor \leq v$$
$$1 = \frac{u}{u} \leq \frac{\lfloor u\rfloor}{u} \leq \frac{u-1}{u} = 1 - \frac{1}{u}, \qquad 0 < 1 - \frac{1}{v} = \frac{v-1}{v} \leq \frac{\lfloor v\rfloor}{v} \leq \frac{v}{v} = 1,$$
$$1 \leq \lim_{u\to -\infty} \frac{\lfloor u\rfloor}{u} \leq \lim_{u\to -\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right) = 1, \qquad 1 = \lim_{v\to\infty} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \leq \lim_{v\to\infty} \frac{\lfloor v\rfloor}{v} \leq 1.$$

To znamená, že $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor = \lim\limits_{x\to 0^+} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor = \lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor = 1$.

c) Z príkladu 3.2.14 vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = 0$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) = 1.$$

Pre všetky $n \in N$ platí $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^{n+1}$. Potom zo súčtového vzorca vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n + \pi n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) \cos\pi n + \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) \sin\pi n\right] =$$
$$= 0 \cdot (-1)^{n+1} + 1 \cdot 0 = 0. \ \blacksquare$$

Cvičenia

3.2.1. Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$. Vypočítajte limity:
a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$, d) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$,

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$, j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2/3}-1}{x^{3/5}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$, l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, p) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}$,

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{b^x-1}$, r) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$, s) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos^2 x}{x}$, t) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$,

u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$, v) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$, w) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$, x) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$.

3.2.2. Nech $a, b\in R$, $m, n\in N$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^n}{1-x^m}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{4x}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^{3x}-1}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{6^x-1}$,

i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$, j) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{n}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^x$, p) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$,

q) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1}$, r) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}$, s) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}$, t) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$.

3.2.3. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{\sin x}}$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{tgh} x$, p) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tgh} x$,

q) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$, r) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$, s) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x-2}$, t) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 5x}$,

u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{3x}$, v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$, w) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$, x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$.

3.2.4. Nech $a\in R$, $n\in N$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$,

g) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$,

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, k) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$, n) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+a}-x\right)$, q) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin 2\pi n$, r) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin 2\pi x$,

s) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x\sin 2\pi x$, t) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}\sin 2\pi x$, u) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{-x}\sin 2\pi x$.

3.2.5. Nech $n\in N$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$, e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x+4}{x^3-1}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$, i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$, k) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$,

m) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, q) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{2+x}}$, r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,

s) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, t) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, u) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

v) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$, w) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$, x) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

3.2.6. Nech $a\in R$, $m,n\in R$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}$, b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$, f) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{5x}$, i) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, l) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, o) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\cos x}{1-2\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, q) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$, r) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^4-1}\right)$,

s) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, t) $\lim\limits_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, u) $\lim\limits_{x\to 1^+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

3.2.7. Nech $a\in R$, $m,n\in R$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln x-\ln(x+2)]$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+3)-\ln x]$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+a)-\ln(x-a)]$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[\ln(x+a)-\ln x]$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, j) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$,

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$, l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$,

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$, p) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

3.2.8. Dokážte, že neexistujú limity $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\sin x$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^x(1+\sin x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^x(1-\sin x)$.

3.3 Spojitosť funkcie

S pojmom limity funkcie f v danom bode a úzko súvisí pojem spojitosti, resp. nespojitosti tejto funkcie f v bode a.

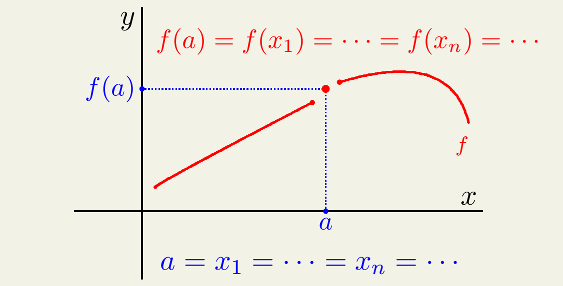
3.3.1 Spojitosť funkcie v bode

Prírodné deje často prebiehajú spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“. Niekedy môžu samozrejme prebiehať diskrétne alebo v kvantách, ale kvantá sú väčšinou také malé, že nám (ako nedokonalým pozorovateľom) sa celý proces javí ako spojitý. Najznámejším príkladom je premietanie filmu, kde postačí frekvencia väčšia ako 10 obrázkov za sekundu a pohyb sa nám javí ako spojitý. To znamená, že malej zmene nezávislej premennej veličiny zodpovedá malá zmena veličiny, ktorá je od nej závislá.

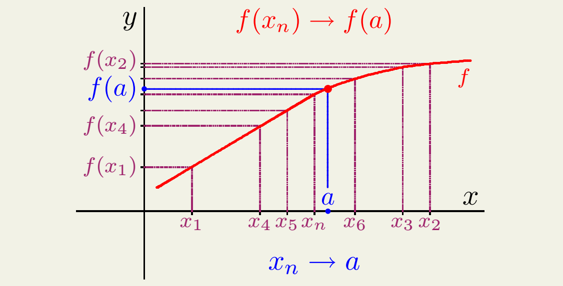
Uvažujme hmotný bod, ktorý sa pohybuje po nejakej dráhe. Veľkosť dráhy závisí od času, počas ktorého sa pohybuje. Predpokladajme, že dráhu popisuje funkcia $y = f(t)$, kde t reprezentuje čas. V čase T bude veľkosť dráhy rovná hodnote $f(T)$. Ak sa čas T zmení o malú hodnotu, potom sa dráha $f(T)$ tiež zmení o malú hodnotu. Ak pre čas bude platiť $t \to T$, potom pre veľkosť dráhy bude platiť $f(t) \to f(T)$. To znamená, že ak $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \to T$, potom $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty} \to f(T)$. Keďže je f v bode T definovaná, nemusíme požadovať platnosť podmienky $t_n \neq T$, $n \in N$.

Hovoríme,[12] že **funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode $a \in D(f)$**, ak pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to f(a)$, t.j. pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Ak funkcia f nie je spojitá v bode a, potom sa nazýva **nespojitá v bode a**.



Obr. 3.3.46: Spojitosť funkcie f v izolovanom bode $a \in D(f)$.



Obr. 3.3.47: Spojitosť funkcie f v hromadnom bode $a \in D(f)$.

Poznámka 3.3.1.
Bod $a \in D(f)$ môže byť iba hromadným alebo izolovaným bodom množiny $D(f)$.
Ak je a izolovaný (obr. 3.3.46), potom existuje iba jedna postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$. Je to postupnosť $\{a\}_{n=1}^{\infty}$. Potom platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a) = f(a)$, t.j. **funkcia f je vždy spojitá v izolovanom bode a**.
Ak je a hromadný (obr. 3.3.47), z definície spojitosti a limity vyplýva $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Funkcia f je nespojitá v bode a práve vtedy, ak existuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ taká, že neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. T.j. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ neexistuje alebo existuje a platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$.

Veta 3.3.1.
Nech je $a \in D(f)$ hromadným bodom $D(f)$. Potom je f spojitá v bode a práve vtedy, ak platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Príklad 3.3.1.
Funkcia $f\colon\ y = x,\ x \in R$ je spojitá v každom bode $a \in R$. Aj funkcia $g\colon\ y = x,\ x \in Q$, t.j. $g = f|_Q$, je spojitá v každom bode $a \in Q$. Pre všetky $a \in R$, resp. $a \in Q$ totiž platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a), \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} x = a = g(a). \ \blacksquare$$

Spojitosť funkcie f v izolovanom aj hromadnom bode $a \in D(f)$ môžeme (podobne ako limitu funkcie f v bode a) charakterizovať pomocou okolí bodov a, $f(a)$.

Veta 3.3.2.
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak pre každé okolie $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

Poznámka 3.3.2.
Tvrdenie z predchádzajúcej vety môžeme symbolicky zapísať niektorým zo vzťahov

$$\begin{aligned} & \forall O(f(a))\ \exists O(a)\ \forall x\colon\ x \in O(a) \cap D(f) \implies f(x) \in O(f(a)), \\ \text{resp.} \quad & \forall O_\varepsilon(f(a))\ \exists O_\delta(a)\ \forall x \in D(f)\colon\ x \in O_\delta(a) \implies f(x) \in O_\varepsilon(f(a)), \\ & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\colon\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Podobne ako limita, je spojitosť funkcie f v bode a lokálna záležitosť v nejakom okolí bodu a. Pri spojitosti je ale potrebné, aby $a \in D(f)$ a aby bola funkcia f v bode a definovaná. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom množiny $D(f)$. Pre spojitosť funkcií v bode a platia analogické vety ako pre limity.

[12] Analogicky ako limitu, definujeme spojitosť funkcie v bode **v zmysle Heineho**.

Veta 3.3.3.
Nech $r \in R$. Ak sú funkcie f, g spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, potom sú v bode a spojité tiež funkcie $|f|$, $f \pm g$, rf, fg, a pre $g(a) \neq 0$ aj funkcie $1/g$, f/g.

Veta 3.3.4 (O spojitosti zloženej funkcie).
Nech je f spojitá v bode $a \in D(f)$, g spojitá v bode $b = f(a) \in D(g)$ a nech $H(f) \subset D(g)$. Potom je zložená funkcia $F = g(f)$ spojitá v bode a.

Príklad 3.3.2.
a) Keďže je $f\colon\ y = x$ spojitá v bode 1, sú spojité v bode 1 tiež funkcie $2f\colon\ y = 2x$, $f^2\colon\ y = x^2$, $f^n\colon\ y = x^n$, $n \in N$. A keďže $f(1) \neq 0$, je spojitá tiež funkcia $1/f^n\colon\ y = 1/x^n$.
b) Zložená funkcia $g(f)\colon\ y = \sqrt{x^2+1}$ je spojitá v bode $a = 1$, pretože $f\colon\ u = x^2 + 1$ je spojitá v bode $a = 1$ a $g\colon\ y = \sqrt{u}$ je spojitá v bode $b = f(1) = 2$. ∎

Veta 3.3.5.
Nech je funkcia f spojitá v bode a a nech množina $A \subset D(f)$ je taká, že $a \in A$.
Potom je reštrikcia funkcie f na množinu A, t.j. funkcia $g = f|_A$, spojitá v bode a.

Dôkaz.
Ak je a izolovaným bodom množiny $D(f)$, potom je tiež izolovaným bodom jej podmnožiny $A \subset D(g)$ a funkcia g je spojitá v bode a.
Ak je bod a hromadným bodom množiny $D(f)$, potom platí $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(a) = g(a)$.
Bod a môže byť izolovaným alebo hromadným bodom množiny $A = D(g)$.
Ak je a izolovaným bodom, potom je funkcia g v bode a spojitá.
Ak je a hromadným bodom, potom z vety 3.2.10 vyplýva

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f|_A(x) = f(a), \qquad \text{t.j.} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

a funkcia g je v bode a spojitá. ∎

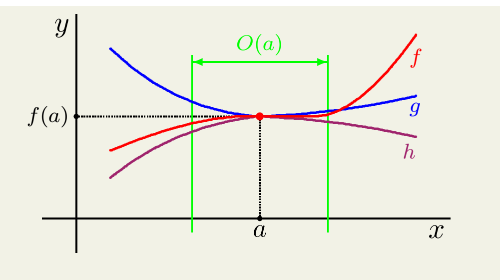
Veta 3.3.6 (O zovretí).
Nech sú funkcie g, h spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g) \cap D(h)$. Nech $h(a) = f(a) = g(a)$.
Nech existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
Potom je funkcia f spojitá v bode a.

Dôkaz.
Zo spojitosti funkcií f, g v bode a a z predpokladu $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ vyplýva

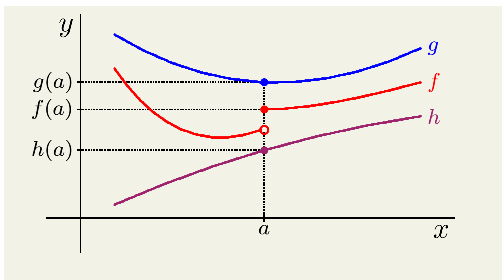
$$h(a) = \lim_{x\to a} h(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) = g(a), \qquad \text{t.j.} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

To znamená, že je funkcia f spojitá v bode a. ∎

Poznámka 3.3.3.
Predpoklad $h(a) = f(a) = g(a)$ v predchádzajúcej vete je dôležitý (obr. 3.3.48). Ak nie je splnený, potom funkcia f v bode a nemusí byť spojitá (obr. 3.3.49).

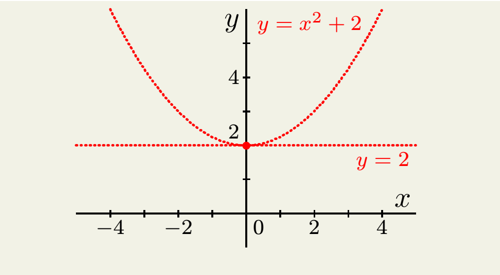


Obr. 3.3.48: Veta 3.3.4 o zovretí.

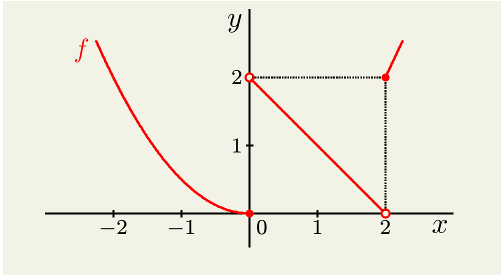


Obr. 3.3.49: Poznámka 3.3.3.

Príklad 3.3.3.
Uvažujme funkciu $f\colon\ y = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{pre } x \in Q, \\ 1, & \text{pre } x \in R - Q \end{cases}$ (obr. 3.3.50).
Je zrejmé, že pre všetky $a \neq 0$ neexistuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, t.j. funkcia f nie je spojitá.
Ukážeme, že je f spojitá v bode $a = 0$. Ak označíme $g(x) = x^2 + 2$, $x \in R$ a $h(x) = 2$, $x \in R$, potom pre všetky $x \in R$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $f(0) = h(0) = g(0) = 1$.
Keďže sú g, h spojité v bode 0, je na základe vety o zovretí spojitá v 0 aj funkcia f. ∎



Obr. 3.3.50: Príklad 3.3.3.



Obr. 3.3.51: Poznámka 3.3.4.

Analogicky ako limitu vzhľadom na množinu, resp. limitu zľava a sprava, definujeme aj spojitosť vzhľadom na množinu a spojitosť zľava a sprava.

Hovoríme, že **funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$**, ak je spojité v bode a jej zúženie $f|_A$, t.j. ak pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Ak je funkcia f spojitá vzhľadom na množinu $D(f) \cap (-\infty\,; a\rangle$ [resp. na množinu $D(f) \cap \langle a\,; \infty)$], potom sa nazýva **spojitá zľava** [resp. **spojitá sprava**] **v bode a**. V týchto prípadoch hovoríme o **jednostrannej spojitosti funkcie f v bode a**.

Poznámka 3.3.4.
Funkcia f na obrázku 3.3.51 je spojitá v každom bode množiny $R - \{0; 2\}$. V bode 0 je spojitá zľava a v bode 2 je spojitá sprava.

Pre jednostrannú spojitosť platí analogické tvrdenie ako pre jednostranné limity.

Veta 3.3.7.
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak je v bode a spojitá zľava a sprava.

3.3.2 Spojitosť funkcie na množine a body nespojitosti

Hovoríme, že **funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$**, ak je spojitá v každom bode $a \in A$. Ak je funkcia f spojitá na celom svojom $D(f)$, potom ju nazývame **spojitá funkcia** (slová na definičnom obore $D(f)$ vynechávame).

Ak je funkcia f v bode $a \in D(f)$ spojitá [resp. nespojitá], potom bod a nazývame **bodom spojitosti** [resp. **nespojitosti**] **funkcie f**.

Poznámka 3.3.5.
Z definície je zrejmé, že ak je funkcia f spojitá na množine A, potom je funkcia f spojitá na každej podmnožine množiny A.

Príklad 3.3.4.
a) Funkcia f definovaná v príklade 3.3.3 (obr. 3.3.50) je spojitá iba v bode 0, t.j. je spojitá na množine $\{0\}$. V ostatných bodoch, t.j. na množine $R - \{0\}$ je nespojitá.

b) Na obrázku 3.3.51 je graf funkcie $f\colon\ y = x^2$ pre $x \in R - (0\,; 2)$ a $y = 2 - x$ pre $x \in (0\,; 2)$. Funkcia f je nespojitá v bodoch $0, 2$ a spojitá na množine $R - \{0, 2\}$. ■

Už sme spomínali, že funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $a \in D(f)$. Preto rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky hromadné body množiny $D(f)$. Body nespojitosti rozdeľujeme na body odstrániteľnej a neodstrániteľnej nespojitosti.

Hovoríme, že **funkcia f má v bode a bod odstrániteľnej nespojitosti**, ak existuje konečná limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ale $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ (obr. 3.3.52).[13]

Funkcia f má v bode a bod neodstrániteľnej nespojitosti 1. druhu, ak existujú konečné jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (obr. 3.3.53). Číslo

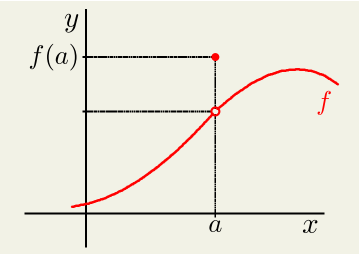
$$c = \left| \lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x) \right|$$

nazývame **skok funkcie f v bode a**.

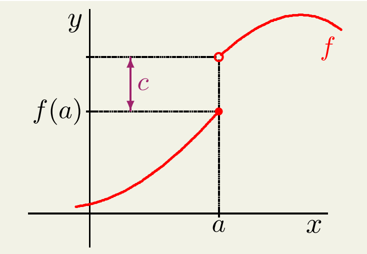
Funkcia f má v bode a bod neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu, ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

Ak je niektorá z týchto limít nevlastná (obr. 3.3.54), potom hovoríme o **asymtotickej nespojitosti funkcie f v bode a**.

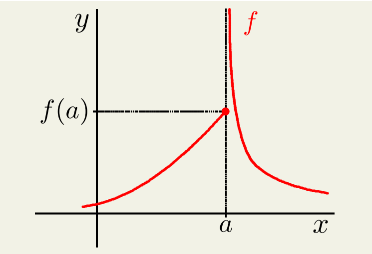
Poznámka 3.3.6.
Z definície asymptoty bez smernice vyplýva, že funkcia f má v bode a asymptotu bez smernice práve vtedy, ak je v bode a asymptoticky nespojitá (viď obr. 3.2.40).



Obr. 3.3.52: Nespojitosť odstrániteľná.



Obr. 3.3.53: Nespojitosť neodstrániteľná 1. druhu.



Obr. 3.3.54: Nespojitosť neodstrániteľná 2. druhu.

Príklad 3.3.5.
Uvažujme nasledujúce funkcie

$$f_1(x)=\frac{x^2-1}{x-1},\quad f_2(x)=\frac{\sin x}{x},\quad g(x)=\lfloor x\rfloor,\quad h_1(x)=\frac{1}{x},\quad h_2(x)=\sin\frac{1}{x}.$$

Funkcia f_1 má v bode 1 a funkcia f_2 má v bode 0 odstrániteľný bod nespojitosti, pretože

$$\lim_{x\to 1} f_1(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,\qquad \lim_{x\to 0} f_2(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Ak položíme $f_1(1)=2$, $f_2(0)=1$, potom budú tieto funkcie v uvedených bodoch spojité.
Funkcia g (obr. 2.1.2) má vo všetkých bodoch $k\in Z$ skok $c=1$, pretože platí

$$\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^-}\lfloor x\rfloor=k-1,\qquad \lim_{x\to k^+} g(x)=\lim_{x\to k^+}\lfloor x\rfloor=k.$$

Funkcie h_1, h_2 majú v bode 0 neodstrániteľný bod nespojitosti 2. druhu, pretože

$$\lim_{x\to 0^-} h_1(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0^+} h_1(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

a jednostranné limity funkcie h_2 v bode 0 neexistujú (príklad 3.2.5). ■

Funkcia f sa nazýva **po častiach spojitá na intervale** $\langle a\,;\,b\rangle\subset D(f)$, ak má na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti a všetky tieto body sú buď odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

Túto definíciu môžeme rozšíriť na ľubovoľný interval $I\subset D(f)$, napr. $(-\infty\,;\,\infty)$, $\langle 0\,;\,\infty)$. Funkcia f sa nazýva **po častiach spojitá na intervale** $I\subset D(f)$, ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle\subset I$.

Príklad 3.3.6.
a) Funkcia $f\colon\ y=x^2$, $x\in R$ je spojitá na R, takže je aj po častiach spojitá na R.

b) Funkcia $f\colon\ y=\lfloor x\rfloor$, $x\in R$ je po častiach spojitá na množine R, pretože je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, $a,b\in R$.

c) Funkcia $f\colon\ y=x^{-1}$, $x\in R-\{0\}$, $f(0)=0$ je spojitá, t.j. aj po častiach spojitá na každom intervale, ktorý neobsahuje bod 0, t.j. neodstrániteľný bod nespojitosti 2. druhu. To znamená, že na intervale, ktorý obsahuje 0, nie je funkcia f po častiach spojitá. ■

3.3.3 Vlastnosti spojitých funkcií na intervale

Spojitosť funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle\subset D(f)$ znamená spojitosť funkcie f na intervale $(a\,;\,b)$, spojitosť sprava v bode a a spojitosť zľava v bode b. Spojité funkcie na intervale majú mnohé významné vlastnosti, ktoré sformulujeme v nasledujúcich vetách.

Veta 3.3.8 (O lokálnej ohraničenosti spojitej funkcie).
Ak je funkcia f spojitá v bode $a\in D(f)$, potom je lokálne ohraničená (obr. 3.3.55), t.j. existuje okolie $O(a)$ také, že f je ohraničená na $O(a)\cap D(f)$.

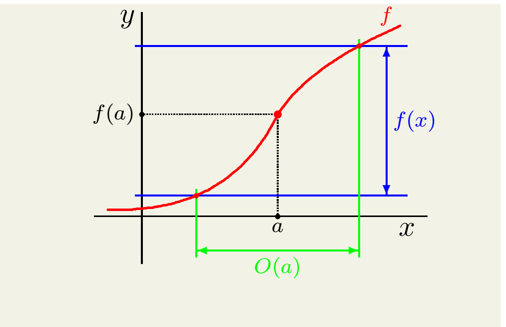
Dôkaz.
Ak je a izolovaný bod $D(f)$, potom je tvrdenie zrejmé. Ak je a hromadný bod, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ a tvrdenie vyplýva z vety 3.2.2 o lokálnej ohraničenosti limity. ■

Poznámka 3.3.7.
V predpokladoch vety je spojitosť funkcie f v bode $a\in D(f)$. Zo spojitosti funkcie f na množine $A\subset D(f)$ ešte nevyplýva jej ohraničenosť na tejto množine. Napríklad funkcia $f\colon\ y=x^{-1}$ je síce spojitá na intervale $(0\,;\,1)$, ale nie ohraničená.

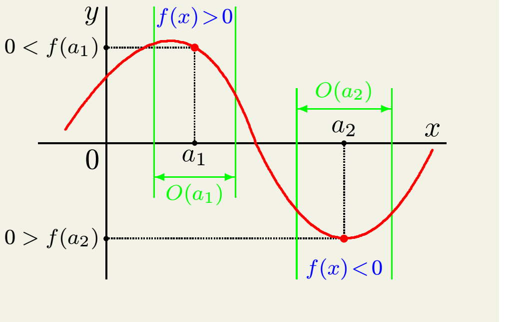
[13] Je zrejmé, že stačí predefinovať $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a funkcia f bude v bode a spojitá.

Veta 3.3.9.
Nech je funkcia f spojitá v bode $a \in D(f)$ a nech $f(a) > 0$ [resp. $f(a) < 0$].
Potom existuje okolie $O(a)$, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$].

Dôkaz.
Ak je a izolovaný, potom existuje $O(a)$ také, že $O(a) \cap D(a) = \{a\}$ a tvrdenie je zrejmé.
Ak je a hromadný, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a tvrdenie vyplýva z dôsledku 3.2.7.a. ■



Obr. 3.3.55: Veta 3.3.8.



Obr. 3.3.56: Veta 3.3.9.

Veta 3.3.10 (Weierstrass).
Ak je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, potom platí:
a) Funkcia f je na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ ohraničená.
b) Funkcia f nadobúda na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ svoje extrémy, t.j. existujú body $c, d \in \langle a\,;\,b\rangle$ také, že $f(c) = \min\{f(x)\,;\, x \in \langle a\,;\,b\rangle\}$, $f(d) = \max\{f(x)\,;\, x \in \langle a\,;\,b\rangle\}$.

Dôkaz.
a) Sporom. Nech je funkcia f spojitá a neohraničená na $\langle a\,;\,b\rangle$. Potom pre každé $n \in N$ existuje $x_n \in \langle a\,;\,b\rangle$ také, že $|f(x_n)| > n$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty$.
Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a môžeme (veta 2.3.9) z nej vybrať $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k nejakému $e \in \langle a\,;\,b\rangle$. Je zrejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| = \infty$, $f(e) \in R$.
Keďže je f spojitá v bode e, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(e)$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| \neq \infty$. To je spor.
b) Funkcia f je ohraničená na $\langle a\,;\,b\rangle$, t.j. existujú konečné $m, M \in R$ také, že.

$$m = \inf\{f(x)\,;\, x \in \langle a\,;\,b\rangle\}, \qquad M = \sup\{f(x)\,;\, x \in \langle a\,;\,b\rangle\}.$$

Nepriamo ukážeme, že f nadobúda M. Nech f nenadobúda M, t.j. neexistuje $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ také, že $f(x) = M$. Potom pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ platí $f(x) < M$. Z toho vyplýva

$$0 < M - f(x), \qquad \text{t.j. } 0 < \frac{1}{M - f(x)}.$$

Funkcia $g\colon\ y = 1/[M - f(x)]$ je na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ spojitá a teda aj ohraničená. To znamená, že existuje číslo $k > 0$ také, že pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ platí

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} < k, \qquad \text{t.j. } \frac{1}{k} < M - f(x), \qquad \text{t.j. } f(x) < M - \frac{1}{k}.$$

To je spor s tým, že $M = \sup A$ a dokazuje, že funkcia f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ svoje súpremum nadobúda. Pre m je dôkaz analogický. ■

Poznámka 3.3.8.
Veta 3.3.10 platí iba pre uzavretý interval $\langle a\,;\,b\rangle$. Pre otvorené a polouzavreté intervaly neplatí. Napr. $f\colon\ y = x^{-1}$ je na $(0\,;\,4\rangle$ spojitá, ale nie ohraničená (obr. 3.3.58). Na druhej strane je ohraničená na každom intervale $(a\,;\,4)$, kde $0 < a < 4$.

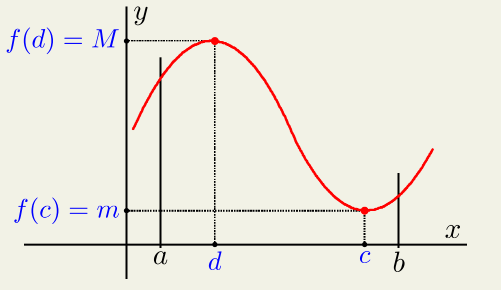
Veta 3.3.11 (Cauchyho o nulovej hodnote).
Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ a platí $f(a)f(b) < 0$, potom existuje bod $c \in (a\,;\,b)$ taký, že $f(c) = 0$ (nulový bod).

Dôkaz.
Predpoklad $f(a)f(b) < 0$ znamená, že platí práve jeden zo vzťahov

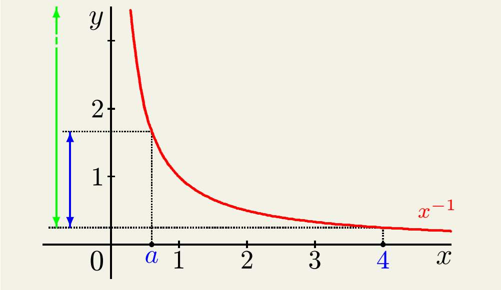
$$f(a) < 0 < f(b), \qquad f(a) > 0 > f(b).$$

Nech platí $f(a) < 0 < f(b)$ (obr. 3.3.59). Pre $f(a) > 0 > f(b)$ je dôkaz analogický.
Označme $a = a_0$, $b = b_0$ a rozdeľme interval $\langle a_0\,;\,b_0\rangle$ na dva rovnako dlhé intervaly

$$\langle a_0\,;\,x_1\rangle\,,\ \langle x_1\,;\,b_0\rangle\,, \qquad \text{kde } x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$



Obr. 3.3.57: Veta 3.3.10.



Obr. 3.3.58: Poznámka 3.3.8.

Ak $f(x_1) = 0$, potom máme koreň. Ak $f(x_1) \neq 0$, potom označíme $\langle a_1 ; b_1 \rangle = \langle a_0 ; x_1 \rangle$ pre $f(x_1) > 0$ a označíme $\langle a_1 ; b_1 \rangle = \langle x_1 ; b_0 \rangle$ pre $f(x_1) < 0$. Potom platí

$$f(a_1) < 0 < f(b_1), \qquad \langle a_1 ; b_1 \rangle \subset \langle a_0 ; b_0 \rangle, \qquad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Interval $\langle a_1 ; b_1 \rangle$ opäť rozdelíme na dva rovnako dlhé intervaly

$$\langle a_1 ; x_2 \rangle, \ \langle x_2 ; b_1 \rangle, \qquad \text{kde } \ x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Ak $f(x_2) = 0$, potom máme koreň. V opačnom prípade označíme $\langle a_2 ; b_2 \rangle = \langle a_1 ; x_2 \rangle$ pre $f(x_2) > 0$ a $\langle a_2 ; b_2 \rangle = \langle x_2 ; b_1 \rangle$ pre $f(x_2) < 0$. Potom platí

$$f(a_2) < 0 < f(b_2), \qquad \langle a_2 ; b_2 \rangle \subset \langle a_1 ; b_1 \rangle, \qquad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}.$$

Ak budeme týmto spôsobom pokračovať ďalej, potom sú dve možnosti. Buď po konečnom počte krokov dostaneme bod x_k, pre ktorý platí $f(x_k) = 0$ alebo dostaneme nekonečnú postupnosť do seba vložených intervalov $\{\langle a_n ; b_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pre všetky $n \in N$ platí

$$f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad \langle a_n ; b_n \rangle \subset \langle a_{n-1} ; b_{n-1} \rangle, \quad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Z Cantorovho princípu do seba vložených intervalov (veta 2.1.11) potom vyplýva, že existuje práve jeden bod c taký, že pre všetky $n \in N$ platí $c \in \langle a_n ; b_n \rangle$.
Ukážeme, že platí $f(c) = 0$. Z vlastností postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Ak uvážime, že je funkcia f spojitá v bode c, potom platí

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c), \qquad \text{t.j. } \ f(c) = 0. \ \blacksquare$$

Poznámka 3.3.9.
Metóda, ktorú sme použili v dôkaze vety 3.3.11 sa nazýva **metóda postupného delenia intervalu** (**metóda polenia**, resp. **metóda bisekcie**) a často sa používa pri numerickom hľadaní koreňov danej funkcie, t.j. pri riešení rovnice $f(x) = 0$.
Koreň rovnice $f(x) = 0$ aproximujeme hodnotou $x_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ tak, aby platilo

$$b_n - a_n < \varepsilon, \qquad \text{resp.} \quad |f(x_{n+1})| < \varepsilon,$$

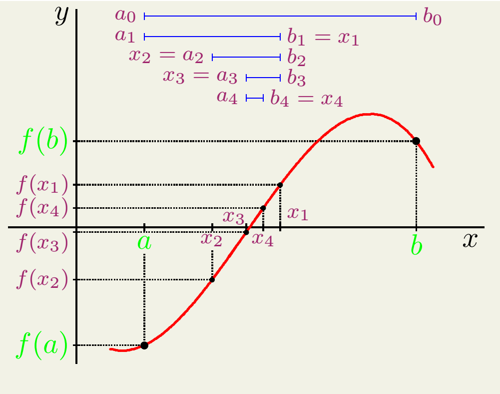
kde $\varepsilon > 0$ je dopredu zvolená tolerancia (chyba výpočtu). Vo veľkej väčšine prípadov sa požaduje splnenie obidvoch predchádzajúcich podmienok.
Metóda bisekcie je pomerne jednoduchá, lenže je dosť pracná. Na spresnenie koreňa o jeden rád potrebuje približne 4 kroky, preto sa väčšinou používa iba ako štartovacia metóda na získanie počiatočných hodnôt pre iné metódy.

Príklad 3.3.7.
Nájdite s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$ korene funkcie $f\colon\ y = x^3 - 3x + 1$.

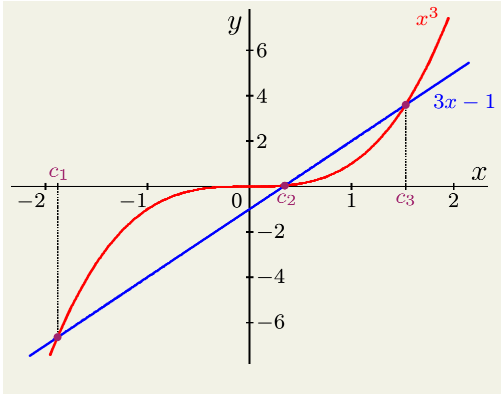
Riešenie.
Z priesečníkov (obr. 3.3.60 — kvôli prehľadnosti je súradnicová os x zväčšená 4,5 krát vzhľadom na súradnicovú os y) grafov funkcií $y = x^3$, $y = 3x - 1$ odhadneme, že korene funkcie f sú tri a ležia v intervaloch $\langle -2 ; -1 \rangle$, $\langle 0 ; 1 \rangle$, $\langle 1 ; 2 \rangle$.
Toto tvrdenie dokážeme pomocou vety 3.3.11. Funkcia f je spojitá a platí

$$f(-2) = -1, \ \ f(-1) = 3, \ \ f(0) = 1, \ \ f(1) = -1, \ \ f(2) = 3.$$

Z toho vyplýva $f(-2)f(-1) = -3 < 0$, $\ f(0)f(1) = -1 < 0$, $\ f(1)f(2) = -3 < 0$.
Takže náš odhad pre intervaly, v ktorých ležia korene funkcie f, bol správny.



Obr. 3.3.59: Veta 3.3.11.



Obr. 3.3.60: Príklad 3.3.7.

Pomocou metódy bisekcie nájdeme s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ koreň z intervalu $\langle 0\,;\,1\rangle$. Na jeho nájdenie budeme potrebovať minimálne k krokov, pričom pre $k \in N$ platí

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{1-0}{2^k} = 2^{-k} < \varepsilon = 10^{-2}, \qquad \text{t.j.}\ \ 10^2 = 100 < 2^k.$$

Najmenšie $k \in N$ vyhovujúce predchádzajúcej nerovnosti je $k = 7$.
Postup riešenia je znázornený v tabuľke 3.3.4 a koreňom je číslo $x_8 = 0,347\,656\,25$, ktorého odchýlka od skutočného koreňa je menšia ako $0,003\,906\,25$, t.j. menšia ako $\varepsilon = 0,01$.
Keby sme požadovali iba presnosť $|f(c)| < \varepsilon$, postačil by nám koreň $x_5 = 0,343\,75$.
Keby sme požadovali iba presnosť $b_n - a_n < \varepsilon$, postačil by nám koreň $x_7 = 0,351\,562\,5$.
Na záver pre porovnanie s uvádzame všetky tri korene (vypočítané nenumericky s presnosťou na deväť desatinných miest)

$$c_1 = -1,879\,385\,242, \qquad c_2 = 0,347\,296\,355, \qquad c_3 = 1,532\,088\,886.$$

Rozdiel medzi $x_8 = 0,347\,656\,25$ a skutočným koreňom c_2 je $x_8 - c_2 = 0,000\,359\,895$. ■

k	a_k $[f(a_k) > 0]$	b_k $[f(b_k) < 0]$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$		$b_k - a_k$
0	0,0	1,0	0,5	−0,375	$\to b_1$	1,0
1	0,0	0,5	0,25	0,265 625	$\to a_2$	0,5
2	0,25	0,5	0,375	−0,072 265 625	$\to b_3$	0,25
3	0,25	0,375	0,312 5	0,093 017 578	$\to a_4$	0,125
4	0,312 5	0,375	0,343 75	0,009 368 896	$\to a_5$	0,062 5
5	0,343 75	0,375	0,359 375	−0,031 711 578	$\to b_6$	0,031 25
6	0,343 75	0,359 375	0,351 562 5	−0,011 235 714	$\to b_7$	0,015 625
7	0,343 75	0,351 562 5	0,347 656 25	−0,000 949 323	$\to b_8$	0,007 812 5
8	0,343 75	0,347 656 25				0,003 906 25

Tab. 3.3.4: Riešenie rovnice $x^3-3x+1=0$ z príkladu 3.3.7 metódou bisekcie.

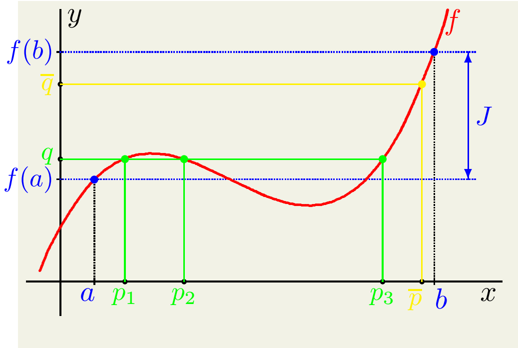
Z Cauchyho vety o nulovej hodnote vyplývajú mnohé dôsledky. Jedným z najvýznamnejších dôsledkov je nasledujúca veta o medzihodnote a veta 3.3.13.

Veta 3.3.12 (O medzihodnote).
Nech je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$ a nech $a, b \in I$. Potom f nadobúda všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$, t.j. pre všetky $q \in J$, kde J je otvorený interval s koncovými bodmi $f(a)$ a $f(b)$, existuje číslo $p \in (a\,;\,b)$ také, že platí $f(p) = q$.

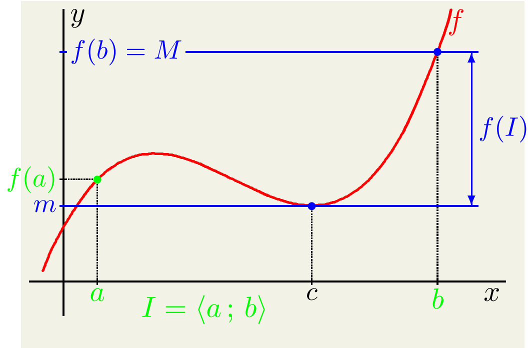
Dôkaz.
Ak $f(a) = f(b)$, potom je taká hodnota iba jedna a tvrdenie vety platí.
Nech $f(a) < q < f(b)$ (viď obr 3.3.61). Označme $g\colon\ y = f(x) - q,\ x \in \langle a\,;\,b\rangle$, potom platí $f(a) - q = g(a) < 0 < g(b) = f(b) - q$. Potom (veta 3.3.11) existuje $p \in (a\,;\,b)$ také, že $g(p) = f(p) - q = 0$, t.j. $f(p) = q$. Pre $f(a) > q > f(b)$ je dôkaz analogický. ■

Dôsledok 3.3.12.a.
Ak je f na intervale $I \subset R$ spojitá, potom $f(I)$ je jednobodová množina alebo interval.

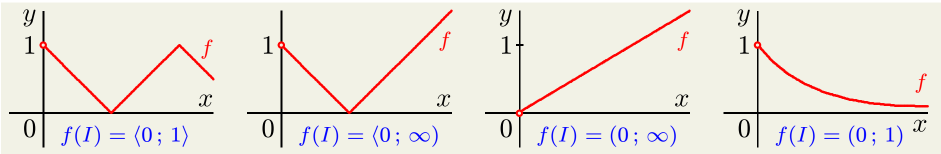
Poznámka 3.3.10.
Ak je interval I uzavretý a ohraničený, potom aj $f(I)$ je uzavretý a ohraničený a na základe vety 3.3.10 platí $f(I) = \langle m\,;\,M\rangle$, pričom $m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$, $x \in I$.
Ak je funkcia f na intervale I spojitá, ale I nie je uzavretý alebo ohraničený, potom vo všeobecnosti typ intervalu $f(I)$ určiť nevieme (obr. 3.3.63). Ale ak je funkcia f rýdzo monotónna, potom interval $f(I)$ má rovnaký typ ako I.



Obr. 3.3.61: Veta 3.3.12.



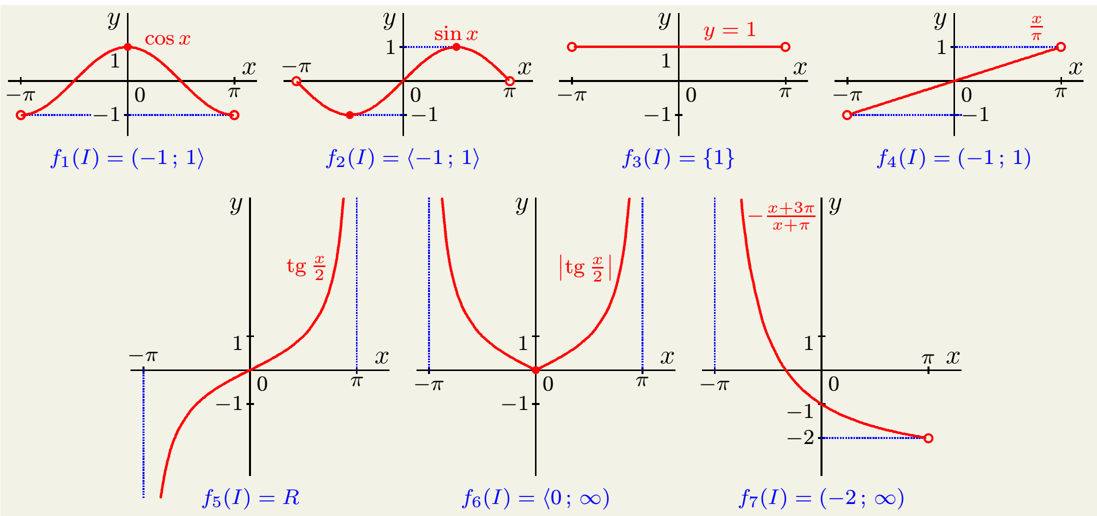
Obr. 3.3.62: Dôsledok 3.3.12.a.



Obr. 3.3.63: Zobrazenie intervalu $I = (0;\, \infty)$ spojitou funkciou f (poznámka 3.3.10).

Príklad 3.3.8.
Spojitá funkcia môže zobraziť interval $I = (-\pi\,;\, \pi)$ na rôzne intervaly, napr. (obr. 3.3.64)

$$f_1(x) = \cos x \colon I \to (-1\,;\, 1\rangle\,, \quad f_2(x) = \sin x \colon I \to \langle -1\,;\, 1\rangle\,,$$
$$f_3(x) = 1 \colon I \to \{1\}\,, \quad f_4(x) = \tfrac{x}{\pi} \colon I \to (-1\,;\, 1)\,, \quad f_5(x) = \operatorname{tg} \tfrac{x}{2} \colon I \to R,$$
$$f_6(x) = \left|\operatorname{tg} \tfrac{x}{2}\right| \colon I \to \langle 0\,;\, \infty)\,, \quad f_7(x) = -\tfrac{2x}{x+\pi} - 1 = -\tfrac{3x+\pi}{x+\pi} \colon I \to (0\,;\, \infty)\,. \blacksquare$$



Obr. 3.3.64: Zobrazenie intervalu $I = (-\pi;\, \pi)$ z príkladu 3.3.8.

Veta 3.3.13.
Spojitá funkcia je na intervale $I \subset R$ prostá práve vtedy, ak je na I rýdzo monotónna.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech je funkcia f prostá a nie je rýdzo monotónna.
Potom existujú body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ také, že platí

$$f(x_1) < f(x_2), f(x_3) < f(x_2), \quad \text{resp.} \quad f(x_1) > f(x_2), f(x_3) > f(x_2).$$

Keďže je funkcia f prostá, platí $f(x_1) \neq f(x_3)$ a môžu nastať štyri prípady. Ich dôkaz je podobný a preto dokážeme iba prípad $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$.
Potom (veta o medzihodnote) existuje $p \in (x_1\,;\, x_2)$ také, že $f(p) = f(x_3)$. Keďže $p \neq x_3$, dostali sme spor s tým, že je f prostá.
$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z vety 3.1.4. $\blacksquare$

Na záver spomenieme bez dôkazu vetu o spojitosti inverznej funkcie (obrázok 3.1.14).

Veta 3.3.14 (O spojitosti inverznej funkcie).
Ak je f prostá a spojitá na intervale I, potom inverzná funkcia f^{-1} je spojitá na $f(I)$.

Ak uvážime všetky doterajšie výsledky o spojitých funkciách, môžeme vysloviť tvrdenie, že **všetky elementárne funkcie sú spojité**.

Cvičenia

3.3.1. Vyšetrite spojitosť a charakter bodov nespojitosti funkcie:

a) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$, b) $y = \dfrac{1}{\sin x}$, c) $y = \dfrac{1}{\ln x}$, d) $y = \dfrac{x}{|x|}$,
e) $y = \lfloor \sin x \rfloor$, f) $y = \lfloor \cos x \rfloor$, g) $y = \ln|\sin x|$, h) $y = \ln|\cos x|$,
i) $y = \sin\dfrac{1}{x}$, j) $y = \cos\dfrac{1}{x}$, k) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, l) $y = \dfrac{x^2}{|x^2|}$,
m) $y = \operatorname{sgn}\sin x$, n) $y = \operatorname{sgn}\cos x$, o) $y = \sqrt{3-x^2}$, p) $y = \sqrt{3-|x|}$,
q) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, r) $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$, s) $y = \dfrac{x}{\sin x}$, t) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

3.3.2. Určte $a \in R$ tak, aby bola funkcia f spojitá na svojom $D(f)$, ak:

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x + 2, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{pre } x < 1, \\ 2 - x/a, & \text{pre } x \geq 1, \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

3.3.3. Určte $a, b \in R$ tak, aby bola funkcia f spojitá na svojom $D(f)$, ak:

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,0\rangle\,, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (0\,;\,2)\,, \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle 2\,;\,\infty)\,, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,b\rangle\,, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (b\,;\,a)\,, \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle a\,;\,\infty)\,. \end{cases}$

3.3.4. Určte $f(0)$ tak, aby bola funkcia f spojitá v bode 0, ak pre $x \neq 0$ platí:

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$, b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x}$, c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2 - 4}{x}$,
d) $f(x) = (1+2x)^{1/x}$, e) $f(x) = x^2 + e^{-1/x^2} - 1$, f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

3.3.5. Nech je funkcia f nespojitá v bode $a \in D(f)$. Aká je funkcia $|f|$ v bode a?

3.3.6. Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine R, je všade spojitá a má práve 0, 1, 2, …, n, $(n \in N)$, resp. nespočítateľne veľa bodov nespojitosti.

3.3.7. Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine R, je všade nespojitá a má práve 0, 1, 2, …, n, $(n \in N)$, resp. spočítateľne veľa bodov spojitosti.

3.3.8. Nech sú funkcie f, g nespojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi.

a) $f + g$, b) g/f, c) fg, d) $f(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

3.3.9. Nech je funkcia f spojitá a funkcia g nespojitá v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi.

a) $f + g$, b) g/f, c) fg, d) $g(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

3.3.10. Určte množiny, na ktorých sú spojité funkcie $f(g)$, $g(f)$, ak $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a platí:

a) $g(x) = x(1-x^2)$, b) $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, c) $g(x) = \operatorname{sgn}(1-x)$,
d) $g(x) = 1 + x - \lfloor x \rfloor$, e) $g(x) = 1 + x\lfloor x \rfloor$, f) $g(x) = 1 - \chi(x)$.

3.3.11. Dokážte, že ak sú na množine A spojité funkcie f, g, potom sú na množine A spojité aj funkcie $y = \min\{f(x), g(x)\}$, $y = \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in A$.

3.3.12. Metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite všetky korene funkcie f:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 11$, c) $f(x) = e^x + x$, b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x^{-1} + 5$,
d) $f(x) = \ln x - 3 + x$, e) $f(x) = e^{x^2-1} - x - 1$, f) $f(x) = \cos x^2 + x - 1$.

3.3.13. Dokážte, že daná rovnica má riešenie na intervale I a nájdite toto riešenie.

a) $x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0, \quad I = \langle 0\,;\,1\rangle,$

b) $x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0, \quad I = \langle 1\,;\,2\rangle,$

c) $x^3 - x - 1 = 0, \quad I = \langle 1\,;\,2\rangle,$

d) $\cos x - x = 0, \quad I = \langle 0\,;\,1\rangle,$

e) $x + \arcsin x^2 = 0, \quad I = \langle -1\,;\,0),$

f) $x + \sin(x-1) = 0, \quad I = \langle 0\,;\,1\rangle.$

3.3.14. Nájdite množinu $f(I)$, ak:

a) $I = \langle \pi\,;\,3\pi/2\rangle, \quad f(x) = \sin 2x,$

b) $I = \langle -2\,;\,4\rangle, \quad f(x) = x^2 + 2,$

c) $I = \langle 0\,;\,\infty), \quad f(x) = x\,\lfloor x \rfloor,$

d) $I = \langle 0\,;\,4\pi\rangle, \quad f(x) = x\,\lfloor \sin x \rfloor,$

e) $I = \langle 0\,;\,\infty), \quad f(x) = \chi(x^2 + 1),$

f) $I = (0\,;\,1), \quad f(x) = (x^2 - x)^{-1}.$

Tretí v hre je ten, čo nie je.
RAINER MARIA RILKE

Je lepšie ľutovať, že sme niečo zažili,
ako ľutovať, že sme to nezažili.
GIOVANNI BOCCACCIO

Chlastat umí každej vůl, když má žízeň.
Ale ten kluk pije pro radost. Tak to má být!
JAN MATĚJKA

Nikto učený z neba nespadol, ale hlupákov akoby zhadzovali.
JULIUS TUWIM

Povedz človeku, že je na nebi 97830124737182 hviezd a uverí ti.
Ale napíš na lístok: „čerstvo natreté“ a každý skúsi, aby sa presvedčil.
JULIUS TUWIM

Existujú tri druhy klamstiev: lži, prekliate lži a štatistiky.
MARK TWAIN

Keď zbadáš sukňu, zabudneš, že si ženatý.
manželka MARKA TWAINA
Naopak, to si na to vždy spomeniem.
MARK TWAIN

Aj tie najkrajšie nohy niekde končia.
JULIUS TUWIM

Kde sa nudíme lepšie ako v rodinnom kruhu?
OSKAR WILDE

Sprostý je ako peň, ale strýka má múdreho.
DARGINSKÉ PRÍSLOVIE

Čo sa do suda dostane prvé, tým je cítiť stále.
ISLANDSKÉ PRÍSLOVIE

Nie všetci somári majú veľké uši.
NEMECKÉ PRÍSLOVIE

Pri stole a v posteli nesmie byť človek hlúpy.
NEMECKÉ PRÍSLOVIE

Život je žart. To som si vždy myslel, teraz to viem.
JOHN GAY — náhrobný nápis

Predstavte si to ticho, keby ľudia hovorili iba to, čo vedia.
KAREL ČAPEK

Škola rozvíja všetky vlohy, vrátane hlúposti.
ANTON PAVLOVIČ ČECHOV

Priateľ je ten, kto vie o vás všetko
a napriek tomu vás má stále rovnako rád.
ELBERT HUBBARD

Pesimista je človek, ktorý keď ho postavia pred dve zlá, vyberie si obe.
ELBERT HUBBARD

Zo všetkých hlupákov je najneznesitelnejší zcestovaný hlupák.
Prináša si hlúposti iných národov a pridáva ich ku svojim.
ALEXANDER HUMBOLDT

Kapitola 4

Diferenciálny počet reálnej funkcie reálnej premennej

4.1 Derivácia reálnej funkcie

4.1.1 Definícia derivácie funkcie a jej základné vlastnosti

Základným pojmom diferenciálneho počtu je pojem derivácie. K zavedeniu pojmu derivácie funkcie viedli predovšetkým dva problémy, ktoré sú uvedené v nasledujúcich príkladoch. Prvým je problém určiť okamžitú rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu a druhým je problém určiť rovnicu dotyčnice grafu reálnej funkcie v danom bode.

Príklad 4.1.1.
Uvažujme hmotný bod H, ktorý sa pohybuje po priamke (obr. 4.1.1) a jeho pohyb je opísaný funkciou $s(t)$, závislou od času t. Čas začneme merať od okamihu t_0 a bod na priamke, v ktorom sa práve hmotný bod H nachádza, nazveme počiatok P_0.
Ak sa v čase $t > t_0$ nachádza hmotný bod H v bode P, potom $s(t)$ predstavuje dĺžku úsečky P_0P. Označme Q polohu hmotného bodu H v čase $t + \Delta t$, kde $\Delta t \neq 0$.
Úsečka PQ prestavuje dráhu, ktorú prejde hmotný bod od okamihu t po $t + \Delta t$, t.j. v časovom intervale Δt. Ak označíme $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, potom priemernú rýchlosť $\overline{v}$ hmotného bodu H v časovom intervale Δt môžeme vyjadriť vzťahom

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Ak sa bude časový interval Δt zmenšovať, t.j. ak $\Delta t \to 0$, potom sa bude priemerná rýchlosť $\overline{v}$ približovať k okamžitej rýchlosti $v(t)$ v čase t. To znamená, že platí

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \blacksquare$$

Príklad 4.1.2.
Uvažujme spojitú reálnu funkciu $y = f(x)$ a bod $P = [x_0; f(x_0)]$ ležiaci na grafe funkcie f. Rovnica dotyčnice d_P k funkcii f v bode P má tvar

$$y - f(x_0) = k(x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x - x_0) \quad \text{t.j.} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0},$$

kde $k = \operatorname{tg} \alpha$ je smernica dotyčnice d_P. Ak $Q = [x; f(x)]$ je ľubovoľný bod ležiaci na grafe funkcie f (obr. 4.1.2), potom pre smernicu priamky PQ platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ak sa bude bod Q približovať k bodu P, t.j. ak $x \to x_0$, potom sa bude priamka PQ približovať k dotyčnici d_P. To znamená, že bude platiť $\alpha \to \varphi$, $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.
Smernicu $\operatorname{tg} \varphi$ môžeme potom vyjadriť v tvare

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \blacksquare$$

Po matematickej stránke vedú obidva príklady na rovnakú limitu, ktorá sa v praxi používa veľmi často a nazýva sa **derivácia funkcie**.

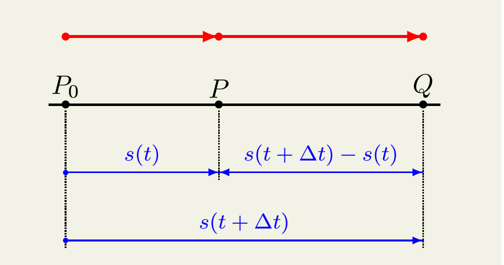
Nech f je funkcia definovaná v nejakom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 deriváciu**, ak existuje (aj nevlastná) limita[1]

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{4.1}$$

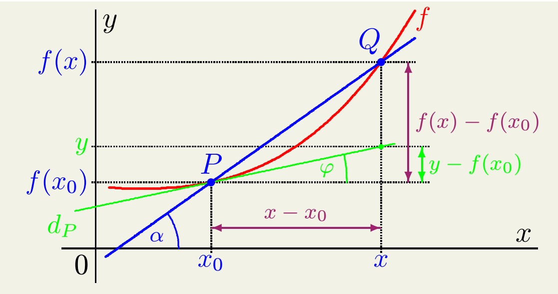
ktorú označujeme $f'(x_0)$, resp. $f'(x)|_{x = x_0}$ a nazývame **derivácia funkcie f v bode x_0**.

Podľa toho, či je limita (4.1) vlastná alebo nevlastná, hovoríme o **vlastnej**[2] alebo **nevlastnej derivácii funkcie f v bode x_0**.

[1] Použijeme substitúciu $h = x - x_0$.
[2] Pokiaľ nebude uvedené ináč, budeme pod pojmom derivácia rozumieť vlastnú deriváciu.



Obr. 4.1.1: Úloha o rýchlosti.



Obr. 4.1.2: Úloha o dotyčnici.

Poznámka 4.1.1.
Ak je reálna funkcia f definovaná vzorcom $y = f(x)$, označujeme deriváciu funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ tiež vzťahmi $y'(x_0)$, resp. $y'(x)|_{x=x_0}$.
Často sa používa označenie pomocou diferenciálov,[3] ktoré zaviedol G. W. Leibniz

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x_0) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}.$$

Tieto vzťahy čítame **derivácia funkcie f podľa x v bode** x_0, resp. stručne $\mathrm{d}f(x_0)$ **podľa** $\mathrm{d}x$. V súvislom texte sa používa zápis $\mathrm{d}f(x_0)/\,\mathrm{d}x$, resp. $\mathrm{d}y(x_0)/\,\mathrm{d}x$.

Príklad 4.1.3.
Uvažujme konštantnú funkciu $f\colon\ y = c$, kde $c \in R$.
Pre všetky $x_0 \in R$ platí $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$ ■

Príklad 4.1.4.
Nech $n \in N$ a nech $x_0 \in R$. Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = x^n$ v bode x_0.

Riešenie.
Na základe vzťahu $x^n - x_0^n = (x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})$ platí

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) =$$
$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \cdots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.\ ■$$

Veta 4.1.1.
Ak má funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu, potom je v bode x_0 spojitá.

Dôkaz.
Na základe vety 3.3.1 stačí ukázať, že platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad \text{t.j.} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0.$$

Keďže $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je konečné a $\lim\limits_{x\to x_0}[x-x_0] = 0$, potom platí

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}[x-x_0] = f'(x_0)\lim_{x\to x_0}[x-x_0] = f'(x_0)\cdot 0 = 0.\ ■$$

Poznámka 4.1.2.
Ako dokazuje príklad 4.1.5, opačná implikácia neplatí. To znamená, že spojitosť funkcie v danom bode nezaručuje existenciu derivácie v tomto bode.

Z geometrického hľadiska (príklad 4.1.2) predstavuje vlastná derivácia funkcie f v bode x_0 smernicu priamky, ktorú nazývame **dotyčnica** (**dotyčnica so smernicou**) **ku grafu funkcie f v bode** $[x_0; f(x_0)]$ a ktorá je určená rovnicou

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.2}$$

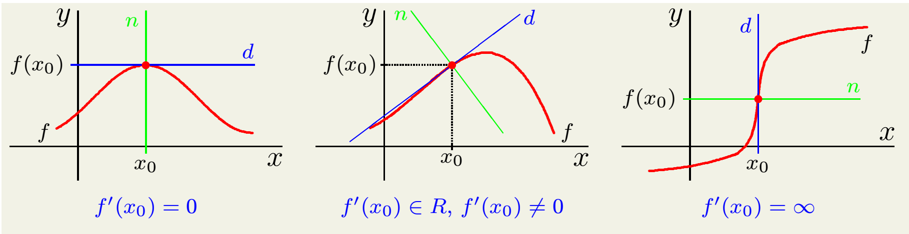
Ak je derivácia $f'(x_0)$ nevlastná a f je spojitá v bode x_0, potom **dotyčnicou bez smernice ku grafu funkcie f v bode** $[x_0; f(x_0)]$ nazývame priamku, ktorá je rovnobežná s osou y, kolmá na os x a prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$, t.j. priamku $x = x_0$.

Normálou ku grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ nazývame priamku, ktorá prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$ a je kolmá na dotyčnicu ku grafu funkcie f v tomto bode.

[3]Bližšie sa im budeme venovať neskôr.

Poznámka 4.1.3.
Normála ku grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ existuje práve vtedy, ak v tomto bode existuje dotyčnica. Ak existuje konečná derivácia $f'(x_0) \neq 0$, potom má normála tvar[4]

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{t.j.} \;\; y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{4.3}$$



Obr. 4.1.3: Dotyčnica a normála k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$.

4.1.2 Jednostranné derivácie a derivácia na množine

Nech f je funkcia definovaná v nejakom ľavom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 deriváciu zľava**, ak existuje limita

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ktorú nazývame **derivácia funkcie f zľava v bode x_0**.

Nech f je funkcia definovaná v nejakom pravom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 deriváciu sprava**, ak existuje limita

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ktorú nazývame **derivácia funkcie f sprava v bode x_0**.

Deriváciu zľava a sprava súhrnne nazývame **jednostranné derivácie funkcie f v bode x_0** a deriváciu nazývame **obojstrannou deriváciou funkcie f v bode x_0**.

Z vlastností jednostranných limít (veta 3.2.11) a z definície jednostranných derivácií priamo vyplýva nasledujúca veta.

Veta 4.1.2.
Funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má v bode x_0 jednostranné derivácie $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Príklad 4.1.5.
Funkcia $f\colon\ y = |x|$ je spojitá v každom bode $D(f)$. V bode 0 nemá deriváciu, pretože

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \blacksquare$$

Príklad 4.1.6.
Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = \operatorname{sgn} x$ v bode $x_0 \in R$.

Riešenie.
Funkcia f je spojitá v každom bode $x_0 \in R - \{0\}$. Pre $x_0 < 0$ platí $f'(x_0) = [-1]' = 0$ a pre $0 < x_0$ platí $f'(x_0) = [1]' = 0$. Pre $x_0 = 0$ platí $f'(0) = \infty$, pretože

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1 - 0}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -(-\infty) = \infty,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty. \blacksquare$$

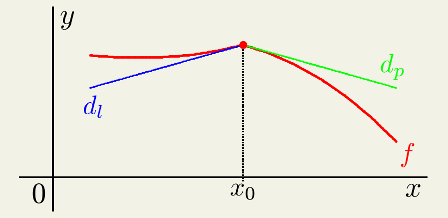
Už sme spomínali, že ak má funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu, potom je v tomto bode spojitá (veta 4.1.1). Analogické tvrdenie platí aj pre jednostranné derivácie.

[4] Priamky $y = kx + a$, $y = qx + b$ (t.j. $kx - y + a = 0$, $qx - y + b = 0$) sú na seba kolmé, ak sú na seba kolmé ich normálové vektory $(k; -1)$, $(q; -1)$. To znamená, ak platí $kq + (-1)(-1) = kq + 1 = 0$.

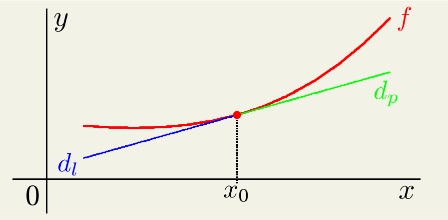
Veta 4.1.3.
Ak má funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu zľava [resp. vlastnú deriváciu sprava], potom je v bode x_0 spojitá zľava [resp. spojitá sprava].

Dôsledok 4.1.3.a.
Ak má funkcia f v bode x_0 obidve jednostranné derivácie vlastné, potom je v x_0 spojitá.

Poznámka 4.1.4.
Z geometrického hľadiska predstavujú jednostranné derivácie funkcie f v bode x_0 smernice tzv. **ľavej** [resp. **pravej**] **poldotyčnice ku grafu funkcie f v bode** $[x_0; f(x_0)]$. To znamená polpriamky vychádzajúce z bodu x_0 a dotýkajúce sa grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ v ľavom [resp. pravom] okolí bodu x_0 (obr. 4.1.4, 4.1.5).



Obr. 4.1.4: Rôznobežné poldotyčnice.



Obr. 4.1.5: Jednostranné poldotyčnice.

Uvažujme reálnu funkciu $y = f(x)$. Označme $M \subset D(f)$ množinu všetkých bodov, v ktorých má funkcia f (konečnú) deriváciu. Ak $M \neq \emptyset$, potom môžeme definovať pre všetky $x_0 \in M$ funkciu g vzťahom $g(x_0) = f'(x_0)$. Funkciu g nazývame **derivácia funkcie f na množine** M a označujeme f', y', resp. $y = f'(x)$, $x \in M$, resp. $\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 4.1.5.
Derivácia funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ je číslo $f'(x_0)$, prípadne $\pm\infty$ a derivácia funkcie f na množine $A \subset D(f)$ je funkcia $y = f'(x)$, $x \in A$.

Množina M, na ktorej je definovaná funkcia f' je obyčajne interval alebo zjednotenie intervalov. Derivácia funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, podobne ako spojitosť, znamená obojstrannú deriváciu $f'(x)$ pre všetky $x \in (a\,;\,b)$ a jednostranné derivácie $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Z definície derivácie funkcie f na množine M a z viet 4.1.1 a 4.1.3 vyplýva priamo nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.1.4.
Ak má funkcia f na množine M deriváciu f', potom je na množine M spojitá.

Príklad 4.1.7.
Vypočítajte derivácie funkcií $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{e}^x$ na množine R.

Riešenie.
Na základe známych súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}, \qquad \cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}.$$

a vzťahu $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h/2)}{h/2} = \begin{bmatrix} h/2 = z \\ z \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$ pre všetky $x \in R$ platí

$$[\sin x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{2\,\frac{h}{2}} = \cos x,$$

$$[\cos x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin \frac{2x+h}{2}}{2\,\frac{h}{2}} = -\sin x,$$

$$[\mathrm{e}^x]' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x\,. \ \blacksquare$$

4.1.3 Základné vety pre výpočet derivácií

Pri praktickom výpočte derivácií, t.j. pri **derivovaní** rôznych funkcií spravidla nepoužívame definíciu. Používame rôzne vzorce a pravidlá, z ktorých si niektoré odvodíme.

Veta 4.1.5.
Nech majú funkcie f, g derivácie na množine $M \neq \emptyset$ a nech $c \in R$.
Potom existujú derivácie funkcií cf, $f \pm g$, fg na množine M a derivácia funkcie f/g na množine $M_1 = \{x \in M\,;\, g(x) \neq 0\}$. Navyše pre všetky $x \in M$, resp. $x \in M_1$ platí:

a) $(cf)'(x) = cf'(x)$,

b) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,

b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

d) $\left[\dfrac{f}{g}\right]'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dôkaz.
a), b) Vyplýva priamo z definície.
c) Nech $x \in M$. Potom z definície derivácie vyplýva

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0} \left[f(x)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

d) Nech $x \in M_1$, potom platí

$$\left[\frac{1}{g}\right]'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h\, g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Z toho na základe časti c) vyplýva

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \left[f\frac{1}{g}\right]'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.6.
Vzorce z predchádzajúcej vety (vrátane dôkazu) zvykneme stručne zapisovať

$$(cf)' = cf', \quad (f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{-g'}{g^2}, \quad \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Príklad 4.1.8.
Vypočítajte derivácie funkcií $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$.

Riešenie.
Pre všetky reálne $x \neq \pi/2 + k\pi$, kde $k \in Z$, platí

$$[\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]' \cos x - \sin x [\cos x]'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x[-\sin x]}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Analogicky pre všetky reálne $x \neq k\pi$, kde $k \in Z$, platí

$$[\operatorname{cotg} x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{[\cos x]' \sin x - \cos x [\sin x]'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}. \blacksquare$$

Príklad 4.1.9.
Nájdite rovnicu priamky, ktorá je dotyčnicou grafu funkcie $f\colon\ y = x/(x-1)$ a je rovnobežná s priamkou $x + y - 2 = 0$.

Riešenie.
Pre všetky $x \in D(f) = R - \{1\}$ platí

$$f'(x) = \left[\frac{x}{x-1}\right]' = \frac{1 \cdot (x-1) - x(1-0)}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Smernica priamky $x + y - 2 = 0$, t.j. $y = -x + 2$ je $k = -1$

Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má rovnicu $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a smernicu $k = f'(x_0)$. Takže hľadáme $x_0 \in D(f)$ tak, aby

$$f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1, \quad \text{t.j.} \quad (x_0-1)^2 = 1.$$

Táto rovnica má dve riešenia $x_0 = 0$, resp. $x_0 = 2$. Z toho vyplývajú dva dotykové body $[0; 0]$, resp. $[2; 2]$ a teda aj dve dotyčnice, ktorých rovnice sú

$$y = 0 - 1(x - 0) = -x, \quad \text{resp.} \quad y = 2 - 1(x - 2) = 4 - x. \blacksquare$$

Veta 4.1.6 (O derivácii inverznej funkcie).
Nech $y = f(x)$ je spojitá a rýdzomonotónna funkcia na intervale $I \subset R$.
Nech x_0 je vnútorný bod intervalu I a nech existuje $f'(x_0) \neq 0$. Označme $y_0 = f(x_0)$.
Potom inverzná funkcia $x = f^{-1}(y)$ má deriváciu v bode y_0 a platí

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\bigg|_{x_0=f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dôkaz.
Z vety 3.3.13 vyplýva, že funkcia f je prostá a teda inverzná funkcia f^{-1} existuje.
Ak použijeme substitúciu $y = f(x)$, t.j. $x = f^{-1}(y)$, potom z definície derivácie vyplýva

$$[f^{-1}]'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.7.
Ak je podmienka $f'(x_0) \neq 0$ splnená pre všetky $x_0 \in I$, potom môžeme zjednodušene písať

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \qquad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}}.$$

Príklad 4.1.10.
a) Funkcia $f\colon\ y = \mathrm{e}^x$ je na R spojitá a rastúca. Pre všetky $x \in R$ platí $f'(x) = \mathrm{e}^x \neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \ln y$, $y > 0$ potom platí

$$[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[\mathrm{e}^x]'} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

b) Funkcia $f\colon\ y = \sin x$ je na $(-\pi/2\,; \pi/2)$ spojitá, rastúca a platí $f'(x) = \cos x > 0$.
Potom $\cos x = \sqrt{1 - [\sin x]^2}$ a pre deriváciu funkcie $f^{-1}\colon\ x = \arcsin y$, $y \in (-1\,; 1)$ platí

$$[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin\arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

c) Funkcia $f\colon\ y = \cos x$ je na $(0\,; \pi)$ spojitá, klesajúca a $f'(x) = -\sin x < 0$.
Keďže $\sin x = \sqrt{1 - [\cos x]^2}$, $x \in (0\,; \pi)$, potom pre $f^{-1}\colon\ x = \arccos y$, $y \in (-1\,; 1)$ platí

$$[\arccos y]' = \frac{1}{[\cos x]'} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos\arccos y]^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

d) Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$ je na $(-\pi/2\,; \pi/2)$ spojitá, rastúca a $f'(x) = \cos^{-2} x \neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \operatorname{arctg} y$, $y \in R$ platí

$$[\operatorname{arctg} y]' = \frac{1}{[\operatorname{tg} x]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{[\operatorname{tg}\operatorname{arctg} y]^2 + 1} = \frac{1}{y^2+1}.$$

e) Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$ je na $(0\,; \pi)$ spojitá, klesajúca a $f'(x) = -\sin^{-2} x \neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \operatorname{arccotg} y$, $y \in R$ platí

$$[\operatorname{arccotg} y]' = \frac{1}{[\operatorname{cotg} x]'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{1 + [\operatorname{cotg}\operatorname{arccotg} y]^2} = \frac{-1}{y^2+1}. \blacksquare$$

Veta 4.1.7 (O derivácii zloženej funkcie).
Nech $F(x) = g(f(x))$, $x \in M \subset R$ je zložená funkcia s vnútornou zložkou $u = f(x)$, $x \in M$ a vonkajšou zložkou $y = g(u)$, $u \in M_1$, kde $f(M) \subset M_1$. Nech $x_0 \in M$, $u_0 = f(x_0)$.
Ak existujú derivácie $f'(x_0)$, $g'(u_0)$, potom tiež existuje derivácia $F'(x_0)$ a platí

$$F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0).$$

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že existujú vlastné limity

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad g'(u_0) = \lim_{u \to u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0}.$$

Ak použijeme substitúciu $u = f(x)$, potom z definície derivácie a z vety 3.2.9 vyplýva

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{u \to u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \blacksquare$$

Poznámka 4.1.8.
Ak existujú derivácie f' na M a g' na M_1, potom môžeme zjednodušene písať

$$F'(x) = [g(f)]'(x) = g'(u) \cdot f'(x), \qquad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Príklad 4.1.11.
Vypočítajte deriváciu funkcie $F\colon\ y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1\,;\,1)$.

Riešenie.
Ak označíme $f\colon\ u = 1 - x^2$, $x \in (-1\,;\,1)$ a $g\colon\ y = \sqrt{u}$, $u \in (0\,;\,\infty)$, potom funkciu F môžeme zapísať v tvare $F(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2)$.
Pre derivácie f', g' platí

$$f'(x) = \left[1 - x^2\right]' = -2x,\ x \in (-1\,;\,1)\,, \quad g'(u) = \left[u^{1/2}\right]' = \frac{u^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{u}},\ u \in (0\,;\,\infty)\,.$$

Z toho vyplýva, že pre $f(x) \neq 0$, t.j. $x \in (-1\,;\,1)$ platí

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.9.
Pri praktickom derivovaní zložených funkcií (aj viacnásobne zložených) výsledok zvyčajne píšeme priamo a jednotlivé zložky nevypisujeme.

Príklad 4.1.12.
a) Funkciu $f\colon\ y = a^x$, $x \in R$, kde $a > 0$, $a \neq 1$ môžeme derivovať ako zloženú funkciu

$$[a^x]' = \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x \ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

b) Funkciu $f\colon\ y = x^a$, $x > 0$, kde $a \in R$ môžeme tiež derivovať ako zloženú funkciu

$$[x^a]' = \left[\mathrm{e}^{\ln x^a}\right]' = \left[\mathrm{e}^{a \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{a \ln x} \cdot [a \ln x]' = \mathrm{e}^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

c) Pre deriváciu funkcie $f\colon\ y = x^x$, $x > 0$ platí

$$[x^x]' = \left[\mathrm{e}^{\ln x^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x \ln x}\right]' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x [1 + \ln x]. \blacksquare$$

Na záver uvedieme jeden dôsledok vety o derivácii zloženej funkcie, ktorý môže v mnohých prípadoch zjednodušiť derivovanie zložitejších funkcií.

Dôsledok 4.1.7.a (O logaritmickej derivácii).
Nech $y = f(x)$, $x \in M$ je reálna funkcia. Nech $x_0 \in M$ je také, že existuje $f'(x_0)$.
Ak $f(x_0) > 0$, potom platí $f'(x_0) = f(x_0) \cdot [\ln f(x_0)]'$.

Dôkaz.
Ak označíme $g\colon u = \ln y$, potom funkcia $F\colon u = g(f(x)) = \ln f(x)$ spĺňa predpoklady vety 4.1.7. Potom existuje derivácia $F'(x_0) = [\ln f(x_0)]'$ a platí

$$[\ln f(x_0)]' = \frac{1}{f(x_0)} \cdot f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}, \qquad \text{t.j.} \quad f'(x_0) = f(x_0) \cdot [\ln f(x_0)]'. \ \blacksquare$$

Výraz $[\ln f(x_0)]' = f'(x_0)/f(x_0)$ nazývame **logaritmická derivácia funkcie f v bode x_0**. Ak sú predpoklady dôsledku splnené pre všetky $x_0 \in M$, potom hovoríme o **logaritmickej derivácii funkcie f na množine M**.

Príklad 4.1.13.
Pre funkcie z príkladu 4.1.12 pomocou logaritmického derivovania platí:

a) Pre $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí $[a^x]' = a^x\,[\ln a^x]' = a^x\,[x \ln a]' = a^x \ln a$.

b) Pre $x > 0$, $a \in R$ platí $[x^a]' = x^a[\ln x^a]' = x^a[a \ln x]' = x^a a/x = ax^{a-1}$.

c) Pre $x > 0$ platí $[x^x]' = x^x[\ln x^x]' = x^x[x \ln x]' = x^x[\ln x + x/x] = x^x[1 + \ln x]$. $\blacksquare$

Príklad 4.1.14.
Nech f, g sú reálne funkcie definované na množine $M \subset R$. Ak pre všetky $x \in M$ platí $f(x) > 0$, potom na množine M má zmysel funkcia $F = f^g$. Pre jej deriváciu platí

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \left[g(x) \ln f(x)\right]' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right]. \ \blacksquare$$

4.1.4 Derivovanie elementárnych funkcií

Nájsť deriváciu danej funkcie v tvare analytického vzorca je pomerne častá a dôležitá úloha pri riešení mnohých problémov nielen v matematickej analýze, ale aj v praxi. Základom týchto vzorcov sú elementárne funkcie a ich derivácie.

Na záver tejto časti zhrnieme vzorce derivácií základných elementárnych funkcií do tabuľky 4.1.1. Pre praktické potreby derivovania je nevyhnutné si tieto vzorce zapamätať.

Príklad 4.1.15.
Vypočítajte derivácie funkcií $y = \log_a x$ $x > 0$ a $y = \log_a |x|$, $x \neq 0$, kde $a > 0$, $a \neq 1$.

Riešenie.
Pre $x > 0$ platí $[\log_a x]' = \left[\dfrac{\ln x}{\ln a}\right]' = \dfrac{[\ln x]'}{\ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\;[\log_a |x|]' = [\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
Pre $x < 0$ platí $[\log_a |x|]' = [\log_a (-x)]' = \dfrac{1}{-x \ln a} \cdot (-x)' = \dfrac{-1}{x \ln a} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x \ln a}$. $\blacksquare$

Príklad 4.1.16.
Pre všetky $x \in R$ platí $[\sinh x]' = \cosh x$, $[\cosh x]' = \sinh x$, pretože

$$\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Zo vzťahu $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ vyplýva, že pre všetky $x \in R$, resp. $x \neq 0$ platí

$$[\operatorname{tgh} x]' = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{[\cosh x]^2} = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{[\sinh x]^2} = \frac{-1}{\sinh^2 x}. \ \blacksquare$$

Príklad 4.1.17.
Pre derivácie hyperbolometrických funkcií $x = \operatorname{argsinh} y$, $y \in R$, $x = \operatorname{argcosh} y$, $y \in (1\,;\,\infty)$, $x = \operatorname{argtgh} y$, $y \in (-1\,;\,1)$, $x = \operatorname{argcotgh} y$, $y \in (-\infty\,;\,-1) \cup (1\,;\,\infty)$ platí

$$[\operatorname{argsinh} y]' = \frac{1}{[\sinh x]'} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+[\sinh \operatorname{argsinh} y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$[\operatorname{argcosh} y]' = \frac{1}{[\sinh x]'} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{[\cosh \operatorname{argcosh} y]^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

$$[\operatorname{argtgh} y]' = \frac{1}{[\operatorname{tgh} x]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{1 - [\operatorname{tgh}(\operatorname{argtgh} y)]^2} = \frac{1}{1-y^2}.$$

$$[\operatorname{argcotgh} y]' = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} x]'} = \frac{-1}{\frac{1}{\sinh^2 x}} = \frac{-1}{[\operatorname{cotgh}(\operatorname{argcotgh} y)]^2 - 1} = \frac{-1}{y^2-1} = \frac{1}{1-y^2}. \blacksquare$$

Vzorec	podmienky platnosti	Vzorec	podmienky platnosti
$[c]' = 0,$	$x \in R,\ c \in R$	$[x]' = 1,$	$x \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1},$	$x \in R,\ n \in N$	$[x^a]' = ax^{a-1},$	$x > 0,\ a \in R$
$[e^x]' = e^x,$	$x \in R$	$[a^x]' = a^x \ln a,$	$x \in R,\ a > 0$
$[\ln x]' = \frac{1}{x},$	$x > 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x},$	$x \neq 0$	$[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\sin x]' = \cos x,$	$x \in R$	$[\cos x]' = -\sin x,$	$x \in R$
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$	$[\operatorname{cotg} x]' = \frac{-1}{\sin^2 x},$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1\,;\,1)$	$[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1\,;\,1)$
$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$	$[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2},$	$x \in R$
$[\sinh x]' = \cosh x,$	$x \in R$	$[\cosh x]' = \sinh x,$	$x \in R$
$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x},$	$x \in R$	$[\operatorname{cotgh} x]' = \frac{-1}{\sinh^2 x},$	$x \neq 0$
$[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$	$x \in R$	$[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$x > 1$
$[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in (-1\,;\,1)$	$[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in R - \langle -1\,;\,1 \rangle$

Tab. 4.1.1: Derivácie základných elementárnych funkcií.

Cvičenia

4.1.1. Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$ v bode x_0:

a) $y = x^2 + 3,\ x_0 = 0,$ b) $y = \cos 2x,\ x_0 = \pi/4,$ c) $y = (x-1)^{-1},\ x_0 = 2,$
d) $y = x(x+2)^2,\ x_0 = 1,$ e) $y = \sin 2x,\ x_0 = \pi/4,$ f) $y = x^3 \sin(x-\pi),\ x_0 = \pi.$

4.1.2. Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$:

a) $y = 2x^2 - 5,$ b) $y = \sqrt{x^2+1},$ c) $y = \sqrt{x-1},$ d) $y = x - x^2,$
e) $y = \operatorname{cotg} x,$ f) $y = 2 - 3x,$ g) $y = (x-1)^{-1},$ h) $y = e^{-x}.$

4.1.3. Nech $f\colon\ y = 2x^2 + 1$. Nájdite všetky body, pre ktoré platí $f(x) = f'(x)$.

4.1.4. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = 2^{-x^2},$ b) $y = e^{-\cos x},$ c) $y = \sqrt[4]{x},$ d) $y = \sqrt[3]{x} + 1,$ e) $y = 2^{\operatorname{tg} x},$
f) $y = x^{(e^x)},$ g) $y = x^{\sin x},$ h) $y = x^{\ln x},$ i) $y = e^{\operatorname{tgh} x},$ j) $y = [\ln x]^x,$
k) $y = e^{1/x},$ l) $y = e^{-1/x},$ m) $y = e^{x^2-1},$ n) $y = x\sqrt{x},$ o) $y = \sqrt[3]{\cos x},$
p) $y = e^{\sqrt{x}},$ q) $y = e^{\operatorname{arctg} x},$ r) $y = x^{x+1},$ s) $y = x^{(x^x)},$ t) $y = (x^x)^x,$
u) $y = \frac{\sqrt[5]{4x}}{5},$ v) $y = \frac{1}{\sin^2 x},$ w) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}},$ x) $y = \frac{1}{\cos x},$ y) $y = \frac{\cos^2 x}{\cos x^2}.$

4.1.5. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$, b) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} e^x}$, c) $y = \dfrac{3^x}{2^x}$, d) $y = \dfrac{e^x}{x^3}$, e) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$,
f) $y = x^5 e^x$, g) $y = \operatorname{tg}^5 x$, h) $y = \sin x^2$, i) $y = \sqrt{e^{5x}}$, j) $y = e^{\sin x}$,
k) $y = |x^3|$, l) $y = x\,|x|$, m) $y = \lfloor x \rfloor$, n) $y = 3^{2x}$, o) $y = |\cos x|$,
p) $y = 3^{\operatorname{cotg} x}$, q) $y = x^{\sqrt{x}}$, r) $y = x^{\cos x}$, s) $y = x^{x^2+1}$, t) $y = \ln x^3$,
u) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, v) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$, w) $y = \dfrac{1}{e^{2x}}$, x) $y = \dfrac{1}{\ln^2 x}$, y) $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

4.1.6. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$, b) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$, d) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$,
e) $y = e^{-\cos^2 x}$, f) $y = \ln \cos x$, g) $y = x^{-5} + x^{-7}$, h) $y = \sqrt{x^5} - \sqrt[3]{x^4}$,
i) $y = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$, j) $y = \dfrac{x \ln x}{1 + \ln x}$, k) $y = \ln \left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right|$, l) $y = \dfrac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$,
m) $y = \ln\,[1 + x^2]$, n) $y = [x^2 - 1]^3$, o) $y = e^{-x} + e^{-x^2}$, p) $y = x^5 [\ln x - 1]$,
q) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, r) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, s) $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, t) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$,
u) $y = (1 - 2x)^4$, v) $y = \ln^2 (x+1)$, w) $y = \ln\,(x^2 + 1)$, x) $y = \ln\,[1 - \sqrt{x}]$.

4.1.7. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \sin \dfrac{1}{x^2}$, b) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$, c) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, d) $y = \dfrac{1 - \sin x}{\sin x + \cos x}$,
e) $y = e^{\sin x + \cos x}$, f) $y = \sqrt{1 - x^4}$, g) $y = \operatorname{cotg} \sqrt{x}$, h) $y = (1 - x^2)^{20}$,
i) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, j) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$, k) $y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}}$, l) $y = \dfrac{x^3}{1+x+x^2}$,
m) $y = x^2 e^{-1/x}$, n) $y = x^2 e^x \sin x$, o) $y = x\, e^{-x^2}$, p) $y = \operatorname{arccotg} \sqrt{x}$,
q) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, r) $y = \dfrac{2x \sin x}{x^2 - 1}$, s) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$, t) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,
u) $y = x\, e^{-x^2+1}$, v) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, w) $y = x \ln x - 1$, x) $y = e^{\sqrt{x}} \sqrt{x-1}$.

4.1.8. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \operatorname{tg} \dfrac{1+x}{x}$, b) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$, c) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$, d) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$,
e) $y = \ln^4 [x^2 + 1]$, f) $y = \ln |\sin 2x|$, g) $y = x \sinh x$, h) $y = \ln \operatorname{arccotg} x^2$,
i) $y = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$, j) $y = \ln \dfrac{x^8 - 1}{x^8 + 1}$, k) $y = \arccos \ln \dfrac{1}{x}$, l) $y = \arccos \dfrac{3x-1}{4}$,
m) $y = [\sin x]^{\cos x}$, n) $y = [\cos x]^{\sin x}$, o) $y = [\cosh x]^{\ln x}$, p) $y = [x^2 + 1]^{\operatorname{arctg} x}$,
q) $y = \operatorname{argsinh} \dfrac{x^2}{4}$, r) $y = \dfrac{x}{1 + e^{-x}}$, s) $y = \dfrac{3 \operatorname{cotgh} x}{\ln\,(x+1)}$, t) $y = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2}$,
u) $y = [\operatorname{tg} x]^{\operatorname{cotg} x}$, v) $y = 3^{\ln [x^2+x+1]}$, w) $y = x^2 \ln x - x^3$, x) $y = x + 5 \cos^2 x$.

4.1.9. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \arccos \ln x$, b) $y = \ln \sin e^{2x}$, c) $y = |x^2 - 1|$, d) $y = \arcsin \ln x$,
e) $y = x \arcsin x$, f) $y = e^x \cos x$, g) $y = (x-1)\, e^x$, h) $y = e^x \arcsin x$,
i) $y = \sqrt{|x-1|}$, j) $y = |x - 2|$, k) $y = x \operatorname{cotg} x$, l) $y = \ln \ln \ln \ln x$,
m) $y = \ln |x^2 - 1|$, n) $y = \ln\,(x^2 - 1)$, o) $y = \operatorname{tgh} x - x$, p) $y = \ln \arcsin 5x$,
q) $y = \ln \sin x$, r) $y = \ln \arcsin x$, s) $y = \operatorname{argtgh} \operatorname{tg} x$, t) $y = \operatorname{arccotg} \ln x$,
u) $y = \dfrac{\operatorname{argsinh} x}{x}$, v) $y = \dfrac{x^2}{\cosh x}$, w) $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, x) $y = \operatorname{arccotg} \ln \dfrac{1}{x}$.

4.1.10. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x}$, b) $y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$, c) $y = 7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x$,
d) $y = \dfrac{4x+5}{(x^3 + 4x - 5)^2}$, e) $y = \operatorname{argcosh} \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, f) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x}$.

g) $y = 5\sin^2 x - 2\cos x^3$,
h) $y = \sqrt[3]{x^2+3x+2}$,
i) $y = (x^3+7x^2-x+1)^4$,
j) $y = (x^3-2)\left[\frac{1}{x^2}+2\right]$,
k) $y = 5x\sin 4x - \frac{\ln x}{2x^3}$,
l) $y = \frac{1}{2-x} - \operatorname{arctg}(x-2)$,
m) $y = x^6\ln 2 - \sin x$,
n) $y = x^6\ln 2 - \sin 10$,
o) $y = (1-\sqrt{x})(1+x)$,
p) $y = \frac{\sin x + \cos x}{2\sin 2x}$,
q) $y = \frac{x\operatorname{arctg} 2x}{x^2-4}$,
r) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$,
s) $y = x\sin x + \cos x$,
t) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$,
u) $y = \mathrm{e}^x[x^3+x^2-2x-3]$,
v) $y = \frac{x^3}{1+x^6} - \operatorname{arctg} x^3$,
w) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$,
x) $y = \ln\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

4.1.11. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = x - \sin x\cos x$,
b) $y = x^2\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x^2}$,
c) $y = \mathrm{e}^{-x}[x^4+x^2+1]$,
d) $y = \arcsin^2\frac{1}{x-1}$,
e) $y = \frac{\sin x - \sinh x}{\cos x - \cosh x}$,
f) $y = \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{1+\sin x}$,
g) $y = \ln[x+\sqrt{x^2+1}]$,
h) $y = \sin\sin\sin\sin x$,
i) $y = x + \sqrt[2]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x}$,
j) $y = \operatorname{argtgh}\frac{2x}{x^2+1}$,
k) $y = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x^2+1}$,
l) $y = \frac{1}{x^3+1} + \ln\frac{x^3}{x^3+1}$,
m) $y = \ln^2 x - \ln\ln x$,
n) $y = \sin\cos\sin\cos x$,
o) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$,
p) $y = \frac{\operatorname{argcotgh} x}{1-x^2}$,
q) $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$,
r) $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$,
s) $y = |x-1| + |x-2|$,
t) $y = \ln|x^2+2x+3|$,
u) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$,
v) $y = \operatorname{arccotg}\frac{3\operatorname{tg} x + 2}{x}$,
w) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \operatorname{cotg} x$,
x) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x} + \frac{\arccos x}{\arcsin x}$.

4.1.12. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \operatorname{arccotg}\operatorname{tg} x$,
b) $y = \operatorname{arctg}\operatorname{cotg} x$,
c) $y = \arcsin\sin x$,
d) $y = \ln\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-3}$,
e) $y = \ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$,
f) $y = \sqrt{\frac{3\sin x - 2\cos x}{5}}$,
g) $y = \operatorname{cotg}\operatorname{arctg} x$,
h) $y = \operatorname{tg}\operatorname{arccotg} x$,
i) $y = \ln\cos\sqrt{x^2+1}$,
j) $y = \frac{1}{3\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}$,
k) $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,
l) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}[3\ln x - 2]$,
m) $y = \arcsin\cos x$,
n) $y = \sqrt{\operatorname{cotg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}$,
o) $y = x\sin[\ln x - \pi]$,
p) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,
q) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$,
r) $y = \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$,
s) $y = \arccos\sqrt{x+1}$,
t) $y = \sqrt{\cos x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$,
u) $y = \sqrt{1+\arcsin x}$,
v) $y = \operatorname{arccotg}\operatorname{cotg}^2 x$,
w) $y = \operatorname{arccotg}\operatorname{tg}^2 x$,
x) $y = \ln\left[x+1+\sqrt{1+x^2}\right]$,

4.1.13. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \frac{x\sqrt{2+x^2}}{2} + \ln\left[x+\sqrt{2+x^2}\right]$,
b) $y = \ln[x^2+x+1] + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$,
c) $y = \sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$,
d) $y = \ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$,
e) $y = (x+1)\sqrt{x^2+2\sqrt[3]{x^2+3}}$,
f) $y = \operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 4\ln\cos x$,
g) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$,
h) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2}$,
i) $y = 2x - (1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}$,
j) $y = -\frac{x+1}{2} + \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x$,
k) $y = \sin^2 2x + [\cos^2 x - \sin^2 x]^2$,
l) $y = x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$,
m) $y = \frac{2\cos 2x}{3} + \frac{\cos x\sin^2 x}{3}$,
n) $y = x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$,
o) $y = \frac{1}{x+1} + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$,
p) $y = \frac{\sqrt{x-x^2}}{2} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$,
q) $y = (x^2+x+1)(x^3+x+1)$,
r) $y = (x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)$,
s) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$,
t) $y = \ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$,

u) $y = \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$,
v) $y = \ln \dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$,
w) $y = \ln \arcsin x + \arcsin \ln x$,
x) $y = x \ln [x - \sqrt{x^2-1}] + \sqrt{x^2-1}$,
y) $y = \dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$,
z) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$.

4.1.14. Určte jednostranné derivácie $f'_-(0)$, $f'_+(0)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:
a) $y = |\sin x|$,
b) $y = |\sin x^2|$,
c) $y = \sqrt{\sin x^2}$,
d) $y = \lfloor x \rfloor \sin x$,
e) $y = \begin{cases} x^2 \sin x^{-1}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \end{cases}$
f) $y = \begin{cases} x \sin x^{-1}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \end{cases}$
g) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ \ln (x+1), & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$
h) $y = \begin{cases} 1-x, & \text{pre } x \leq 0, \\ e^{-x}, & \text{pre } x > 0. \end{cases}$

4.1.15. Pomocou inverznej funkcie vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$:
a) $y = \sqrt[4]{x}$,
b) $y = \log_{10} x$,
c) $y = \sqrt[5]{x} + 1$,
d) $y = \log_2 x - 1$.

4.1.16. Nech f je reálna funkcia. Dokážte, že platí:
a) Ak f je nepárna, potom f' je párna.
b) Ak f je párna, potom f' je nepárna.
c) Ak f je periodická s periódou p, potom f' je periodická s periódou p.

4.1.17. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode x_0, ak:
a) $y = x^2$, $x_0 = 2$,
b) $y = 12/x$, $x_0 = 3$,
c) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$,
d) $y = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$,
e) $y = \ln (x+1)$, $x_0 = 0$,
f) $y = \cos 2x$, $x_0 = 0$,
g) $y = \sin 2x$, $x_0 = 0$,
h) $y = e^x - 1$, $x_0 = 1$,
i) $y = 1/(1+x^2)$, $x_0 = 3$.

4.1.18. Určte $a \in R$ tak, aby sa graf funkcie $y = x$ dotýkal grafu funkcie $y = a^x$. Nájdite bod, v ktorom sa tieto grafy dotýkajú.

4.1.19. Pre aké $a \in R$ má funkcia $y = |x^2 - a|$ deriváciu pre všetky $x \in R$?

4.1.20. Určte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2 + x + 1$ tak, aby prechádzala počiatkom súradnicového systému, t.j. bodom $[0; 0]$.

4.1.21. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola:
a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$,
b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[0; 0]$,
d) prechádzala bodom $[a; b]$, $a, b \in R$.
e) zvierala s osou x uhol $\pi/4$,
f) zvierala s osou y uhol $\varphi \in (0\,; \pi/2\rangle$.

4.1.22. Nájdite rovnicu normály ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola:
a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$,
b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[1; 3]$,
d) zvierala s osou y uhol $\pi/4$.

4.1.23. Určte všetky dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$, ktoré sú rovnobežné s osou x. Určte body, v ktorých sa dotýkajú grafu funkcie f, ak:
a) $y = \sin (x+1)$,
b) $y = \cos 2x$,
c) $y = \ln (x+1)$,
d) $y = x^3 - x$,
e) $y = [\ln x]/x$,
f) $y = \sqrt{1-x^2}$,
g) $y = x \ln x$,
h) $y = e^x / x$.

4.2 Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

4.2.1 Diferenciál a diferencovateľnosť funkcie

Často potrebujeme v matematickej analýze aproximovať (t.j. približne vyjadriť) danú funkciu f nejakou inou, jednoduchšou funkciou g. Žiadame pritom, aby bol rozdiel $|f(x) - g(x)|$ v istom zmysle malý. Ak chceme funkciu f aproximovať iba v nejakom okolí bodu $x_0 \in D(f)$, potom hovoríme o **lokálnej aproximácii**. Veľmi často požadujeme, aby funkcia g bola lineárna.

Predpokladajme, že je funkcia f definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$. Hľadáme nejakú jednoduchú funkciu g, ktorá je spojitá v bode x_0 tak, aby platilo

$$f(x_0) = g(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = 0. \tag{4.4}$$

To znamená, že rozdiel $|f(x) - g(x)|$ konverguje k nule rýchlejšie ako $|x - x_0|$. Geometricky si to môžeme predstaviť tak, že pre $x \in O(x_0)$ sú grafy funkcií f, g „blízko pri sebe“ a v bode $[x_0; f(x_0)]$ sa dotýkajú.

Ako funkcia g sa najčastejšie používa lineárna funkcia, ktorej grafom je priamka. Lineárna funkcia g, ktorej graf prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$ má rovnicu

$$g(x) = f(x_0) + a(x - x_0), \quad \text{kde} \;\; a \in R.$$

Ak položíme $x - x_0 = h$, t.j. $x = x_0 + h$, potom môžeme výraz (4.4) vyjadriť v tvare

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} \right|. \tag{4.5}$$

Vzniká otázka, či existuje $a \in R$ také, že platí vzťah (4.5). To znamená, či existuje lineárna funkcia $\lambda(x) = a(x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\lambda(h) = ah$, $h \in R$, ktorá spĺňa (4.5).

Nech $y = f(x)$, $x \in M$ je reálna funkcia a nech $x_0 \in M$ je vnútorný bod. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 diferenciál**, ak existuje lineárna funkcia $\lambda(h) = ah$, $h \in R$ taká, že platí vzťah (4.5). Lineárnu funkciu λ nazývame **diferenciál funkcie f v bode x_0** a označujeme symbolom $\mathrm{d}f(x_0)$.

Poznámka 4.2.1.
Symbol $\mathrm{d}f(x_0)$ vyjadruje lineárnu funkciu λ argumentu h, resp. x z definície diferenciálu.
Symbol $\mathrm{d}f(x_0)(h)$, t.j. hodnotu funkcie $\lambda(h)$ pre x_0 zapisujeme obyčajne v tvare $\mathrm{d}f(x_0, h)$.

Ak má funkcia f diferenciál v bode x_0, potom ju nazývame **diferencovateľná funkcia v bode x_0**. Ak je funkcia f diferencovateľná (má diferenciál) v každom bode $x_0 \in M$, potom ju nazývame **diferencovateľná funkcia na množine M**.

Poznámka 4.2.2.
Ak je f diferencovateľná na M, potom diferenciál $\mathrm{d}f(x)$ môžeme považovať za funkciu premennej $x \in M$. Lenže $\mathrm{d}f(x)$, t.j. $\mathrm{d}f(x, h)$ je tiež funkcia premennej $h \in R$.
To znamená, že diferenciál funkcie f na množine M predstavuje funkciu $\mathrm{d}f(x, h)$ s dvomi nezávislými premennými $x \in M$, $h \in R$. Stručne ho označujeme $\mathrm{d}f(x)$, $x \in M$, resp. $\mathrm{d}f$.

Veta 4.2.1 (O existencii a jednoznačnosti diferenciálu).
Funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 práve vtedy, ak má v bode x_0 konečnú deriváciu.
Diferenciál funkcie f v bode x_0 je potom jednoznačne určený vzťahom

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h, \quad h \in R. \tag{4.6}$$

Dôkaz.
NP$_\Rightarrow$: Ak existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0, h) = ah$, potom zo vzťahu (4.5) vyplýva

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = f'(x_0) - a.$$

To znamená, že existuje konečná derivácia $f'(x_0) = a$ a platí $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$.
Tým je zároveň dokázaná aj jednoznačnosť diferenciálu.
PP$_\Leftarrow$: Ak má funkcia f v bode x_0 konečnú deriváciu $f'(x_0)$, potom platí

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{t.j.} \;\; 0 = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right].$$

Z toho vyplýva, že platí podmienka (4.5)

$$0 = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \right|.$$

To znamená, že $f'(x_0) = a$ a existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$, $h \in R$. ■

Príklad 4.2.1.
Vypočítajte diferenciál funkcie $f\colon\ y = x^3$ v bode $x_0 = 2$.

Riešenie.
Ak použijeme vetu 4.2.1, potom platí

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h = 3x_0^2 h, \quad \text{t.j.} \;\; \mathrm{d}f(2, h) = f'(2)h = 3 \cdot 2^2 h = 12h, \;\; h \in R.$$

K tomuto výsledku môžeme dospieť tiež priamo z definície diferenciálu. Je nutné ale poznamenať, že aj tu prakticky počítame hodnotu $f'(2)$. Zo vzťahu (4.5) vyplýva

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3 - ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8 - ah}{h} = \lim_{h\to 0} [12 + 6h - h^2 - a] = 12 - a.$$

To znamená, že platí $a = 12$, t.j. $\mathrm{d}f(2, h) = 12h$, $h \in R$. ■

Príklad 4.2.2.
Vypočítajte diferenciál identickej funkcie $f(x) = x$, $x \in R$ v ľubovoľnom bode $x_0 \in R$.

Riešenie.
Keďže pre všetky $x_0 \in R$ platí $f'(x_0) = 1$, potom zo vzťahu (4.6) vyplýva

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h = 1 \cdot h = h, \quad \text{t.j.} \quad \mathrm{d}f(x_0, h) = (x_0 + h) - x_0, \ h \in R.$$

To znamená, že $\mathrm{d}f(x_0, h)$ je rovný prírastku premennej x. Takže pre všetky $x_0 \in R$ platí $\mathrm{d}f(x_0) = h$. V praxi sa zvykne diferenciál funkcie $f(x) = x$ označovať $\mathrm{d}x$. ■

Poznámka 4.2.3.
Uvažujme funkciu $y = f(x)$, ktorá je diferencovateľná v bode x_0.
Ak použijeme označenie $\mathrm{d}x = h$ (príklad 4.2.2), potom zo vzťahu (4.6) vyplýva

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h = f'(x_0)\,\mathrm{d}x, \quad \text{t.j.} \quad f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0, h)}{h} = \frac{\mathrm{d}f(x_0, h)}{\mathrm{d}x}, \ h \in R.$$

To znamená, že deriváciu $f'(x_0)$ môžeme chápať ako podiel diferenciálu funkcie a diferenciálu premennej v tomto bode x_0 a má zmysel označenie z poznámky 4.1.1

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}, \quad \text{resp.} \quad f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

4.2.2 Využitie diferenciálu na približné výpočty

Diferenciál reálnej funkcie jednej premennej je dôležitý predovšetkým pri lineárnej aproximácii danej funkcie a pri približnom určovaní funkčných hodnôt tejto funkcie.

Nech $y = f(x)$ je diferencovateľná funkcia v bode x_0. Ak označíme

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = f(x_0 + h) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0, h),$$

potom zo vzťahu (4.5) vyplýva

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0. \tag{4.7}$$

Pre prírastok funkcie f od bodu x_0 po x_0+h potom platí

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0, h) + \omega(h) = f'(x_0)h + \omega(h).$$

Výraz $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$ nazývame **hlavná časť prírastku funkcie** a výraz $\omega(h)$ nazývame[5] **zvyšok prírastku**. Funkciu f môžeme potom aproximovať v tvare

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{kde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0. \tag{4.8}$$

Ak položíme $h = x - x_0$, t.j. $x = x_0 + h$, potom

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

pričom pre chybu $\omega(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ aproximácie platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0. \tag{4.9}$$

Z geometrického hľadiska predstavuje graf funkcie $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dotyčnicu ku grafu funkcie f, ktorý prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$.

Veta 4.2.2 (O najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii funkcie).
Nech f je diferencovateľná funkcia v bode x_0. Nech $c \in R$ je také, že $c \neq f'(x_0)$. Označme

$$\varphi\colon\ y = f(x_0) + c(x - x_0), \qquad g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Potom existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí

$$|f(x) - g(x)| < |f(x) - \varphi(x)|\,.$$

Dôkaz.
Je zrejmé, že platí $\varphi(x_0) = g(x_0) = f(x_0)$.
Keďže $c \neq f'(x_0)$, potom pre funkciu $\varphi\colon\ y = f(x_0) + c(x - x_0)$ platí

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x) - \varphi(x)}{x - x_0} \right| = \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{c(x - x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(x_0) - c| > 0.$$

[5] Zvyšok prírastku má význam chyby, ktorej sa dopustíme, ak nahradíme prírastok funkcie $\Delta f(x_0, h)$ diferenciálom funkcie $\mathrm{d}f(x_0, h)$.

Zo vzťahu (4.9) vyplýva, že platí
$$0=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right|<\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-\varphi(x)}{x-x_0}\right|.$$
Potom (veta 3.2.7) existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x\in P(x_0)$ platí
$$\frac{|f(x)-g(x)|}{|x-x_0|}=\left|\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right|<\left|\frac{f(x)-\varphi(x)}{x-x_0}\right|=\frac{|f(x)-\varphi(x)|}{|x-x_0|}.$$
Pretože $x\neq x_0$, potom pre všetky $x\in P(x_0)$ platí $|f(x)-g(x)|<|f(x)-\varphi(x)|$. ■

Poznámka 4.2.4.
Z vety 4.2.2 vyplýva, že aproximácia funkcie f pomocou funkcie
$$g\colon\ y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0,x-x_0),\quad x\in P(x_0)$$
je najlepšia zo všetkých lineárnych aproximácií. Táto aproximácia má ale iba lokálny význam v nejakom okolí bodu x_0 (nie na celom definičnom obore).
Ak použijeme označenie $h=x-x_0$, potom môžeme funkciu g zapísať v tvare
$$g\colon\ y=f(x_0)+f'(x_0)h=f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0,h),\quad x_0+h\in P(x_0),\quad \text{t.j.}\ \ h\in P(0).$$

Príklad 4.2.3.
Približne vypočítajte hodnotu $\sqrt[6]{1,06}$.

Riešenie.
Označme $f(x)=\sqrt[6]{x}$ pre $x>0$ a $P(1)$ okolie bodu $x_0=1$ také, že $1,06\in P(1)$.
Potom $f'(x)=[x^{1/6}]'=x^{-5/6}/6$, $x>0$ a pre aproximáciu v okolí $P(1)$ platí
$$g(x)=f(1)+f'(1)(x-1)=1+\frac{1}{6}(x-1)=\frac{x+5}{6},\qquad \text{t.j.}\ \ \sqrt[6]{x}\approx\frac{x+5}{6}.$$
Z toho vyplýva $\sqrt[6]{1,06}\approx(1,06+5)/6=6,06/6=1,01$.
Presnejšia hodnota vypočítaná na kalkulačke je $\sqrt[6]{1,06}=1,0097588$. To znamená, že chyba výpočtu je menšia ako $1,01-1,0097588<0,00025$.

Iné riešenie.
Označme $f(x)=\sqrt[6]{x+1}$ pre $x>-1$, $x_0=0$, $h=0,06$. Nech $P(0)$ je také, že $h\in P(0)$.
Pretože $f'(x)=[(x+1)^{1/6}]'=(x+1)^{-5/6}/6$, $x>-1$, potom v okolí $P(0)$ platí
$$g(h)=f(0)+f'(0)h=1+\frac{h}{6}=\frac{6+h}{6},\qquad \text{t.j.}\ \ \sqrt[6]{1+h}\approx\frac{6+h}{6}.$$
To vedie na rovnaký výsledok $\sqrt[6]{1,06}=\sqrt[6]{1+0,06}\approx(6+0,06)/6=6,06/6=1,01$. ■

Poznámka 4.2.5.
Vzťah $\sqrt[6]{x}\approx(x+5)/6$ má zmysel iba pre hodnoty x nachádzajúce sa v blízkosti bodu 1. Ako dokazuje tabuľka 4.2.2, pri neuváženom použití tohto vzťahu môže chyba približného výpočtu narásť do neprijateľných rozmerov.

x	$\sqrt[6]{x}$	$(x+5)/6$	chyba	x	$\sqrt[6]{x}$	$(x+5)/6$	chyba
$0,1$	$0,6812920$	$0,8500000$	$>0,16870$	$1,3$	$1,0446975$	$1,0500000$	$<0,00531$
$0,3$	$0,8181888$	$0,8833333$	$<0,06515$	$1,5$	$1,0699132$	$1,0833333$	$<0,01343$
$0,5$	$0,8908987$	$0,9166666$	$<0,02577$	$2,0$	$1,1224620$	$1,1666667$	$<0,04421$
$0,7$	$0,9422865$	$0,9500000$	$<0,00772$	$3,0$	$1,2009369$	$1,3333333$	$>0,13239$
$0,8$	$0,9634924$	$0,9666666$	$<0,00312$	$5,0$	$1,3076605$	$1,6666667$	$>0,35900$
$0,9$	$0,9825931$	$0,9833333$	$<0,00075$	10	$1,4677993$	2.5000000	$>1,03220$
$1,1$	$1,0160119$	$1,0166667$	$<0,00066$	20	$1,6475490$	$4,1666667$	$>2,51911$
$1,2$	$1,0308533$	$1,0333333$	$<0,00249$	64	$2,0000000$	$11,500000$	$=9,50000$

Tab. 4.2.2: Výpočet $\sqrt[6]{x}$ pomocou približného vzorca $(x+5)/6$.

Nech y je nejaká veličina závislá od veličiny x podľa vzorca $y=f(x)$, kde f je známa funkcia. Predpokladajme, že sme veličinu x namerali s chybou Δx, ktorá je v porovnaní s x malá. Chybu Δx nazývame **absolútna chyba** nameranej (nezávislej) **veličiny** x. Chybu Δy, ktorú nazývame **absolútna chyba** závislej **veličiny** y môžeme potom vyjadriť ako hodnotu diferenciálu funkcie f v bode x pre $h=\Delta x$.

Nech $P(x)$ je okolie bodu x také, že $x+\Delta x\in P(x)$. Z poznámky 4.2.4 vyplýva

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x, \Delta x), \quad \Delta x\in P(0).$$

Pre absolútnu chybu Δy potom platí

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x = \mathrm{d}f(x, \Delta x). \tag{4.10}$$

Chyby sa spravidlá vyjadrujú v tvare podielov $\delta_x = \Delta x/x$, resp. $\delta_y = \Delta y/y$, ktoré nazývame **relatívne (pomerné) chyby veličín** x, resp. y.

Príklad 4.2.4.
Aká je chyba objemu gule, ak sme jej polomer r namerali s absolútnou chybou Δr?

Riešenie.
Keďže pre objem gule platí $V(r) = 4\pi r^3/3$, potom zo vzťahu (4.10) vyplýva

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V(r, \Delta r) = V'(r)\Delta r = \left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]' \Delta r = \frac{4\pi}{3}3r^2\Delta r = 4\pi r^2\Delta r.$$

Ak označíme relatívnu chybu polomeru $\delta_r = \Delta r/r$, potom platí

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2\Delta r}{4\pi r^3/3} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r.$$

To znamená, že relatívna chyba objemu je trojnásobok relatívnej chyby polomeru. ■

4.2.3 Derivácie vyšších rádov

Nech má funkcia $y = f(x)$, $x\in M$ deriváciu na neprázdnej množine $M_1 \subset M$. Ak má funkcia $y = f'(x)$, $x\in M_1$ deriváciu $[f']'$ na nejakej neprázdnej množine $M_2 \subset M_1$, potom ju nazývame **derivácia druhého rádu** (**druhá derivácia**) **funkcie** f **na množine** M_2 a označujeme f'', resp. $f^{(2)}$. To znamená, že $[f']' = f'' = f^{(2)}$.

Ak má funkcia $y = f''(x)$, $x\in M_2$ deriváciu na neprázdnej množine $M_3 \subset M_2$, potom ju nazývame **derivácia tretieho rádu** (**tretia derivácia**) **funkcie** f **na množine** M_3 a označujeme $[f'']' = f''' = f^{(3)}$. Takto môžeme pokračovať pre $n\in N$, $n\geq 2$.

Predpokladajme, že sme týmto spôsobom definovali deriváciu funkcie f rádu $n-1$ na neprázdnej množine M_{n-1}, ktorú označíme $f^{(n-1)}$. Ak má táto funkcia deriváciu na neprázdnej množine $M_n \subset M_{n-1}$, potom ju nazývame **derivácia** n**-tého rádu** (n**-tá derivácia**) **funkcie** f **na množine** M_n a označujeme $[f^{(n-1)}]' = f^{(n)}$.

Hodnotu $f''(x_0)$ v bode $x_0\in M_2$ nazývame **derivácia druhého rádu** (**druhá derivácia**) **funkcie** f **v bode** x_0 a hodnotu $f'''(x_0)$ v bode $x_0 \in M_3$ nazývame **derivácia tretieho rádu** (**tretia derivácia**) **funkcie** f **v bode** x_0. Hodnotu $f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in M_n$ nazývame **derivácia** n**-tého rádu** (n**-tá derivácia**) **funkcie** f **v bode** x_0.

Poznámka 4.2.6.
Derivácie $f^{(n)}$, $n \in N$, $n \geq 2$ nazývame súhrnne **deriváciami vyššieho rádu** a deriváciu $f' = f^{(1)}$ nazývame **prvou deriváciou** (**deriváciou prvého rádu**).
Niekedy je výhodné aj funkciu f považovať za deriváciu. Vtedy ju nazývame **nultá derivácia** (**derivácia nultého rádu**) **funkcie** f a označujeme $f = f^{(0)}$.

Poznámka 4.2.7.
Z definície vyplýva, že funkcia $y = f(x)$, $x\in M$ má v bode x_0 deriváciu rádu n, $n\in N$, ak existuje prvá derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ v bode x_0, t.j. ak existuje limita

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

To znamená, že funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom okolí bodu x_0.

Výpočet derivácie vyššieho rádu funkcie môže byť vo všeobecnosti veľmi pracný, pretože musíme postupne vypočítať derivácie všetkých nižších rádov počnúc prvou deriváciou. Ako dokazujú nasledujúce príklady, v niektorých prípadoch sa dajú pomerne jednoducho odvodiť všeobecné vzorce pre vyššie derivácie danej funkcie. Vzorce pre n-tú deriváciu niektorých základných elementárnych funkcií sú uvedené v tabuľke 4.2.3.

Príklad 4.2.5.
Vypočítajte n-tú deriváciu $f^{(n)}$, $n\in N$ funkcie $f\colon\ y = x^k$, $x\in R$, $k\in N$.

Riešenie.
Postupným derivovaním dostaneme

$$f'(x) = kx^{k-1},\ f''(x) = k(k-1)x^{k-2},\ \ldots,\ f^{(k-1)}(x) = k(k-1)\cdots 2\cdot x^1,\ x\in R.$$

Potom $f^{(k)}(x) = k!x^0 = k!$ a pre $n > k$, $n\in N$ platí $f^{(n)}(x) = 0$, $x\in R$.
Ak to zhrnieme, pre všetky $n\in N$ a pre všetky $x\in R$ platí

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},\ n < k, \quad f^{(k)}(x) = k!, \quad f^{(n)}(x) = 0,\ n > k. ■$$

Príklad 4.2.6.
Vypočítajte n-té derivácie $(n\in N)$ funkcií $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{e}^x$ na množine R.

Riešenie.
Z príkladu 4.1.7 vyplýva, že pre všetky $n\in N$ a pre všetky $x\in R$ platí $[\mathrm{e}^x]^{(n)}=\mathrm{e}^x$.
Pre funkcie $y=\sin x$, $y=\cos x$ pre všetky $x\in R$ platí

$$[\sin x]'=\cos x,\qquad [\sin x]''=-\sin x,\qquad [\sin x]'''=-\cos x,\qquad [\sin x]''''=\sin x,$$

$$[\cos x]'=-\sin x,\qquad [\cos x]''=-\cos x,\qquad [\cos x]'''=\sin x,\qquad [\cos x]''''=\cos x.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $n=0,1,2,\ldots$, $k\in N$, $x\in R$ platí

$$[\sin x]^{(n)}=[\sin x]^{(n+4)}=[\sin x]^{(n+4k)},\qquad [\cos x]^{(n)}=[\cos x]^{(n+4)}=[\cos x]^{(n+4k)}.\ \blacksquare$$

Vzorec	podmienky platnosti	Vzorec	podmienky platnosti
$[x^k]^{(n)}=0,$	$x\in R,\ k\in N,\ k>n$	$[x^k]^{(n)}=k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},$	$x\in R,\ k\in N,\ k<n$
$[x^n]^{(n)}=n!,$	$x\in R$	$[x^a]^{(n)}=a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n},$	$x>0,\ a\in R$
$[\mathrm{e}^x]^{(n)}=\mathrm{e}^x,$	$x\in R$	$[a^x]^{(n)}=a^x\ln^n a,$	$x\in R,\ a>0$
$[\ln x]^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$	$x>0$	$[\log_a x]^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\ln a},$	$x>0,\ a>0,\ a\neq 1$
$[\ln\lvert x\rvert]^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$	$x\neq 0$	$[\log_a\lvert x\rvert]^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\ln a},$	$x\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1$
$[\sin x]^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right),$	$x\in R$	$[\sinh x]^{(n)}=\begin{cases}\sinh x, & n=2k,\\ \cosh x, & n=2k+1,\end{cases}$	$x\in R,\ k\in N$
$[\cos x]^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right),$	$x\in R$	$[\cosh x]^{(n)}=\begin{cases}\cosh x, & n=2k,\\ \sinh x, & n=2k+1,\end{cases}$	$x\in R,\ k\in N$

Tab. 4.2.3: Derivácie rádu $n\in N$ základných elementárnych funkcií.

Veta 4.2.3 (Leibnizov vzorec).
Nech $n\in N$ a nech majú funkcie f, g na množine M derivácie do rádu n vrátane.
Potom pre n-tú deriváciu $[fg]^{(n)}$ na množine M platí

$$[fg]^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(n-i)}g^{(i)}=\binom{n}{0}f^{(n)}g^{(0)}+\binom{n}{1}f^{(n-1)}g^{(1)}+\cdots+\binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n)}.$$

Dôkaz.
Veta sa dokáže matematickou indukciou. Dôkaz prenechávame na čitateľa.

Príklad 4.2.7.
Vypočítajte n-tú deriváciu funkcie $y=\mathrm{e}^x x^2$, $x\in R$ pre všetky $n\in N$.

Riešenie.
Zo vzťahov $[x^2]'=2x$, $[x^2]''=2$ a z Leibnizovho vzorca vyplýva

$$[\mathrm{e}^x x^2]'=\mathrm{e}^x 2x+\mathrm{e}^x x^2=\mathrm{e}^x(x^2+2x),\qquad [\mathrm{e}^x x^2]''=\mathrm{e}^x 2+2\,\mathrm{e}^x 2x+\mathrm{e}^x x^2=\mathrm{e}^x(x^2+4x+2).$$

Keďže $[x^2]^{(k)}=0$ pre všetky $k\in N$, $k\geq 3$, potom pre $n\in N$, $n\geq 3$ platí

$$[\mathrm{e}^x x^2]^{(n)}=\binom{n}{0}\mathrm{e}^x x^2+\binom{n}{1}\mathrm{e}^x 2x+\binom{n}{2}\mathrm{e}^x 2=\mathrm{e}^x[x^2+2nx+2n(n-1)].\ \blacksquare$$

4.2.4 Pojem diferenciálu vyššieho rádu

Nech má funkcia $y=f(x)$, $x\in M$ vo vnútornom bode $x_0\in M$ konečnú n-tú deriváciu $f^{(n)}(x_0)$. Potom polynóm n-tého stupňa $\varphi(h)=f^{(n)}(x_0)h^n$, $h\in R$ nazývame **diferenciálom n-tého rádu** (**n-tým diferenciálom**) **funkcie f v bode x_0** a označujeme symbolom $\mathrm{d}^n f(x_0,h)$, resp. $\mathrm{d}^n f(x_0)$.

Ak má funkcia f v bode x_0 diferenciál n-tého rádu, potom ju nazývame **diferencovateľná rádu n v bode x_0**. Ak je f diferencovateľná rádu n v každom bode $x_0\in M$, potom ju nazývame **diferencovateľná rádu n na množine M**.

Poznámka 4.2.8.
Pre $n = 1$ je definícia zhodná s definíciou diferenciálu, resp. diferencovateľnej funkcie. To znamená, že pre $n = 1$ platí $\mathrm{d}^1 f(x_0,h) = \mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h,\ h\in R$.
Podobne ako diferenciál prvého rádu, predstavuje diferenciál n-tého rádu $\mathrm{d}^n f(x,h)$ na množine M tiež funkciu s dvomi nezávislými premennými $x\in M,\ h\in R$. Stručne ho označujeme symbolmi $\mathrm{d}^n f(x),\ x\in M$, resp. $\mathrm{d}^n f$.

Poznámka 4.2.9.
Ak označíme $h = x - x_0$, potom môžeme n-tý diferenciál funkcie f v bode x_0 zapísať

$$\mathrm{d}^n f(x, x-x_0) = f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\ x\in R.$$

Ak označíme $h = \mathrm{d}x$, potom z definície diferenciálu n-tého rádu funkcie f vyplýva[6]

$$\mathrm{d}f(x) = f^{(n)}(x_0)[\mathrm{d}x]^n = f^{(n)}(x_0)\,\mathrm{d}x^n, \qquad \text{t.j. } f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ n\in N.$$

Ak uvážime definíciu derivácie vyšších rádov funkcie f, potom pre $n\in N$ platí

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Príklad 4.2.8.
Vypočítajte diferenciál piateho rádu funkcie $f(x) = \ln x,\ x\geq 0$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie.
Pre derivácie funkcie f do piateho rádu platí

$$f'(x) = x^{-1},\quad f''(x) = -x^{-2},\quad f'''(x) = 2x^{-3},\quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4},\quad f^{(5)}(x) = 24x^{-5}.$$

Z toho vyplýva $\mathrm{d}^5 f(1,h) = f^{(5)}(1)h^5 = 24h^5$, resp. $\mathrm{d}^5 f(1) = 24\,\mathrm{d}x^5$. ■

Cvičenia

4.2.1. Vypočítajte diferenciál $\mathrm{d}f(x,h)$, ak je funkcia f definovaná predpisom:
a) $y = x\,\mathrm{e}^x$, b) $y = x^3 2^x$, c) $y = x^{-1}$, d) $y = \arcsin x$,
e) $y = 2^{-\frac{\ln x}{x}}$, f) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, g) $y = \dfrac{x}{1-x}$, h) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$,
i) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$, j) $y = x\ln x$, k) $y = \mathrm{tg}\, x$, l) $y = \mathrm{arctg}\, x$.

4.2.2. Kruhový výsek má polomer $r = 30$ cm a stredový uhol $\varphi = 60°$. Určte približne, ako sa zmení obsah kruhového výseku, ak:
a) r sa zväčší o 1 cm, b) r sa zmenší o 1 cm, c) φ zmenší o $1°$.

4.2.3. Určte absolútnu a relatívnu chybu obsahu kruhu s polomerom r, ak je polomer daný s absolútnou chybou Δr.

4.2.4. Pomocou diferenciálu vypočítajte približne hodnoty:
a) $\cos 61°$, b) $\mathrm{tg}\, 44°$, c) $\ln 0,9$, d) $\sqrt[11]{2000}$, e) $\arcsin 0,54$,
f) $\sqrt[4]{17}$, g) $\sqrt[4]{267}$, h) $\sqrt{82}$, i) $\sqrt[3]{214}$, j) $\mathrm{arctg}\, 0,97$,
k) $1,04^5$, l) $2^{1,002}$, m) $\ln 20$, n) $\log 1001$, o) $\mathrm{arctg}\, 1,05$.

4.2.5. Tiažové zrýchlenie g_h v nadmorskej výške h je určené vzťahom $g_h = gr^2/(r+h)^2$, kde $g = 9,8065\ \mathrm{ms}^{-1}$ je tiažové zrýchlenie pri povrchu zeme a r je polomer zeme (stredný polomer zeme je $r = 6371$ km). Dokážte, že platí $g_h \approx g(1 - 2h/r)$.

4.2.6. Vypočítajte deriváciu tretieho a piateho rádu funkcie $y = f(x)$, ak:
a) $y = x^3 \sin x$, b) $y = x^3 \cos x$, c) $y = x^3 \sin 2x$, d) $y = x^3 \cos 2x$,
e) $y = \mathrm{e}^x \sin x$, f) $y = \mathrm{e}^x \cos x$, g) $y = x^5 \ln x$, h) $y = x\,\mathrm{e}^x \sin x$.

4.2.7. Vypočítajte deriváciu n-tého rádu, $n\in N$, funkcie $y = f(x)$, ak:
a) $y = \sin^2 x$, b) $y = \cos^3 x$, c) $y = x\sin x$, d) $y = x^{n-1}\ln x$,
e) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, f) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, g) $y = \dfrac{x+\ln x}{x}$, h) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$,
i) $y = x\,\mathrm{e}^x$, j) $y = x\ln x$, k) $y = x + \ln x$, l) $y = x(\ln x - 1)$.

4.2.8. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^x \cos x + c_2\,\mathrm{e}^x \sin x + c_3\,\mathrm{e}^{-x}\cos x + c_4\,\mathrm{e}^{-x}\sin x,\ x\in R$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} + 4y = 0$.

4.2.9. Nech $a > 0$. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^{ax} + c_2\,\mathrm{e}^{-ax} + c_3\cos ax + c_4 \sin ax,\ x\in R$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} - a^4 y = 0$.

[6] Pre zjednodušenie sa používa zápis $[\mathrm{d}x]^n = \mathrm{d}x^n$.

4.3 Aplikácie diferenciálneho počtu

4.3.1 Vety o strednej hodnote funkcie

Vety o strednej hodnote funkcie patria spolu s **l'Hospitalovým pravidlom** medzi najdôležitejšie a najčastejšie používané aplikácie diferenciálneho počtu. Vety o strednej hodnote funkcie sú tri a nazývajú sa Rolleho, Lagrangeova a Cauchyho.

Veta 4.3.1.
Ak má f vo vnútornom bode $c \in M$ lokálny extrém[7] a existuje $f'(c)$, potom $f'(c) = 0$.

Dôkaz.
Ak $f(c) = \min f(x)$, $x \in M$, potom pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geq f(c)$. Ďalej platí

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \text{pre } x < c, \qquad \text{t.j.} \quad f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \text{pre } x > c, \qquad \text{t.j.} \quad f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Z toho vyplýva $f'(c) = f'_-(c) \leq 0 \leq f'_+(c) = f'(c)$, t.j. $f'(c) = 0$.
V prípade $f(c) = \max f(x)$, $x \in M$ je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi. ■

Veta 4.3.2 (Rolleho).
Nech[8] pre funkciu f definovanú na uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ platí:

i) je spojitá na $\langle a\,;\,b\rangle$, ii) má deriváciu (aj nevlastnú) na $(a\,;\,b)$, iii) $f(a)=f(b)$.

Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a\,;\,b)$ taký, že $f'(c) = 0$.

Dôkaz.
Zo spojitosti funkcie f na uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ a z Weierstrasseho vety 3.3.10 vyplýva, že funkcia f nadobúda na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ svoje minimum m a maximum M. Potom existujú $c_1, c_2 \in \langle a\,;\,b\rangle$ také, že pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ platí

$$f(c_1) = m \leq f(x) \leq M = f(c_2).$$

Pre body $c_1, c_2 \in \langle a\,;\,b\rangle$ môžu nastať práve dva prípady:
a) Obidva body c_1, c_2 sú hraničné body intervalu $\langle a\,;\,b\rangle$. Potom z iii) vyplýva

$$f(a) = f(b) = f(c_1) = f(c_2) = m = M.$$

To znamená, že funkcia f je konštantná a pre všetky $c \in \langle a\,;\,b\rangle$ platí $f'(c) = 0$.
b) Aspoň jeden z bodov c_1, c_2 je vnútorným bodom $\langle a\,;\,b\rangle$, označme ho c. Potom (veta 4.3.1) platí $f'(c) = 0$. ■

Poznámka 4.3.1.
Bod $c \in (a\,;\,b)$ leží na úsečke medzi bodmi a, b. Preto sa zvykne vyjadrovať v tvare

$$c = a + \theta(b-a), \qquad \text{kde } \ \theta \in (0\,;\,1)\,.$$

Veta 4.3.3 (Lagrangeova).
Nech pre funkciu f definovanú na uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ platí:

i) je spojitá na $\langle a\,;\,b\rangle$, ii) má deriváciu (aj nevlastnú) na $(a\,;\,b)$,

Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a\,;\,b)$ taký, že platí

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \qquad \text{t.j.} \quad f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a). \tag{4.11}$$

Dôkaz.
Funkcia $F(x) = [f(x)-f(a)]\cdot(b-a) - [f(b)-f(a)]\cdot(x-a)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ spĺňa predpoklady Rolleho vety 4.3.2. Potom existuje $c \in (a\,;\,b)$ také, že platí

$$F'(c) = f'(c)\cdot(b-a) - [f(b)-f(a)] = 0, \qquad \text{t.j.} \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ ■$$

Poznámka 4.3.2.
Lagrangeova veta sa často nazýva **veta o prírastku funkcie**, pretože vzťah (4.11) vyjadruje prírastok funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$. Ak totiž označíme $c = a + \theta h$, $h = b-a$, potom môžeme vzťah (4.11) vyjadriť v tvare $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h$, kde $\theta \in (0\,;\,1)$. Pre dostatočne malé h môžeme predpokladať $f'(a+\theta h) \approx f'(a)$. Potom

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a,h).$$

Tento vzťah je zhodný zo vzťahom (4.8) na strane 134, ktorý sme dostali pri lokálnej aproximácii funkcie pomocou jej diferenciálu.

[7] T.j. platí $f(c) = \min\{f(x)\,;\,x \in M\}$, resp. $f(c) = \max\{f(x)\,;\,x \in M\}$.
[8] *Michel Rolle* [1652–1719] — francúzsky matematik.

Príklad 4.3.1.
Približne odhadnite hodnotu výrazu $\operatorname{tg} 2,1$.

Riešenie.
Označme $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \langle 2\pi/3\,;\, 2,1\rangle$.
Funkcia f je spojitá a pre všetky $x \in \langle 2\pi/3\,;\, 2,1\rangle$ platí $f'(x) = \cos^{-2} x$. To znamená, že funkcia f spĺňa na intervale $\langle 2\pi/3\,;\, 2,1\rangle$ predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote. Potom existuje $c \in (2\pi/3\,;\, 2,1)$ také, že platí

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} 2,1 = \frac{1}{\cos^2 c}\left(\frac{2\pi}{3} - 2,1\right), \quad \text{t.j.} \quad \operatorname{tg} 2,1 = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\cos^2 c}\left(\frac{2\pi}{3} - 2,1\right).$$

Keďže $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = -0,5$, potom ak položíme $c \approx \frac{2\pi}{3}$, dostaneme

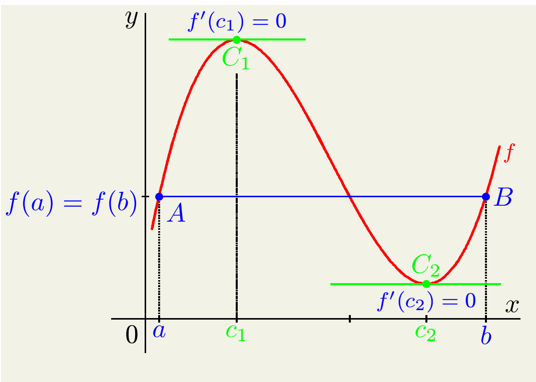
$$\operatorname{tg} 2,1 \approx -\sqrt{3} - \frac{1}{0,25}\left(\frac{2\pi}{3} - 2,1\right) = -1,732\,051 - 4(2,094\,395 - 2,1) = -1,709\,631.$$

Ak porovnáme túto hodnotu s presnou hodnotou $\operatorname{tg} 2,1 = -1,709\,847$, dostaneme chybu výpočtu $|1,709\,847 - 1,709\,631| = 0,000\,216 < 0,01$. ■

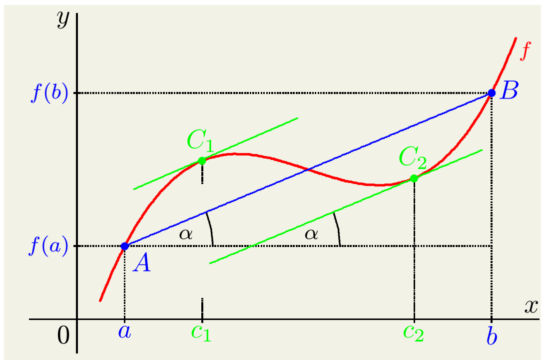
Poznámka 4.3.3.
Ak položíme v predpokladoch Lagrangeovej vety $f(a) = f(b)$, potom dostaneme tvrdenie $f'(c) = 0$. To znamená, že Rolleho veta je dôsledkom Lagrangeovej vety.
Geometrický význam týchto viet je ilustrovaný na obrázkoch 4.3.6 a 4.3.7. Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $C = [c; f(c)]$ zviera s osou x uhol α, pre ktorý platí

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(c) = 0, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{tg}\alpha = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Rolleho a Lagrangeova veta zaručujú existenciu aspoň jedného bodu $c \in (a\,;\, b)$, pre ktorý platí $f'(c) = 0$, resp. pre ktorý platí vzťah (4.11). Pomocou nich však takéto body nevieme nájsť a ani nedokážeme určiť ich počet.



Obr. 4.3.6: Rolleho veta.



Obr. 4.3.7: Lagrangeova veta.

Dôsledok 4.3.3.a.
Ak pre všetky $x \in (a\,;\, b)$ platí $f'(x) = 0$, potom je f na $(a\,;\, b)$ konštantná.

Dôkaz.
Z vety 4.1.1 vyplýva, že je funkcia f na intervale $(a\,;\, b)$ spojitá. Nech $x_1, x_2 \in (a\,;\, b)$, $x_1 < x_2$ sú dva ľubovoľné body, potom sú na intervale $\langle x_1\,;\, x_2\rangle$ splnené predpoklady Lagrangeovej vety. To znamená, že existuje $c \in (x_1\,;\, x_2)$, pre ktoré platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0, \quad \text{t.j.} \quad f(x_1) = f(x_2). \ ■$$

Veta 4.3.4 (Cauchyho).
Nech pre funkcie f, g definované na uzavretom intervale $\langle a\,;\, b\rangle$ platí:

i) f, g sú spojité na $\langle a\,;\, b\rangle$,
ii) f má deriváciu (aj nevlastnú) na $(a\,;\, b)$,
iii) g má vlastnú deriváciu na $(a\,;\, b)$, pričom pre všetky $x \in (a\,;\, b)$ platí $g'(x) \neq 0$.

Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a\,;\, b)$ taký, že platí

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad \text{t.j.} \quad g'(c) \cdot [f(b) - f(a)] = f'(c) \cdot [g(b) - g(a)].$$

Dôkaz.
Funkcia $F(x) = [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)]$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ spĺňa predpoklady Rolleho vety 4.3.2. Potom existuje $c \in (a\,;\,b)$ také, že platí

$$F'(c) = f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(c) = 0, \quad \text{t.j.} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \ \blacksquare$$

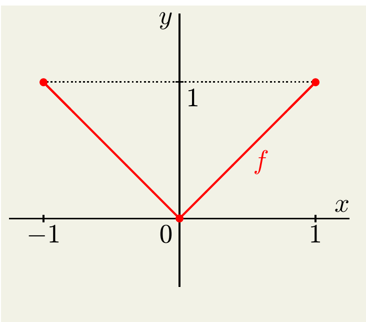
Poznámka 4.3.4.
Lagrangeovu vetu môžeme považovať za dôsledok Cauchyho vety. Stačí v predpokladoch Cauchyho vety uvažovať funkciu g definovanú vzťahom $g(x) = x$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$.

Ak vynecháme niektorý z predpokladov vo vetách o strednej hodnote, potom ich tvrdenia vo všeobecnosti prestávajú platiť (viď nasledujúce príklady).

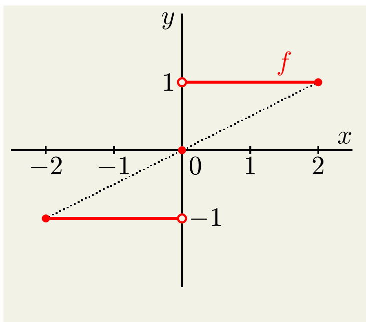
Príklad 4.3.2.
Funkcia $f\colon\ y = |x|$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$ je na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ spojitá.
Pre všetky $x \in \langle -1\,;\,0)$ platí $f'(x) = [-x]' = -1$, pre všetky $x \in (0\,;\,1\rangle$ platí $f'(x) = x' = 1$, ale $f'(0)$ neexistuje (príklad 4.1.5). Navyše platí $f(-1) = f(1) = 1$. To znamená, že sú splnené všetky predpoklady Rolleho vety, okrem predpokladu existencie f' na $(-1\,;\,1)$.
Je zrejmé, že bod $c \in (-1\,;\,1)$ pre ktorý platí $f'(c) = 0$ neexistuje (obrázok 4.3.8). $\blacksquare$

Príklad 4.3.3.
Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{sgn} x$, $x \in \langle -2\,;\,2\rangle$ má deriváciu v každom bode svojho definičného oboru (príklad 4.1.6). Pre všetky $x \neq 0$ platí $f'(x) = 0$ a pre $x = 0$ platí $f'(0) = \infty$.
To znamená, že funkcia f má deriváciu v každom bode intervalu $\langle -2\,;\,2\rangle$. Ale nie je spojitá v bode $x = 0$, takže nie sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety. Je zrejmé (obrázok 4.3.9), že neexistuje bod $c \in (-2\,;\,2)$, pre ktorý platí

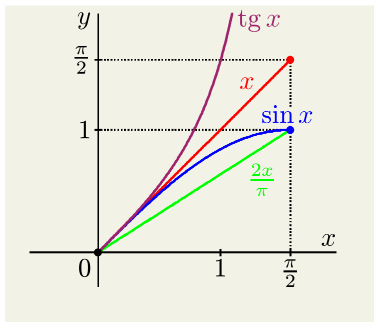
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2 + 2} = \frac{1}{2}. \ \blacksquare$$



Obr. 4.3.8: Príklad 4.3.2.



Obr. 4.3.9: Príklad 4.3.3.



Obr. 4.3.10: Príklad 4.3.5.

Vety o strednej hodnote funkcie patria medzi najdôležitejšie výsledky diferenciálneho počtu a ako dokazujú nasledujúce príklady, využívajú sa pri riešení mnohých problémov.

Príklad 4.3.4.
Dokážte, že funkcia $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$, $x \in R$ má práve jeden nulový bod a nájdite interval, v ktorom leží tento nulový bod.

Riešenie.
Funkcia f je spojitá na R a pre všetky $x \in R$ platí

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3(x^2 - 2x + 1) + 3 = 3(x-1)^2 + 3 \geq 3 > 0.$$

Keďže $f(-1) = -9 < 0$ a $f(0) = 1 > 0$, potom na základe Cauchyho vety o nulovej hodnote (veta 3.3.11) existuje aspoň jeden nulový bod v intervale $(-1\,;\,0)$.
Teraz dokážeme sporom, že funkcia f nemá viac ako dva korene.
Predpokladajme, že existujú dva body $x_1 < x_2$ také, že $f(x_1) = f(x_2) = 0$. To znamená, že sú na intervale $\langle x_1\,;\,x_2\rangle$ splnené predpoklady Rolleho vety o strednej hodnote a existuje $c \in (x_1\,;\,x_2)$ také, že $f'(c) = 0$. Lenže pre všetky $c \in R$ platí $f'(c) \neq 0$. To je spor.
Takže funkcia f má práve jeden koreň, ktorý leží v intervale $(-1\,;\,0)$. $\blacksquare$

Príklad 4.3.5.
Dokážte, že pre všetky $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ platí vzťah $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Riešenie.
Situácia je znázornená na obrázku 4.3.10. Nech $b \in (0\,;\,\pi/2)$ je ľubovoľné.

a) Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je na intervale $\langle 0\,;\, b\rangle$ spojitá a na $(0\,;\, b)$ má vlastnú deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 1, \quad \text{pretože} \;\; 0 < \cos x < 1 \;\; \text{pre} \;\; x \in \left(0\,;\, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom (Lagrangeova veta) existuje $c \in (0\,;\, b)$ také, že

$$\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} 0 = \frac{b-0}{\cos^2 c}, \quad \text{t.j.} \quad \operatorname{tg} b = \frac{b}{\cos^2 c} > \frac{b}{1} = b.$$

b) Funkcia $g(x) = \sin x$ je na intervale $\langle 0\,;\, b\rangle$ spojitá a pre všetky $x \in (0\,;\, b)$ platí $0 < g'(x) = \cos x < 1$. Potom (Lagrangeova veta) existuje $c \in (0\,;\, b)$ také, že

$$\sin b - \sin 0 = \cos c \cdot (b-0), \quad \text{t.j.} \quad \sin b = \cos c \cdot b < b.$$

c) Funkcia $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ je na intervale $\left\langle b\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$ spojitá a pre všetky $x \in \left(b\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$ platí

$$h'(x) = \left[\frac{\sin x}{x}\right]' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x\; (x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0, \tag{4.12}$$

pretože pre všetky $x \in (0\,;\, \pi/2)$ platí $0 < \cos x < 1$, $0 < x^2$, $x < \operatorname{tg} x$.
Potom (Lagrangeova veta) existuje $c \in (b\,;\, \pi/2)$ také, že

$$\frac{\cos c\; (c - \operatorname{tg} c)}{c^2} \left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} - \frac{\sin b}{b} = \frac{2}{\pi} - \frac{\sin b}{b}.$$

Zo vzťahu (4.12) a z nerovnosti $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ potom vyplýva

$$\frac{2}{\pi} - \frac{\sin b}{b} < 0, \quad \text{t.j.} \quad \frac{2}{\pi} < \frac{\sin b}{b}, \quad \text{resp.} \quad \frac{2b}{\pi} < \sin b.$$

Tým je vzťah $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ dokázaný pre všetky $x \in \left(0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$. ■

Príklad 4.3.6.
Dokážte, že pre všetky $x > 0$ platí $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Riešenie.
Nech $b > 0$ je ľubovoľné.
Funkcia $f(x) = \ln(x+1)$ je na $\langle 0\,;\, b\rangle$ spojitá a $f'(x) = 1/(1+x) > 0$ pre všetky $x \in (0\,;\, b)$.
Potom na základe Lagrangeovej vety existuje $c \in (0\,;\, b)$ také, že platí

$$\ln(1+b) = \ln(1+b) - \ln(1+0) = \frac{1}{1+c} \cdot (b-0) = \frac{b}{1+c}.$$

Zo vzťahu $0 < c < b$ vyplýva $1 < 1+c < 1+b$ a z toho ďalej vyplýva

$$\frac{1}{1+b} < \frac{1}{1+c} < 1, \quad \text{t.j.} \quad \frac{b}{1+b} < \ln(1+b) = \frac{b}{1+c} < b.$$

Tým je vzťah $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ dokázaný pre všetky $x > 0$. ■

4.3.2 L'Hospitalovo pravidlo

Pri praktickom výpočte limity funkcie, ktorá má v danom bode tvar neurčitého výrazu typu $0/0$, resp. $\pm\infty/\infty$ sa často používa **l'Hospitalovo pravidlo**.[9]

Veta 4.3.5 (l'Hospitalovo pravidlo).
Nech pre funkcie f, g definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$ bodu $a \in R^*$ platí:

i) pre všetky $x \in P(a)$ existujú konečné derivácie $f'(x)$, $g'(x)$, pričom $g'(x) \neq 0$,

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

iii) existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$.

Potom existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnosť $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

Dôkaz.
Z i) vyplýva (veta 4.1.4), že sú f, g spojité v $P(a)$. Ak pre $a \in R$ položíme $f(a) = g(a) = 0$, potom budú spojité aj v bode a.

[9] Pravidlo je pomenované po francúzskom matematikovi *G. F. A. de l'Hospitalovi*, ktorý ho publikoval v roku 1696. Jeho skutočným autorom je švajčiarsky matematik *Johann Bernoulli*.

Nech $a\in R$, $b\in R^*$ a nech $P_\delta(a)$ má polomer $\delta > 0$. Zvoľme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ tak, aby $a < x_n < a+\delta$ pre všetky $n\in N$. Na každom z intervalov $\langle a\,;\,x_n\rangle$, $n\in N$ spĺňajú f, g predpoklady Cauchyho vety. Potom pre všetky $n\in N$ existuje $c_n\in(a\,;\,x_n)$ tak, že

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f(x_n)-0}{g(x_n)-0} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Keďže $a < c_n < x_n$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a = a \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.
Ak to zhrnieme, potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = b, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

Ak zvolíme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ tak, aby pre všetky $n\in N$ platilo $a-\delta < x_n < a$ a aplikujeme Cauchyho vetu na $\langle x_n\,;\,a\rangle$, dospejeme (analogicky ako pri limite sprava) k vzťahu

$$b = \lim_{x\to a^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Nech $a=\infty$, $b\in R^*$ a nech $P(\infty) = (\delta\,;\,\infty)$, kde $\delta > 0$. Ak označíme $x = t^{-1}$, potom

$$\lim_{x\to\infty} x = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(t^{-1}), \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{t\to 0^+} g(t^{-1}).$$

Funkcie $f(t^{-1})$, $g(t^{-1})$, $t\in(0\,;\,1/\delta)$ sú zložené a na základe už dokázaného pre ne platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^{-1})}{g(t^{-1})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{[f(t^{-1})]'}{[g(t^{-1})]'} = \lim_{t\to 0^+}\frac{-f'(t^{-1})\,t^{-2}}{-g'(t^{-1})\,t^{-2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(t^{-1})}{g'(t^{-1})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pre $a=-\infty$, $b\in R^*$, $P(a) = (-\infty\,;\,\delta)$, $\delta < 0$ je dôkaz analogický. ■

Poznámka 4.3.5.
Predchádzajúca veta zostáva v platnosti aj v prípade, keď predpoklad ii) nahradíme predpokladom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Príklad 4.3.7.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Riešenie.
Označme $a=2$, $f(x)=x^3-8$, $g(x)=x-2$, $x\in R-\{2\}$.
Okolie $P(2)$ môžeme zvoliť ľubovoľne, v tomto prípade aj $P(2) = R-\{2\}$. Pre všetky $x\in P(2)$ existujú derivácie $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 1 \ne 0$ a platí

$$\lim_{x\to 2}(x^3-8) = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0, \qquad \lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1} = \lim_{x\to 2} 3x^2 = 3\cdot 2^2 = 12.$$

Tým sú overené predpoklady l'Hospitalovho pravidla a platí $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2}{1} = 12$.
Danú limitu môžeme vypočítať aj bez l'Hospitalovho pravidla

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12. \blacksquare$$

Príklad 4.3.8.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Riešenie.
Predpoklady l'Hospitalovho pravidla sú splnené, pretože pre všetky $x\in P(\infty) = (0\,;\,\infty)$ existujú konečné derivácie $f'(x) = [\ln x]' = x^{-1}$, $g'(x) = [x]' = 1\ne 0$ a existujú limity

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \lim_{x\to\infty} x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. ■

Pri praktickom používaní l'Hospitalovho pravidla je veľmi dôležité, aby sme **overili všetky predpoklady**. V opačnom prípade (viď príklady 4.3.9, 4.3.11) môžeme dospieť k nesprávnym výsledkom alebo sa k výsledku daným postupom nedopátrame. Platnosť predpokladu iii) sa v praxi overuje priebežne počas výpočtu limity.

Obrátené tvrdenie l'Hospitalovho pravidla neplatí (príklad 4.3.9). To znamená, že z existencie $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]$ vo všeobecnosti nevyplýva existencia $\lim\limits_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$.

Príklad 4.3.9.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x^{-1}}{\sin x}$.

Riešenie.
Označme $P(0) = (-1\,;\,1) - \{0\}$, $f(x) = x^2 \sin x^{-1}$, $g(x) = \sin x$. Pre všetky $x \in P(0)$ platí

$$f'(x) = 2x \sin x^{-1} + x^2 \cos x^{-1}(-x^{-2}) = 2x \sin x^{-1} - \cos x^{-1}, \quad g'(x) = \cos x \neq 0.$$

Keďže je funkcia $\sin x^{-1}$ ohraničená a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, potom (dôsledok 3.2.4.b) platí

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} [2x \sin x^{-1}] = 2 \lim_{x\to 0} [x \sin x^{-1}] = 0, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Potom (l'Hospitalovo pravidlo) platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x^{-1}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x^{-1} - \cos x^{-1}}{\cos x} = \frac{2 \lim\limits_{x\to 0} [x \sin x^{-1}] - \lim\limits_{x\to 0} \cos x^{-1}}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = -\lim_{x\to 0} \cos x^{-1}.$$

Keďže $\lim\limits_{x\to 0} \cos x^{-1}$ neexistuje, neexistuje tiež $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x^{-1}}{\sin x}$.

L'Hospitalovo pravidlo v tomto prípade **použiť nemôžeme**. Neoverili sme totiž platnosť predpokladu iii). Tento predpoklad nie je splnený, pretože neexistuje limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x^{-1} - \cos x^{-1}}{\cos x}.$$

Daná limita existuje, pretože zo vzťahov $\lim\limits_{x\to 0} [x \sin x^{-1}] = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ vyplýva

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x^{-1}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left[x \sin x^{-1} \frac{x}{\sin x} \right] = \lim_{x\to 0} \left[x \sin x^{-1} \right] \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0. \ \blacksquare$$

Poznámka 4.3.6.
L'Hospitalovo pravidlo môžeme pri praktickom výpočte limity použiť aj niekoľkokrát za sebou. Ak sú splnené predpoklady pre funkcie f', g', f'', g'', $\ldots$, $f^{(k)}, g^{(k)}$, $k \in N$ a existuje $\lim\limits_{x\to a} [f^{(k)}(x)/g^{(k)}(x)]$, potom ho môžeme použiť k-krát za sebou podľa vzoru

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

Príklad 4.3.10.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Riešenie.
Použijeme l'Hospitalovo pravidlo niekoľkokrát za sebou. Zvoľme $P(0) = (-1\,;\,1) - \{0\}$. Pre všetky $x \in P(0)$ existujú príslušné derivácie a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}. \ \blacksquare$$

Príklad 4.3.11.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Riešenie.
L'Hospitalovo pravidlo nám pri výpočte tejto limity nepomôže, pretože nedokážeme overiť splnenie predpokladu iii). Platí totiž

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{[e^x + e^{-x}]'}{[e^x - e^{-x}]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{[e^x - e^{-x}]'}{[e^x + e^{-x}]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Danú limitu môžeme vyriešiť napríklad nasledujúcim spôsobom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1. \ \blacksquare$$

Príklad 4.3.12.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$, kde $n\in N$.

Riešenie.
L'Hospitalovo pravidlo použijeme n-krát. Zvoľme $P(\infty) = (0\,;\,\infty)$. Pre všetky $x\in P(\infty)$ a pre všetky $k\in N$, $k \leq n$ existujú derivácie

$$[e^x]^{(k)} = e^x, \qquad [x^n]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \qquad [x^n]^{(n)} = n!x^0 = n!.$$

Pre všetky $k\in N$, $k < n$ platí

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} x^n = \lim_{x\to\infty} nx^{n-1} = \lim_{x\to\infty} [n(n-1)x^{n-1}] = \cdots = \lim_{x\to\infty} [n\cdots 2x] = \infty.$$

Potom na základe l'Hospitalovho pravidla platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\cdots 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \blacksquare$$

4.3.3 Neurčité výrazy

L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj na výpočet limít z neurčitých výrazov typu $\pm\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0 alebo $1^{\pm\infty}$. Tieto limity prevedieme vhodnými úpravami na limity neurčitých výrazov typu $0/0$ alebo $\pm\infty/\infty$ a použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Budeme pritom predpokladať, že $a\in R^* = R\cup\{\pm\infty\}$ a že sú funkcie f, g definované v nejakom (vhodnom) prstencovom okolí $P(a)$.

- **Typ $\pm\infty\cdot 0$, t.j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$**

  Ak pre všetky $x\in P(a)$ sú $g'(x)$, $[1/f(x)]'\neq 0$ konečné a existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{[1/f(x)]'}$, potom

  $$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{[1/f(x)]'}, \qquad \text{t.j. typ } \frac{0}{0}.$$

  Ak pre všetky $x\in P(a)$ sú $f'(x)$, $[1/g(x)]'\neq 0$ konečné a existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{[1/g(x)]'}$, potom

  $$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{[1/g(x)]'}, \qquad \text{t.j. typ } \frac{\infty}{\infty}.$$

- **Typ $\infty-\infty$, t.j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$**

  Ak pre všetky $x\in P(a)$ existujú konečné $[1/g(x) - 1/f(x)]'$, $[1/(f(x)g(x))]'\neq 0$ a existuje limita ich podielu pre $x\to a$, potom platí

  $$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right] = \lim_{x\to a} f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] =$$

  $$= \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{\left[\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}\right]'}{\left[\dfrac{1}{f(x)g(x)}\right]'}, \qquad \text{t.j. typ } \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}.$$

- **Typ ∞^0, t.j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$**

  Ak pre všetky $x\in P(a)$ existujú funkcie $\ln f(x)$, $\ln [f(x)]^{g(x)}$, potom

  $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}, \qquad \text{t.j. typ } 0\cdot\infty.$$

- **Typ 0^0, t.j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$**

  Ak pre všetky $x\in P(a)$ existujú funkcie $\ln f(x)$, $\ln [f(x)]^{g(x)}$, potom

  $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}, \qquad \text{t.j. typ } 0\cdot(-\infty).$$

- **Typ $1^{\pm\infty}$, t.j. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$**

  Ak pre všetky $x\in P(a)$ existujú funkcie $\ln f(x)$, $\ln [f(x)]^{g(x)}$, potom

  $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}, \qquad \text{t.j. typ } \pm\infty\cdot 0.$$

Príklad 4.3.13.
Pomocou l'Hospitalovho pravidla vypočítajte:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} [x \ln x]$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right]$, c) $\lim\limits_{x\to 0} [\sin x]^x$.

Riešenie.
a) Pre všetky $x > 0$ platí $x' = 1$, $[1/\ln x]' = [\ln^{-1} x]' = -\ln^{-2} x[\ln x]' = -x^{-1} \ln^{-2} x \neq 0$. Keďže $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} [1/\ln x] = 0$, potom

$$\lim_{x\to 0^+} [x \ln x] = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x'}{[1/\ln x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x^{-1}\ln^{-2} x} = -\lim_{x\to 0^+} [x \ln^2 x].$$

To znamená, že pravidlo typu $0/0$ nám nepomôže. Na druhej strane pre všetky $x > 0$ platí $[\ln x]' = 1/x$, $[1/x]' = -1/x^2 \neq 0$. Keďže $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} [1/x] = \infty$, potom

$$\lim_{x\to 0^+} [x \ln x] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[1/x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} [-x] = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

b) Po opakovanom použití l'Hospitalovho pravidla (predpoklady sú splnené) platí

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x - x]'}{[x \sin x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[\cos x - 1]'}{[\sin x + x \cos x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

c) Výraz $[\sin x]^x$ nie je definovaný pre $x < 0$, t.j. $\lim\limits_{x\to 0^-} [\sin x]^x$ neexistuje. Ale platí

$$\lim_{x\to 0^+} [\sin x]^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln [\sin x]^x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln \sin x} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

pretože pre limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln \sin x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \sin x}{1/x}$ (l'Hospitalovo pravidlo) platí

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \left[x \cos x \frac{x}{\sin x}\right] = -0 \cdot 1 \cdot 1 = 0. \blacksquare$$

Príklad 4.3.14.
Pomocou l'Hospitalovho pravidla[10] vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$.

Riešenie.
Pre všetky $x > 0$ platí $x^{1/x} = \mathrm{e}^{\ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{\ln x/x}$, $x' = 1$, $[\ln x]' = 1/x \neq 0$. Z toho vyplýva:
a) Keďže $\lim\limits_{x\to\infty} x = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, potom na základe l'Hospitalovho pravidla platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

b) Keďže $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, potom (bez l'Hospitalovho pravidla) platí

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^{1/x}} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0. \blacksquare$$

4.3.4 Taylorov polynóm

Ak chceme funkciu f, ktorá je diferencovateľná v bode $x_0 \in R$, aproximovať v okolí bodu x_0 lineárnou funkciou (t.j. polynómom prvého stupňa), potom najlepšia aproximácia (veta 4.2.2) je pomocou lineárnej funkcie $g(x)$, pre ktorú platí

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, x - x_0), \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

V nasledujúcej časti sa budeme snažiť funkciu f aproximovať v okolí bodu x_0 pomocou polynómu n-tého stupňa ($n = 1, 2, 3, \dots$) tak, aby chyba aproximácie bola minimálna.

Predpokladajme, že má funkcia f v bode $x_0 \in R$ konečné derivácie do rádu $n \in N$ vrátane. To znamená, že funkcia f má v bode x_0 diferenciály rádov $1, 2, \dots, n$. Funkciu f chceme v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 aproximovať polynómom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in R$$

[10] Viď príklad 3.2.34 na strane 106.

tak, aby chyba aproximácie $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ bola minimálna, t.j. aby platilo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{4.13}$$

Teraz vypočítame koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \cdot (x-x_0)^{n-k}\right] = 0\cdot 0 = 0.$$

Potom po k-násobnom opakovanom použití l'Hospitalovho pravidla typu $0/0$ platí

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{[(x-x_0)^k]'} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{k[(x-x_0)^{k-1}]'} = \cdots$$

$$\cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(k)}(x)}{[(x-x_0)^k]^{(k)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(k)}(x)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{R_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

To znamená, že pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí

$$R_n^{(k)}(x_0) = [f(x_0) - T_n(x_0)]^{(k)} = 0, \quad \text{t.j. } T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0). \tag{4.14}$$

Pre polynóm $T_n(x) = a_n(x-x_0)^n + \cdots + a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0$ v okolí $P(x_0)$ platí

$$\begin{aligned}
T_n'(x) &= n\,a_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots + 3\,a_3(x-x_0)^2 + 2\,a_2(x-x_0) + 1\,a_1,\\
T_n''(x) &= n(n-1)\,a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots + 3{\cdot}2\,a_3(x-x_0) + 2{\cdot}1\,a_2,\\
T_n'''(x) &= n(n-1)(n-2)\,a_n(x-x_0)^{n-3} + \cdots + 3{\cdot}2{\cdot}1\,a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_n^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2\,a_n(x-x_0) + (n-1)!\,a_{n-1}, \qquad T_n^{(n)}(x) = n!\,a_n.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $T_n^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$. Potom platí

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k, \quad \text{t.j. } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{pre } k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{4.15}$$

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že vzťahmi (4.15) sú určené jednoznačne koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ pre polynóm $T_n(x)$, $x\in O(x_0)$, ktorý spĺňa vzťahy (4.13) a (4.14).

Nech je funkcia f definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$ a nech v bode x_0 existujú konečné derivácie $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$. Funkciu $T_n(x)$, $x\in O(x_0)$ definovanú vzťahom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{4.16}$$

nazývame **Taylorov[11] polynóm stupňa (najviac) n funkcie f v bode x_0**. Bod x_0 nazývame **stred Taylorovho polynómu $T_n(x)$**. Vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \ x\in O(x_0) \tag{4.17}$$

nazývame **Taylorov vzorec stupňa (najviac) n funkcie f v bode x_0**. Funkcia $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, $x\in O(x_0)$ spĺňa vzťah (4.13) a nazýva sa **zvyšok Taylorovho vzorca (stupňa n funkcie f v bode x_0)**.

Pre $x_0 = 0$ (stred v bode 0) má Taylorov polynóm (4.16) funkcie f tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \ x\in O(0)$$

a nazýva sa **Maclaurinov[12] polynóm stupňa (najviac) n funkcie f**. Taylorov vzorec funkcie f sa v tomto prípade nazýva **Maclaurinov vzorec stupňa n funkcie f**.

Ak uvážime definíciu diferenciálov vyšších rádov (poznámka 4.2.9), potom môžeme vzťah (4.16) pre Taylorov polynóm rádu n funkcie f v bode x_0 písať v tvare

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^k f(x_0, x-x_0)}{k!} = f(x_0) + \frac{\mathrm{d} f(x_0, x-x_0)}{1!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0, x-x_0)}{n!}, \ x\in O(x_0).$$

Poznámka 4.3.7.
Môže sa stať, že pre nejaké $k = 0, 1, \ldots, n$ platí $f^{(k)}(x_0) = 0$. Potom bude mať polynóm $T_n(x)$ niektoré koeficienty nulové a jeho stupeň môže byť menší ako n. To je dôvod, prečo hovoríme o polynóme stupňa najviac n.

[11] *Brook Taylor* [1685–1731] — anglický matematik.
[12] *Colin Maclaurin* [1698–1746] — škótsky matematik.

Poznámka 4.3.8.
Položme $h = x - x_0$, t.j. $x = x_0 + h$ a označme zvyšok $R_n(x) = R_n(x_0 + h) = \omega_n(h)$.
Taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie f v bode x_0 môžeme potom vyjadriť v tvare

$$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n,\ h\in O(0),$$

kde $O(0)$ je nejaké okolie bodu 0. Pre Taylorov vzorec funkcie f v bode x_0 potom platí

$$f(x_0+h) = T_n(x_0+h) + \omega_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \omega_n(h), \quad \text{kde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega_n(h)}{h^n} = 0.$$

Ak použijeme zápis pomocou diferenciálov, potom platí

$$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^k f(x_0,h)}{k!} = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0,h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0,h)}{n!}.$$

Hodnota zvyšku $R_n(x)$ vyjadruje chybu, s akou aproximuje Taylorov polynóm T_n funkciu f v bode $x\in O(x_0)$. Limitná vlastnosť (4.13) vyjadruje, že táto aproximácia je v lokálnom zmysle, t.j. v okolí $O(x_0)$ najlepšia možná (veta 4.3.6).

To znamená, že uspokojujúce výsledky môžeme očakávať iba pre body, ktoré sú blízko body x_0. Pre vzdialenejšie body dostaneme nepresné až celkom nevyhovujúce výsledky. Vo väčšine prípadoch nepomôže ani zvyšovanie stupňa n Taylorovho polynómu T_n. Mnohokrát je to práve naopak a zvyšovaním stupňa n sa chyba aproximácie zväčšuje. Navyše pre praktické použitie Taylorovho polynómu danej funkcie je dôležité odhadnúť veľkosť zvyšku $R_n(x)$. Tento problém rieši Taylorova veta 4.3.7.

Veta 4.3.6 (O najlepšej lokálnej aproximácii funkcie polynómom stupňa n).
Nech f je funkcia, ktorá má v bode x_0 konečné derivácie až do rádu n vrátane. Nech

$$Q_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n$$

je polynóm najviac n-tého stupňa, rôzny od $T_n(x)$, pre ktorý platí $Q_n(x_0) = f(x_0)$.
Potom existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x\in P(x_0)$ platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q_n(x)|.$$

Veta 4.3.7 (Taylorova).
Nech má funkcia f v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 konečné derivácie až do rádu $n+1$ vrátane. Potom pre všetky $x\in O(x_0)$ platí Taylorov vzorec (4.17)

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

pričom $R_n(x)$, $x\in O(x_0)$ môžeme písať v **Lagrangeovom tvare** (**Lagrangeov zvyšok**)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{kde} \ \ \xi = x_0 + \theta(x-x_0),\ \theta\in(0\,;1)$$

alebo v **Cauchyho tvare**[13] (**Cauchyho zvyšok**)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n, \quad \text{kde} \ \ \xi = x_0 + \theta(x-x_0),\ \theta\in(0\,;1)\,.$$

Poznámka 4.3.9.
Ak použijeme (viď poznámka 4.3.8) označenie $h = x - x_0$, t.j. $x = x_0 + h$, potom pre ξ ležiace medzi bodmi x_0 a x platí $\xi = x_0 + \theta h$, $x-\xi = x-x_0 - \theta h = h - \theta h = (1-\theta)h$.
Pre zvyšok $R_n(x_0+h) = \omega_n(h)$, $h\in O(0)$ Taylorovho vzorca

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0+h),\ h\in O(0)$$

v Lagrangeovom tvare potom platí

$$R_n(x_0+h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},\ \ \xi = x_0+\theta h,\ \theta\in(0\,;1)\,.$$

Zopakujme, že $h = x - x_0$. Pre Cauchyho tvar zvyšku platí

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{n!}h^{n+1}(1-\theta)^n,\ \ \xi = x_0+\theta h,\ \theta\in(0\,;1)\,.$$

[13]Existuje samozrejme omnoho viac tvarov zvyšku $R_n(x)$, ale pre praktický význam sú Lagrangeov a Cauchyho tvar najvýznamnejšie.

Poznámka 4.3.10.
V prípade Maclaurinovho vzorca
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad x \in O(0)$$
platí $h = x - 0 = x$, $\xi = 0 + \theta(x-0) = \theta x = \theta h$, kde $\theta \in (0\,;\,1)$. Potom
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$$
je Lagrangeov tvar zvyšku. Cauchyho zvyšok má tvar
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,x(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\,x(x-\theta x)^n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\,x^{n+1}(1-\theta)^n.$$

Príklad 4.3.15.
Nájdite Taylorov vzorec stupňa 2 funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ so stredom v bode 0.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in \langle -1\,;\,\infty)$. Pre všetky $x \in (-1\,;\,\infty)$ platí
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}, \quad f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}}, \quad f'''(x) = \frac{10}{27\sqrt[3]{(1+x)^8}}.$$
Keďže $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{3}$, $f''(0)=-\frac{2}{9}$, potom pre Taylorov, t.j. Maclaurinov vzorec platí
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + R_2(x), \quad x \in O(0).$$
Pre zvyšok $R_2(x)$, $x \in O(0)$ v Lagrangeovom tvare platí
$$R_2(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!}\,x^3 = \frac{5x^3}{81\sqrt[3]{1+\theta x}}, \qquad \text{kde } \theta \in (0\,;\,1)\,.$$
Cauchyho zvyšok má tvar $R_2(x) = \frac{f'''(\theta x)}{2!}\,x^3(1-\theta)^2 = \frac{5x^3(1-\theta)^2}{27\sqrt[3]{1+\theta x}}$, kde $\theta \in (0\,;\,1)$. ∎

Poznámka 4.3.11.
Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že funkciu $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x \in O(0)$ môžeme aproximovať kvadratickou funkciou $1 + x/3 - x^2/9$ s chybou $|R_2(x)|$, t.j.
$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}, \quad x \in O(0).$$
Pre $x \in O^+(0)$ platí $1 + \theta x \geq 1$, t.j. $\sqrt[3]{1+\theta x} \geq 1$. Z toho vyplýva pre chybu aproximácie
$$|R_2(x)| = R_2(x) = \frac{5x^3}{81\sqrt[3]{1+\theta x}} \leq \frac{5x^3}{81} < 0{,}062x^3.$$
Napríklad pre $\sqrt[3]{1{,}2} = \sqrt[3]{1+0{,}2}$ je chyba $|R_2(0{,}2)| < 0{,}062 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}000\,496$. Ale pre $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7}$ je chyba ohraničená číslom $0{,}062 \cdot 7^3 = 21{,}266$, čo je nepriateľné. Naozaj, stačí porovnať hodnoty $\sqrt[3]{1{,}2} = 1{,}062\,659$, $\sqrt[3]{8} = 2$ s hodnotami
$$\sqrt[3]{1+0{,}2} \approx 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2^2}{9} = 1{,}062\,222, \qquad \sqrt[3]{1+7} \approx 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2{,}111\,111.$$

Príklad 4.3.16.
Nájdite Taylorov vzorec stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln x$ so stredom v bode $x_0 = 1$.

Riešenie.
Pre všetky $x > -1$, $k \in N$ pre k-tu deriváciu funkcie f platí
$$f'(x) = \frac{1}{x}, \; f''(x) = \frac{-1}{x^2}, \; f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \; f''''(x) = \frac{-3\cdot 2}{x^4}, \; \ldots, \; f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(n-1)!}{x^k}.$$
Potom pre všetky $k \in N$ platí $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.
Potom Taylorov polynóm stupňa n funkcie $f(x) = \ln x$ má pre $x \in O(1)$ tvar
$$T_n(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1!}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n!}{(n-1)!}(x-1)^n =$$
$$= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}.$$
Pre zvyšok $R_n(x)$ v Lagrangeovom, resp. Cauchyho tvare platí
$$R_n(x) = \frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n+1}}, \quad \text{resp.} \quad R_n(x) = \frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}(1-\theta)^n}{[1+\theta(x-1)]^{n+1}}, \; \theta \in (0\,;\,1)\,. \; ∎$$

Poznámka 4.3.12.
Niekedy je výhodnejšie funkciu $f(x) = \ln x$ vyjadriť v tvare Maclaurinovho polynómu. Ak položíme $x = t+1$, potom Maclaurinov polynóm funkcie $f(t) = \ln(t+1)$ má tvar

$$T_n(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}, \quad t \in O(0).$$

Príklad 4.3.17.
Nájdite Maclaurinove vzorce stupňa $n \in N$ pre funkcie: a) $f(x) = \sin x$, b) $g(x) = \cos x$.

Riešenie.
a) Z príkladu 4.2.6 pre derivácie rádu $k \in N \cup \{0\}$ funkcie $f(x) = \sin x$ vyplýva

$$f^{(4k)}(0) = f(0) = \sin 0 = 0, \qquad f^{(4k+1)}(0) = f'(0) = \cos 0 = 1,$$
$$f^{(4k+2)}(0) = f''(0) = -\sin 0 = 0, \qquad f^{(4k+3)}(0) = f'''(0) = -\cos 0 = -1.$$

To znamená, že pre $k \in N \cup \{0\}$ platí $f^{(2k)} = 0$, $f^{(2k+1)} = (-1)^{\frac{(2k+1)-1}{2}} = (-1)^k$.
Maclaurinov polynóm stupňa $n = 2k+1$, $k \in N \cup \{0\}$ má potom tvar

$$T_{2k+1}(x) = 0 + \frac{x}{1!} + 0 + \frac{-x^3}{3!} + 0 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad x \in R.$$

Pre zvyšok $R_{2k+1}(x)$ v Lagrangeovom tvare (poznámka 4.3.10) platí

$$|R_{2k+1}(x)| = \left| \frac{f^{(2k+2)}(\theta x)}{(2k+2)!} x^{2k+2} \right| = \left| \frac{\sin \theta x}{(2k+2)!} x^{2k+2} \right| \le \left| \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \right| = \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}, \quad x \in R.$$

b) Z príkladu 4.2.6 pre derivácie rádu $k \in N \cup \{0\}$ funkcie $g(x) = \cos x$ vyplýva

$$g^{(4k)}(0) = f(0) = \cos 0 = 1, \qquad g^{(4k+1)}(0) = f'(0) = -\sin 0 = 0,$$
$$g^{(4k+2)}(0) = f''(0) = -\cos 0 = -1, \qquad g^{(4k+3)}(0) = f'''(0) = \sin 0 = 0.$$

To znamená, že pre $k \in N \cup \{0\}$ platí $g^{(2k)} = (-1)^{\frac{2k}{2}} = (-1)^k = 0$, $g^{(2k+1)} = 0$.
Maclaurinov polynóm stupňa $n = 2k$, $k \in N$ má potom tvar

$$T_{2k}(x) = 1 + 0 + \frac{-x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}, \quad x \in R.$$

Pre zvyšok $R_{2k}(x)$ v Lagrangeovom tvare platí

$$|R_{2k}(x)| = \left| \frac{f^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| = \left| \frac{\cos \theta x}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \le \left| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in R. \blacksquare$$

Poznámka 4.3.13.
Z príkladu 2.3.19 vyplýva, že pre všetky $x \in R$ platí

$$0 \le \lim_{k\to\infty} |R_{2k+1}| \le \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0, \qquad 0 \le \lim_{k\to\infty} |R_{2k}| \le \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0.$$

To znamená, že obidve funkcie $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ môžeme aproximovať Maclaurinovým polynómom pre ľubovoľné $x \in R$. Požadovanú presnosť dosiahneme dostatočným zväčšením stupňa n.

Príklad 4.3.18.
Nájdite Maclaurinov vzorec stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Riešenie.
Pre všetky $k \in N$ platí $f^{(k)}(x) = [\mathrm{e}^x]^{(k)} = \mathrm{e}^x$, t.j. $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ má potom tvar

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in R.$$

Pre Lagrangeov zvyšok platí $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}$, pričom $0 < \theta < 1$.
Pre $x \ge 0$ platí $0 < \theta x < x$, t.j. $\mathrm{e}^{\theta x} < \mathrm{e}^x$ a pre $x < 0$ platí $\theta x < 0$, t.j. $\mathrm{e}^{\theta x} < 1$. Potom

$$|R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\mathrm{e}^x x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pre } x \ge 0, \qquad |R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\theta x} |x^{n+1}|}{(n+1)!} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pre } x < 0. \blacksquare$$

Poznámka 4.3.14.
Rovnako ako funkcie $\sin x$, $\cos x$ môžeme aj funkciu $f(x) = e^x$ aproximovať Maclaurinovým polynómom na celej reálnej osi, t.j. pre všetky $x \in R$. Požadovanú presnosť opäť dostaneme dostatočným zväčšením stupňa n. Vyplýva to zo vzťahov (4.18) a (4.19). Pre $x < 0$ platí

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{4.18}$$

Nech $x > 0$. Pre $n \in N$ označme $a_n = \dfrac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$. Keďže $a_n > 0$, potom (veta 2.3.16.a) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x x^{n+2} (n+1)!}{(n+2)!\, e^x x^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+2} = 0, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Potom pre $x > 0$ platí

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{4.19}$$

Príklad 4.3.19.
Nájdite Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in R$.

Riešenie.
Pre všetky $x \in R$ pre derivácie funkcie f do rádu 6 platí

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\, e^{(x^2)}, & f^{(4)}(x) &= 12\, e^{(x^2)} + 48x^2 e^{(x^2)} + 16x^4 e^{(x^2)},\\
f''(x) &= 2\, e^{(x^2)} + 4x^2 e^{(x^2)}, & f^{(5)}(x) &= 120x\, e^{(x^2)} + 160x^3 e^{(x^2)} + 32x^5 e^{(x^2)},\\
f'''(x) &= 12x\, e^{(x^2)} + 8x^3 e^{(x^2)}, & f^{(6)}(x) &= 120\, e^{(x^2)} + 720x^2 e^{(x^2)} + 480x^4 e^{(x^2)} + 64x^6 e^{(x^2)}.
\end{aligned}$$

Ako vidíme, s výpočtom derivácií vyšších rádov funkcie f sú problémy, preto určíme Maclaurinov polynóm iba stupňa 6. Keďže platí

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 2,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 12,\ f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(6)}(0) = 120,$$

potom Maclaurinov polynóm stupňa 6 má tvar

$$T_6(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{120}{6!}x^6 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}.$$

Iné riešenie.
Z príkladu 4.3.18 pre Maclaurinov polynóm stupňa n funkcie $g(t) = e^t$ vyplýva

$$T_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

Ak položíme $t = x^2$, potom pre Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = g(x^2) = e^{(x^2)}$ platí

$$P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Pre $n = 3$ dostaneme $T_6(x) = P_3(x) = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{6}$. ■

4.3.5 Vyšetrovanie priebehu funkcie

Pomocou diferenciálneho počtu môžeme úspešne vyšetrovať rôzne vlastnosti funkcií, ktoré nám pomôžu pri určovaní ich priebehu. Pomocou derivácií môžeme vyšetrovať monotónnosť, konvexnosť a konkávnosť funkcie, hľadať jej inflexné a stacionárne body, lokálne a globálne extrémy, prípadne určovať asymptoty grafu tejto funkcie.

Obyčajne sa vyšetrujú funkcie, ktoré majú konečný počet bodov nespojitosti, prípadne konečný počet bodov, v ktorých nemajú deriváciu. Preto sa môžeme obmedziť na vyšetrovanie funkcií, ktoré sú diferencovateľné na intervale.

- **Vyšetrovanie monotónnosti funkcie**

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna, t.j. rastúca (neklesajúca) alebo klesajúca (nerastúca).

Veta 4.3.8.
Ak je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$ a má na I deriváciu f', potom platí:

a) f je na I rastúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \geq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f' nulová.
b) f je na I klesajúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \leq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f' nulová.

c) f je na I neklesajúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \geq 0$.
d) f je na I nerastúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \leq 0$.
e) f je na I konštantná práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) = 0$.

Dôkaz.
a) $NP_{\Rightarrow}$: Funkcia f je na I rastúca, t.j. pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
Nech $x_0 \in I$ je ľubovoľný bod. Pre všetky $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$. Z toho vyplýva

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \quad \text{t.j.} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

Analogicky pre všetky $x > x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$. To znamená, že

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \quad \text{t.j.} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$.
Predpokladajme, že existuje interval $J \subset I$ taký, že $f'(x) = 0$ pre všetky $x \in J$. Potom (dôsledok 4.3.3.a) je f na J konštantná. To je spor s tým, že je rastúca na I.

$PP_{\Leftarrow}$: Nech $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Potom (Lagrangeova veta) existuje $c \in (x_1\,;\,x_2)$ také, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \qquad \text{pričom} \quad f'(c) \geq 0, \; x_2 - x_1 > 0.$$

Potom platí $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, t.j. $f(x_1) \leq f(x_2)$. To znamená, že f je neklesajúca na I.
Ak je f na nejakom otvorenom intervale $J \subset I$ konštantná, potom (príklad 4.1.3) pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$. To je spor s predpokladom.

b) Dokážeme pomocou funkcie $g = -f$, ktorá spĺňa predpoklady časti a).

c), d) Dôkaz je podobný ako dôkaz častí a), b).

e) Vyplýva z častí a), b). ■

Poznámka 4.3.15.
Ak je funkcia f spojitá a rastúca, resp. klesajúca na intervale I, potom môže pre nejaké body $x \in I$ platiť $f'(x) = 0$. To znamená, že derivácia f' môže byť nulová iba v jednotlivých bodoch, nie na otvorenom podintervale intervalu I. V ostatných bodoch $x \in I$ musí platiť $f'(x) > 0$ v prípade rastúcej funkcie a $f'(x) < 0$ v prípade klesajúcej funkcie.

Príklad 4.3.20.
a) Funkcia $f(x) = x^2/(4+4x)$, $x \in R - \{-1\}$ je spojitá. Pre všetky $x \neq -1$ platí

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4+4x}\right]' = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{1+x}\right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{4(1+x)^2} = \frac{x(2+x)}{4(1+x)^2}.$$

Potom platí $f'(-2) = f'(0) = 0$. V bode $x = -1$ nie je f' definovaná. Pre všetky $x \neq -1$ platí $(1+x)^2 > 0$, t.j. monotónnosť funkcie f (obrázok 4.3.11) závisí od $x(2+x)$.
Reálnu os R rozdelíme na intervaly $(-\infty\,;\,-2\rangle$, $\langle -2\,;\,-1)$, $(-1\,;\,0\rangle$, $\langle 0\,;\,\infty)$ a zistíme znamienko funkcie f' na týchto intervaloch.
Pre $x \in (-\infty\,;\,-2) \cup (0\,;\,\infty)$ platí $f'(x) > 0$, t.j. f je rastúca na $(-\infty\,;\,-2\rangle$ a na $\langle 0\,;\,\infty)$.
Pre $x \in (-2\,;\,-1) \cup (-1\,;\,0)$ platí $f'(x) < 0$, t.j. f je klesajúca na $\langle -2\,;\,-1)$ a na $(-1\,;\,0\rangle$.

b) Funkcia $f(x) = 4x/(1+x^2)$, $x \in R$ je spojitá. Pre všetky $x \in R$ platí

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2}\right]' = \frac{4(1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

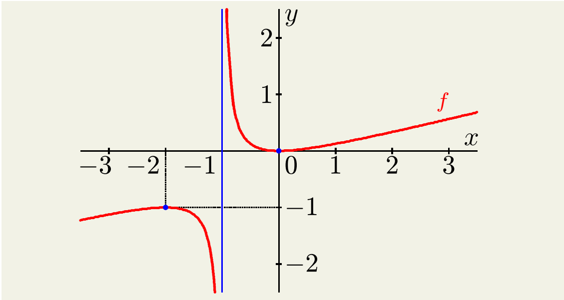
Nulové body derivácie f' sú $x = \pm 1$, t.j. $f'(-1) = f'(1) = 0$.
Pre všetky $x \in R$ platí $(1+x^2)^2 > 0$, pre všetky $x \in (-1\,;\,1)$ platí $1 - x^2 > 0$ a pre všetky $x \notin \langle -1\,;\,1\rangle$ platí $1 - x^2 < 0$. Z toho vyplýva (viď obrázok 4.3.12), že je funkcia f rastúca na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ a klesajúca na intervaloch $(-\infty\,;\,-1\rangle$ a $\langle 1\,;\,\infty)$. ■

Veta 4.3.9.
Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu (aj nevlastnú), pre ktorú platí $f'(x_0) > 0$ [resp. $f'(x_0) < 0$], potom je funkcia f rastúca [resp. klesajúca] v bode x_0.

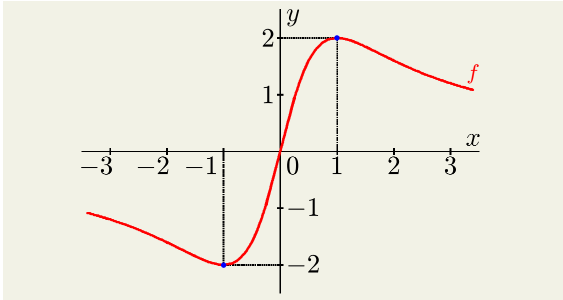
Dôkaz.
Nech platí $0 < f'(x_0)$, t.j. existuje limita $0 < f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \infty$.

Potom existuje prstencové okolie $P(x_0)$ tak, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $0 < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Potom pre všetky $x \in P(x_0)$, $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$ a pre $x > x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$. To znamená, že je f rastúca v bode x_0. Pre $f'(x_0) < 0$ je dôkaz analogický. ■



Obr. 4.3.11: Funkcia $f(x) = \dfrac{x^2}{4+4x}$.



Obr. 4.3.12: Funkcia $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$.

• Lokálne a globálne extrémy funkcie

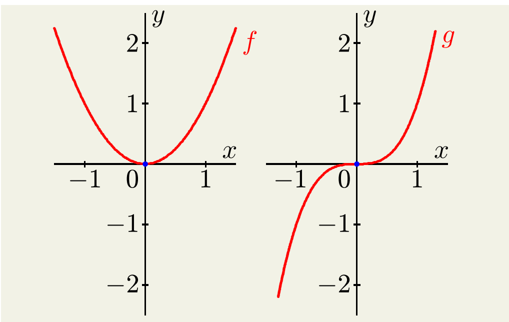
Body, v ktorých má spojitá funkcia f lokálne extrémy, úzko súvisia s intervalmi, na ktorých je táto funkcia monotónna (rýdzo monotónna). Z vety 4.3.1 priamo vyplýva nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie.

Veta 4.3.10 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie).
Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ lokálny extrém, potom (pokiaľ existuje) $f'(x_0) = 0$.

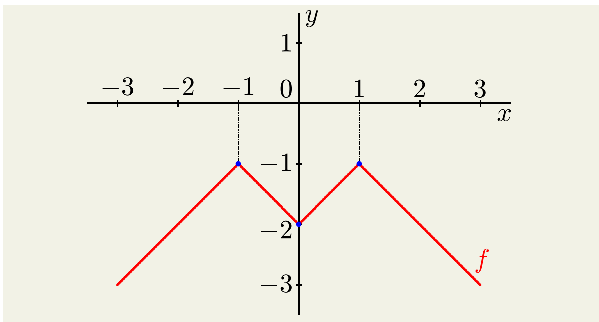
Poznámka 4.3.16.
Opačné tvrdenie vo vete 4.3.10 neplatí, t.j. podmienka $f'(x_0) = 0$ nie je postačujúca. To znamená, že $f'(x_0) = 0$ nezaručuje lokálny extrém. Na druhej strane môže mať spojitá funkcia f lokálny extrém aj v takom bode $x_0 \in D(f)$, v ktorom neexistuje derivácia $f'(x_0)$.

Príklad 4.3.21.
a) Funkcia $f(x) = x^2$ má v bode $x_0 = 0$ (ostré) lokálne minimum a platí $f'(0) = 2 \cdot 0^1 = 0$. Funkcia $g(x) = x^3$ nemá v bode $x_0 = 0$ extrém, aj keď $g'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ (obrázok 4.3.13).

b) Funkcia $f(x) = |x| - |x-1| - |x+1|$ má v bode $x_0 = 0$ lokálne minimum, aj keď $f'(0)$ neexistuje (obrázok 4.3.14). Platí totiž $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. ■



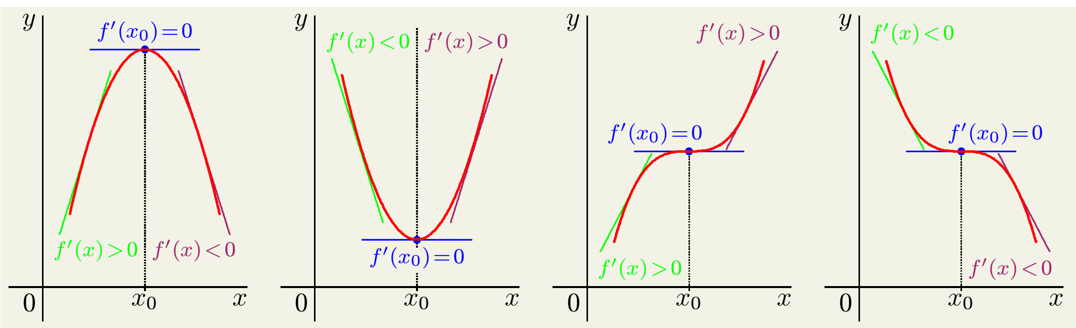
Obr. 4.3.13: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.



Obr. 4.3.14: $f(x) = |x| - |x-1| - |x+1|$.

Z vety 4.3.10 vyplýva, že ak chceme nájsť lokálne extrémy funkcie f, musíme určiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(x_0) = 0$. Je zrejmé, že nie vo všetkých týchto bodoch musí mať funkcia f extrém.

Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu a platí $f'(x_0) = 0$, potom sa tento bod nazýva **stacionárnym bodom funkcie f** (obrázok 4.3.15).



Obr. 4.3.15: Stacionárny bod x_0 funkcie f.

Veta 4.3.11 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie).
Nech $x_0 \in D(f)$ je stacionárny bod funkcie f, t.j. $f'(x_0) = 0$. Nech $P(x_0)$ je prstencové také okolie, také že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí:

a) $f'(x) > 0$ pre $x < x_0$ a $f'(x) < 0$ pre $x > x_0$, potom má f v x_0 ostré lokálne maximum.
b) $f'(x) < 0$ pre $x < x_0$ a $f'(x) > 0$ pre $x > x_0$, potom má f v x_0 ostré lokálne minimum.
c) $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$, potom f v bode x_0 nemá lokálny extrém.

Dôkaz.
a) Z vety 4.3.8 vyplýva, že pre $x < x_0$ je f klesajúca a pre $x > x_0$ je f rastúca. Potom pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$, t.j. f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

b) Dôkaz je analogický ako v a).

c) Funkcia f je buď klesajúca alebo rastúca a nemá lokálny extrém. ■

Ak má funkcia f v stacionárnom bode x_0 druhú deriváciu, potom môžeme v niektorých prípadoch rozhodnúť o existencii lokálneho extrému pomocou tejto derivácie $f''(x_0)$.

Veta 4.3.12.
Nech $x_0 \in D(f)$ je stacionárny bod f, t.j. $f'(x_0) = 0$ a nech existuje konečná $f''(x_0) \neq 0$. Potom má f v bode x_0 ostrý lokálny extrém a platí:

a) Ak $f''(x_0) < 0$, potom má f v bode x_0 ostré lokálne maximum.
b) Ak $f''(x_0) > 0$, potom má f v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Dôkaz.
a) Keďže $f''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$, potom existuje okolie $P(x_0)$ také, že

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \quad \text{pre všetky} \quad x \in P(x_0).$$

Potom pre $x < x_0$ platí $f'(x) > 0$ a pre $x > x_0$ platí $f'(x) < 0$. To znamená (veta 4.3.11), že v bode x_0 má f ostré lokálne maximum.

b) Dôkaz je analogický ako pre $f''(x_0) < 0$ v časti a). ■

Príklad 4.3.22.
Nájdite lokálne extrémy funkcie f na množine R, ak platí:

a) $f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1|$, b) $f(x) = -x^3 - x^2 + x$, c) $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

Riešenie.
Najprv nájdeme stacionárne body funkcie f, t.j. reálne korene rovnice $f'(x) = 0$.

a) Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R$ a môžeme ju vyjadriť v tvare

$$f(x) = \left|x^2 - 1\right| + x^2 + 1 = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2, & \text{pre } x^2 \le 1, \text{ t.j. } x \in \langle -1\,;\,1\rangle\,, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2, & \text{pre } x^2 \ge 1, \text{ t.j. } x \notin (-1\,;\,1)\,. \end{cases}$$

Potom platí $f'(x) = 0$ pre $x \in (-1\,;\,1)$, $f'(x) = 4x > 0$ pre $x \in (1\,;\,\infty)$, $f'(x) = 4x < 0$ pre $x \in (-\infty\,;\,-1)$. Derivácie $f'_-(-1) = -4$, $f'_+(-1) = 0$, $f'_-(1) = 0$, $f'_+(1) = 4$.
To znamená, že f je na $(-\infty\,;\,-1)$ klesajúca, na $\langle -1\,;\,1\rangle$ konštantná, na $(1\,;\,\infty)$ rastúca a pre všetky $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$ nadobúda f neostré lokálne minimum, ktoré má hodnotu 2 (obrázok 4.3.16).

b) Funkcia f má stacionárne body $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$, pretože pre všetky $x \in R$ platí

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3\left(x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}\right) = -3\,(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Pre $x \in (-\infty\,;\,-1)$ platí $f'(x) < 0$ a f je klesajúca. Pre $x \in (-1\,;\,1/3)$ platí $f'(x) > 0$ a f je rastúca. Pre $x \in (1/3\,;\,\infty)$ platí $f'(x) < 0$ a f je klesajúca. To znamená, že v bode $x_1 = -1$ je ostré lokálne minimum $f(x_1) = -1$ a v bode $x_2 = 1/3$ ostré lokálne maximum $f(x_2) = 5/27$ (obrázok 4.3.17).

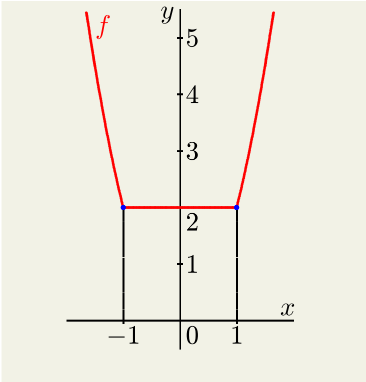
c) Rovnica $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 0$ nemá reálne korene, pretože pre všetky $x \in R$ platí

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right) + 1 - \frac{3}{9} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \ge \frac{2}{3} > 0.$$

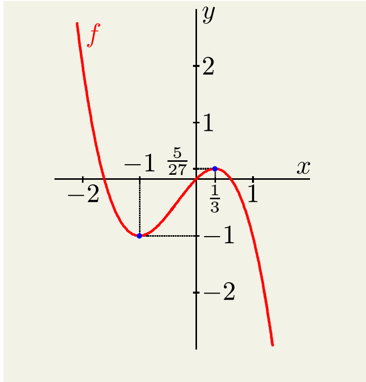
To znamená, že f nemá stacionárne body a ani lokálne extrémy (obrázok 4.3.18). ■

Okrem lokálnych extrémov nás pri vyšetrovaní priebehu funkcie zaujímajú **globálne** (**absolútne**) **extrémy funkcie**. Ak je funkcia f definovaná a spojitá na uzavretom intervale, potom podľa Weierstrasseho vety 3.3.10 nadobúda na tomto intervale svoje extrémy.

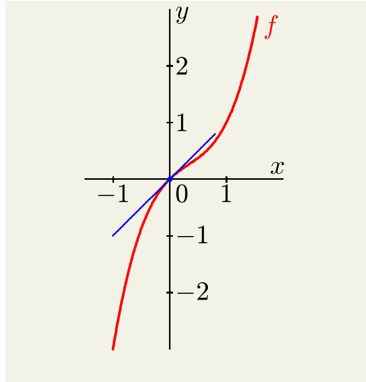
Ak má funkcia f globálny extrém vo vnútornom bode intervalu, potom je zhodný s lokálnym extrémom. Funkcia f môže nadobúdať globálne extrémy aj v krajných bodoch intervalu (pokiaľ je v nich definovaná) a tiež v bodoch, v ktorých neexistuje derivácia f'. To znamená, že musíme porovnať ich hodnoty s lokálnymi extrémami danej funkcie.



Obr. 4.3.16: Graf funkcie $f(x) = |x^2-1| + |x^2+1|$.



Obr. 4.3.17: Graf funkcie $f(x) = -x^3 - x^2 + x$.

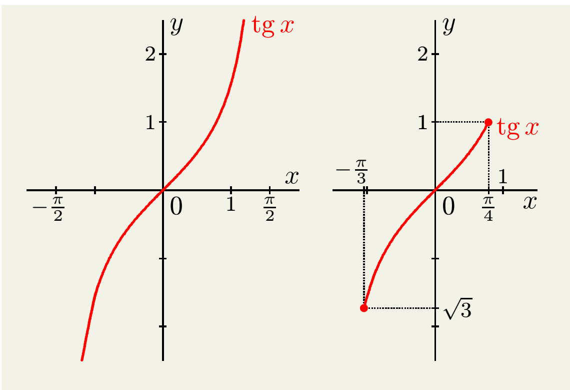


Obr. 4.3.18: Graf funkcie $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

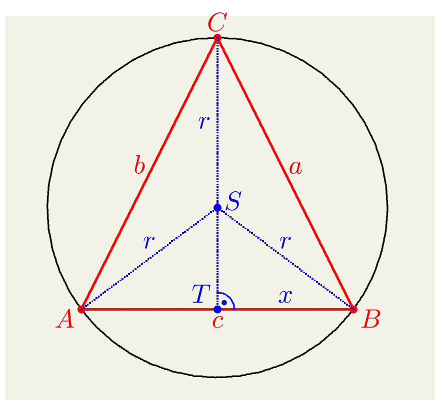
Príklad 4.3.23.
a) Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2\,;\,\pi/2)$ nemá lokálne ani globálne extrémy.
Pre všetky $x \in (-\pi/2\,;\,\pi/2)$ platí $f'(x) = 1/\cos^2 x > 0$, t.j. f nemá stacionárne body a ani extrémy (obrázok 4.3.19 vľavo).

Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \langle -\pi/3\,;\,\pi/4\rangle$ nemá lokálne, ale má globálne extrémy.
Pre všetky $x \in \langle -\pi/3\,;\,\pi/4\rangle$ platí $f'(x) = 1/\cos^2 x > 0$, t.j. f je rastúca. V bode $-\pi/3$ má globálne minimum $\sqrt{3}$ a v bode $\pi/4$ globálne maximum 1 (obrázok 4.3.19 vpravo).

b) Dirichletova funkcia χ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in R$. Takže extrémy nezistíme pomocou jej derivácie. Je zrejmé, že v každom bode $x \in R - Q$ má lokálne a globálne minimum a v každom bode $x \in Q$ má lokálne a globálne maximum. ■



Obr. 4.3.19: Príklad 4.3.23.



Obr. 4.3.20: Príklad 4.3.24.

Príklad 4.3.24.
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom.

Riešenie.
Označme trojuholník ABC, stred jeho základne T a stred kružnice S (obrázok 4.3.20).
Označme $|TB| = x$, $x \in (0\,;\,r)$. Trojuholník STB je pravouhlý a (Pytagorova veta) platí

$$|TS|^2 + |TB|^2 = |SB|^2 = r^2, \quad \text{t.j.} \quad |TS| = \sqrt{r^2 - |TB|^2} = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pre obsah $P(x)$ trojuholníka ABC potom pre všetky $x \in (0\,;\,r)$ platí

$$P(x) = \frac{|AB| \cdot |CT|}{2} = |TB| \cdot |CT| = x\,[|CS| + |TS|] = x\left[r + \sqrt{r^2 - x^2}\right],$$

$$P'(x) = \left[r + \sqrt{r^2 - x^2}\right] + x\left[0 + \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right] = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Potom $P'(x) = 0$ práve vtedy, ak $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. Z toho vyplýva

$$r\sqrt{r^2 - x^2} = 2x^2 - r^2, \quad \text{t.j.} \quad r^2[r^2 - x^2] = (2x^2 - r^2)^2 = 4x^4 - 4x^2r^2 + r^4.$$

Posledná rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$-x^2r^2 = 4x^4 - 4x^2r^2, \quad \text{t.j.} \quad 0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(4x^2 - 3r^2),$$

ktorá má tri riešenia $x_{1,2} = \pm r\sqrt{3}/2$, $x_3 = 0$. Úlohe vyhovuje iba $x_1 = r\sqrt{3}/2 > 0$.

Počítať $P''(x_1)$ nie je zložité, ale je pracné. Preto použijeme vetu 4.3.11.
Funkcia P' je spojitá na intervale $(0\,;\,r)$ a má iba jeden nulový bod $x_1 = r\sqrt{3}/2 \approx 0{,}866r$, v ktorom mení znamienko. Na určenie znamienka funkcie P' v ľavom, resp. pravom prstencovom okolí bodu x_1 nám potom postačí jeden bod. Platí napríklad

$$P'(0{,}8\,r) = \frac{r\sqrt{r^2 - 0{,}64r^2} + r^2 - 1{,}28r^2}{\sqrt{r^2 - 0{,}64r^2}} = \frac{\sqrt{0{,}36} - 0{,}28}{\sqrt{0{,}36}}r = \frac{0{,}6 - 0{,}28}{0{,}6}r > 0,$$

$$P'(0{,}9\,r) = \frac{r\sqrt{r^2 - 0{,}81r^2} + r^2 - 1{,}62r^2}{\sqrt{r^2 - 0{,}81r^2}} = \frac{\sqrt{0{,}19} - 0{,}62}{\sqrt{0{,}19}}r < \frac{\sqrt{0{,}25} - 0{,}62}{\sqrt{0{,}19}}r < 0.$$

Z toho vyplýva, že funkcia P má pre $x_1 = |TB| = r\sqrt{3}/2$ ostré lokálne maximum.
Pre výšku a základňu trojuholníka ABC potom platí

$$|TS| = \sqrt{r^2 - \frac{3r^2}{4}} = \sqrt{\frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}, \quad |CT| = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}, \quad |AB| = \sqrt{3}r.$$

Pre ramená $|AC| = |BC|$ trojuholníka ABC na základe Pytagorovej vety platí

$$|BC|^2 = |TB|^2 + |CT|^2 = \frac{3r^2}{4} + \frac{9r^2}{4} = \frac{12r^2}{4} = 3r^2, \quad \text{t.j.} \quad |AC| = |BC| = \sqrt{3}r.$$

To znamená, že trojuholník ABC s maximálnym obsahom je rovnostranný. ■

• Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia konvexná alebo konkávna, prípadne rýdzo konvexná alebo rýdzo konkávna. Najprv uvedieme bez dôkazu vetu 4.3.13.

Veta 4.3.13.
Ak je funkcia f na intervale I diferencovateľná, potom platí:

a) f je na I konvexná práve vtedy, ak je f' na I neklesajúca.
b) f je na I rýdzo konvexná práve vtedy, ak je f' na I rastúca.
c) f je na I konkávna práve vtedy, ak je f' na I nerastúca.
d) f je na I rýdzo konkávna práve vtedy, ak je f' na I klesajúca.

Ak má funkcia f na intervale I druhú deriváciu f'', potom môžeme jej konvexnosť a konkávnosť vyšetrovať pomocou monotónnosti funkcie f' na základe vety 4.3.8.

Veta 4.3.14.
Ak má funkcia f na intervale $I \subset R$ druhú deriváciu f'', potom platí:

a) f je na I rýdzo konvexná práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \geq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f'' nulová.
b) f je na I rýdzo konkávna práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \leq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f'' nulová.
c) f je na I konvexná práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \geq 0$.
d) f je na I konkávna práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \leq 0$.

Dôsledok 4.3.14.a.
Ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) > 0$ [resp. $f''(x) < 0$], potom je f na I rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna].

Z vety 4.3.14 a jej dôsledku vyplýva praktický návod ako postupovať pri určovaní intervalov konvexnosti a konkávnosti danej funkcie f v prípade, že existuje jej druhá derivácia f''. Vyriešime rovnicu $f''(x) = 0$ a nájdeme intervaly, na ktorých je funkcia f'' nezáporná a nekladná, resp. kladná a záporná.

Príklad 4.3.25.
Nájdite intervaly, na ktorých je konvexná a konkávna funkcia f, ak:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, b) $f(x) = 2x/(1 + x^2)$, c) $f(x) = \max\{x, x^2\}$.

Riešenie.
a) Funkcia f je definovaná a spojitá na množine R a pre všetky $x \in R$ platí

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad f''(x) = 6x - 2, \quad \text{t.j.} \quad f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3}.$$

Funkcia f'' je spojitá na R a má iba jeden koreň $x = 1/3$ (obr. 4.3.21 vľavo). Potom pre všetky $x \in (-\infty\,;\,1/3)$ platí $f''(x) < 0$ a pre všetky $x \in (1/3\,;\,\infty)$ platí $f''(x) > 0$. Z toho vyplýva, že f je rýdzo konkávna na $(-\infty\,;\,1/3\rangle$ a rýdzo konvexná na $\langle 1/3\,;\,\infty)$.

b) Funkcia f je definovaná a spojitá na množine R a pre jej derivácie f', f'' platí

$$f'(x)=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2},\ x\in R, \qquad f''(x)=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3},\ x\in R.$$

Funkcia f'' má tri korene 0, $\pm\sqrt{3}$ (obr. 4.3.21 stred). Pre $x\in\big(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\big)\cup\big(0\,;\,\sqrt{3}\big)$ platí $f''(x)<0$ a pre $x\in\big(-\sqrt{3}\,;\,0\big)\cup\big(\sqrt{3}\,;\,\infty\big)$ platí $f''(x)>0$. To znamená, že f je na $\big(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\big\rangle$ a $\big\langle 0\,;\,\sqrt{3}\big\rangle$ rýdzo konkávna a na $\big\langle -\sqrt{3}\,;\,0\big\rangle$ a $\big\langle \sqrt{3}\,;\,\infty\big)$ rýdzo konvexná .

c) Funkciu f môžeme vyjadriť v tvare (obr. 4.3.21 vpravo)

$$f(x)=x \ \text{ pre } x\in\langle 0\,;\,1\rangle\,, \qquad f(x)=x^2 \ \text{ pre } x\in(-\infty\,;\,0\rangle\cup\langle 1\,;\,\infty)\,.$$

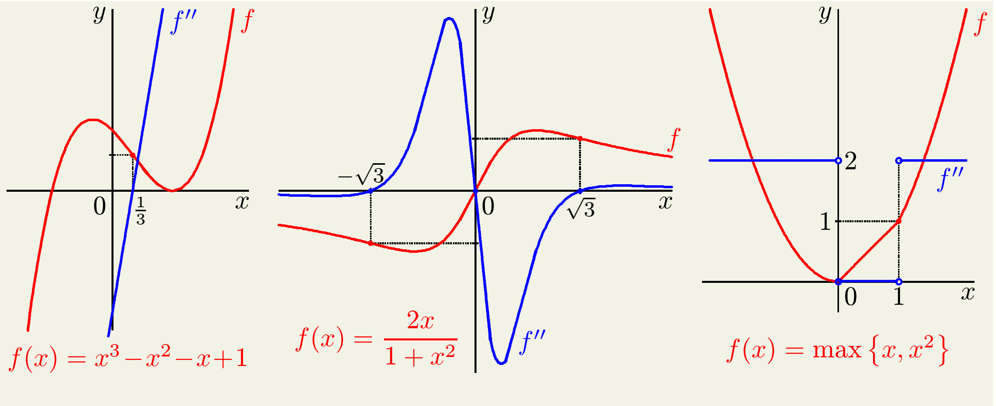
Funkcia f je spojitá na celej množine R a pre jej derivácie f', f'' platí

$$f'(x)=1,\ f''(x)=0 \ \text{ pre } x\in(0\,;\,1)\,, \quad f'(x)=2x,\ f''(x)=2 \ \text{ pre } x\in(-\infty\,;\,0)\cup(1\,;\,\infty)\,.$$

V bodoch 0 a 1 obojstranné derivácie neexistujú a pre jednostranné derivácie platí

$$f'_-(0)=0,\ f'_+(0)=1,\ f'_-(1)=1,\ f'_+(1)=2,\quad f''_-(0)=2,\ f''_+(0)=0,\ f''_-(1)=0,\ f''_+(1)=2.$$

Aj keď neexistujú $f''(0)$, $f''(1)$, je funkcia f konvexná (nie rýdzo) na celej množine R. Rýdzo konvexná je na intervaloch $(-\infty\,;\,0\rangle$ a $\langle 1\,;\,\infty)$. ■



Obr. 4.3.21: Grafy funkcií z príkladu 4.3.25.

Z definície inflexného bodu a z predchádzajúcich viet 4.3.13, 4.3.10, resp. 4.3.14 priamo vyplývajú nasledujúce tvrdenia.

Veta 4.3.15.
Nech v nejakom $O(x_0)$ existuje f'. Potom má f v bode $x_0\in D(f)$ inflexiu práve vtedy, ak pre $x<x_0$ je f' rastúca [resp. klesajúca] a pre $x>x_0$ je f' klesajúca [resp. rastúca].

Dôsledok 4.3.15.a.
Ak má f v bode x_0 inflexiu a v nejakom okolí $O(x_0)$ existuje f', potom má f' v bode x_0 ostrý lokálny extrém.

Dôsledok 4.3.15.b.
Ak má funkcia f v bode x_0 inflexiu, potom (pokiaľ existuje) $f''(x_0)=0$.

Veta 4.3.16.
Ak je f diferencovateľná v $x_0\in D(f)$ a v nejakom $P(x_0)$ existuje nenulová f'', potom:

a) Ak pre všetky $x<x_0$ platí $f''(x)>0$ [resp. $f''(x)<0$] a zároveň pre všetky $x>x_0$ platí $f''(x)<0$ [resp. $f''(x)>0$], potom má f v bode x_0 inflexiu.

b) Ak pre všetky $x\in P(x_0)$ platí $f''(x)>0$ [resp. $f''(x)<0$], potom f nemá inflexiu v x_0.

Poznámka 4.3.17.
Inflexné body budeme hľadať ako korene rovnice $f''(x)=0$ na intervale I. Avšak nie každý bod vyhovujúci tejto rovnici, musí byť inflexný (príklad 4.3.26). Na druhej strane môže mať f inflexiu aj v bode, v ktorom druhá derivácia f'' neexistuje. To znamená, že pri vyšetrovaní inflexie musíme brať do úvahy aj tieto body.

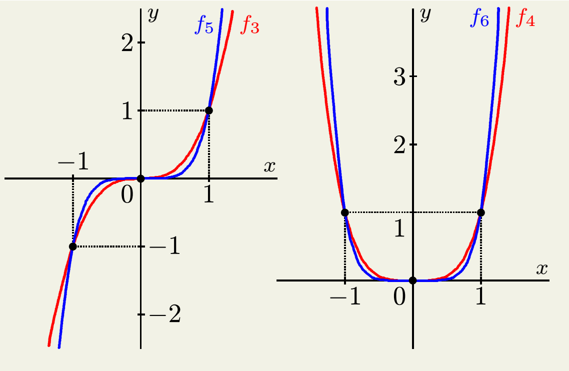
Príklad 4.3.26.
Nájdite inflexné body funkcie $f_n(x)=x^n$, $x\in R$, kde $n\in N$.

Riešenie.
Ak $n=1$, potom pre všetky $x\in R$ platí $f_1(x)=x$, $f_1'(x)=1$, $f_1''(x)=0$. To znamená (veta 4.3.14), že neexistuje interval $I\subset R$, na ktorom je funkcia f_1 rýdzo konkávna alebo rýdzo konvexná. Takže funkcia f_1 nemá inflexné body.

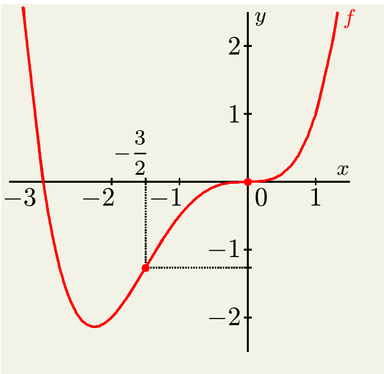
Ak $n = 2$, potom pre všetky $x \in R$ platí $f_2(x) = x^2$, $f_2'(x) = 2x$, $f_2''(x) = 2 > 0$. To znamená (veta 4.3.14), že na celej množine R je funkcia f_2 rýdzo konvexná.
Ak $n \in N$, $n \geq 3$, potom pre prvé a druhé derivácie funkcie $f_n(x) = x^n$ platí

$$f_n'(x) = nx^{n-1},\ x \in R, \qquad f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2},\ x \in R.$$

Funkcia $f_n''(x)$ je spojitá pre všetky $x \in R$ a má práve jeden nulový bod $x_0 = 0$. Z toho vyplýva, že funkcia f_n môže mať inflexiu iba v bode x_0.
Ak je n nepárne, potom je aj $n-2$ nepárne a $f_n''(x) < 0$ pre všetky $x < 0$, $f_n''(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. To znamená (veta 4.3.16), že funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ inflexiu má.
Ak je n párne, potom je aj $n-2$ párne a pre všetky $x \neq 0$ platí $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$. To znamená (veta 4.3.16), že funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ inflexiu nemá (obr. 4.3.22). ∎



Obr. 4.3.22: Grafy funkcií f_3, f_5 a f_4, f_6 z príkladu 4.3.26.



Obr. 4.3.23: Graf funkcie f z príkladu 4.3.27.

Príklad 4.3.27.
Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = \dfrac{3x^3}{4} + \dfrac{x^4}{4}$ konvexná a konkávna.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie f' a f'' platí

$$f'(x) = \frac{9x^2}{4} + x^3,\ x \in R, \qquad f''(x) = \frac{9x}{2} + 3x^2 = \frac{3x(3+2x)}{2},\ x \in R.$$

Rovnica $f''(x) = 0$ má dve riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = -3/2$. Keďže pre všetky $x \in R$ je funkcia f'' spojitá, na zistenie konvexnosti, resp. konkávnosti funkcie f stačí určiť hodnotu jedného ľubovoľného bodu z príslušného intervalu.
Na intervale $(-\infty\,;\,-3/2)$ je funkcia konvexná, pretože $f''(-2) = 3 > 0$. Na intervale $(-3/2\,;\,0)$ je funkcia konkávna, pretože $f''(-1) = -3/2 < 0$. Na intervale $(0\,;\,\infty)$ je funkcia konvexná, pretože $f''(2) = 21 > 0$.
Z toho vyplýva, že funkcia f má dva inflexné body $x_1 = 0$, $x_2 = -3/2$ (obr. 4.3.23). ∎

Ak existuje tretia derivácia $f'''(x_0)$, potom môžeme pomocou nej rozhodnúť, či x_0 je alebo nie inflexným bodom danej funkcie f. Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 4.3.17.
Ak pre funkciu f platí $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom má funkcia f v bode x_0 inflexiu.

Dôkaz.
Ak $f'''(x_0) > 0$, potom platí $\quad f'''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0.$

Potom (dôsledok 3.2.7.a) existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $f''(x)/(x - x_0) > 0$. Potom pre všetky $x < x_0$, platí $f''(x) < 0$ a pre všetky $x > x_0$, platí $f''(x) > 0$. To znamená, že x_0 je inflexný bod. Pre $f'''(x_0) < 0$ je dôkaz analogický. ∎

Príklad 4.3.28.
Nájdite intervaly, na ktorých sú konvexné a konkávne funkcie:

a) $f(x) = \sin x$, b) $f(x) = \cos x$.

Riešenie.
a) Funkcia $f(x) = \sin x$ je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie platí

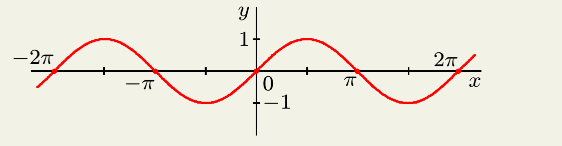
$$f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f'''(x) = -\cos x.$$

Riešením rovnice $f''(x) = -\sin x = 0$ sú body $x = k\pi$, kde $k \in Z$. Tieto body sú zároveň aj inflexné body funkcie f, pretože pre k párne platí $f'''(x) = -\cos(k\pi) = -1 < 0$ a pre k nepárne platí $f'''(x) = -\cos(k\pi) = 1 > 0$ (obr. 4.3.24).

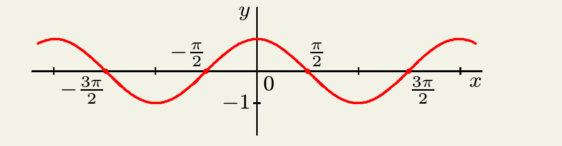
b) Funkcia $f(x) = \cos x$ je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie platí

$$f'(x) = -\sin x, \qquad f''(x) = -\cos x, \qquad f'''(x) = \sin x.$$

Riešením rovnice $f''(x) = -\cos x = 0$ sú body $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$. Tieto body sú tiež inflexné body funkcie f, pretože $f'''(x) = \sin(\pi/2 + k\pi) = 1 > 0$ pre k párne a $f'''(x) = \sin(\pi/2 + k\pi) = -1 < 0$ pre k nepárne (obr. 4.3.25). ■



Obr. 4.3.24: Funkcia $f(x) = \sin x$.



Obr. 4.3.25: Funkcia $f(x) = \cos x$.

Poznámka 4.3.18.
Z príkladu 4.3.26 vyplýva, že funkcia $f_5(x) = x^5$, $x \in R$ má v bode $x_0 = 0$ inflexiu, ale funkcia $f_4(x) = x^4$, $x \in R$ v bode $x_0 = 0$ inflexiu nemá (má tam ostré lokálne minimum).
Pre tieto funkcie platí $f_4'(0) = f_4''(0) = f_4'''(0) = 0$, $f_5'(0) = f_5''(0) = f_5'''(0) = f_5''''(0) = 0$. To znamená, že nemôžeme použiť vety 4.3.12 a 4.3.17. Túto situáciu riešia nasledujúce dve vety, ktoré prezentujeme bez dôkazov.

Veta 4.3.18.
Nech f je reálna funkcia a nech existuje $n \in N$ také, že pre derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ platí $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom:

a) Ak je n nepárne, potom f v bode x_0 nemá lokálny extrém.
   - i) Ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom je f v bode x_0 rastúca.
   - ii) Ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom je f v bode x_0 klesajúca.

b) Ak je n párne, potom má f v bode x_0 ostrý lokálny extrém.
   - i) Ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom má f v bode x_0 ostré lokálne minimum.
   - ii) Ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom má f v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Veta 4.3.19.
Nech f je reálna funkcia a nech existuje $n \in N$, $n \geq 2$ také, že pre derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ platí[14] $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom:

a) Ak je n nepárne, potom má f v bode x_0 inflexiu.

b) Ak je n párne:
   - i) Ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom je f v bode x_0 rýdzo konvexná.
   - ii) Ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom je f v bode x_0 rýdzo konkávna.

Príklad 4.3.29.
Uvažujme funkciu $f_n(x) = x^n$, $x \in R$, kde $n \in N$, $n > 1$.
Z príkladu 4.3.10 (obr. 4.3.22) vyplýva, že pre n nepárne má funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ inflexiu a pre n párne v bode x_0 inflexiu nemá.
Pre derivácie funkcie f_n do rádu n platí

$$f_n'(x) = nx^{n-1},\ f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2},\ \ldots,\ f_n^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 2x,\ f_n^{(n)}(x) = n!.$$

To znamená, že $f_n'(0) = f_n''(0) = \cdots = f_n^{(n-1)}(0) = 0$, $f_n^{(n)}(0) = n! > 0$. Z viet 4.3.18 a 4.3.19 potom vyplýva, že pre n nepárne je funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ rastúca a má v tomto bode inflexiu. Na druhej strane pre n párne je funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ rýdzo konvexná a má v tomto bode ostré lokálne minimum. ■

Príklad 4.3.30.
Nájdite extrémy a inflexné body funkcie $f(x) = \dfrac{x^7}{7} - \dfrac{x^6}{3} + \dfrac{x^5}{5} + 3$, $x \in R$.

Riešenie.
Pre derivácie f' a f'' pre všetky $x \in R$ platí

$$f'(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 = x^4(x-1)^2, \quad f''(x) = 6x^5 - 10x^4 + 4x^3 = 2x^3(x-1)(3x-2).$$

[14] Na rozdiel od vety 4.3.18 nás nezaujíma hodnota $f'(x_0)$.

Rovnica $f'(x) = 0$ má dve riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a rovnica $f''(x) = 0$ má tri riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 2/3$. Pre derivácie $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ pre všetky $x \in R$ platí

$$f^{(3)}(x) = 2(15x^4 - 20x^3 + 6x^2), \; f^{(4)}(x) = 24(5x^3 - 5x^2 + x), \; f^{(5)}(x) = 24(15x^2 - 10x + 1).$$

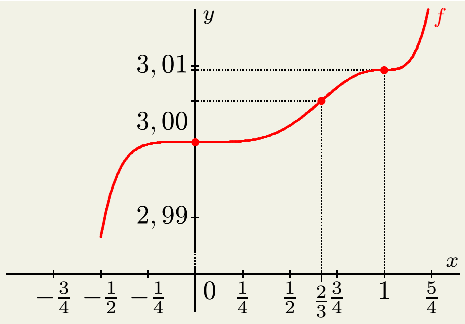
Pre hodnoty funkcií $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., $f^{(5)}$ v bodoch $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ platí

$$f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0, \; f^{(5)}(0) = 24, \quad f^{(1)}(1) = f^{(2)}(1) = 0, \; f^{(3)}(1) = 2.$$

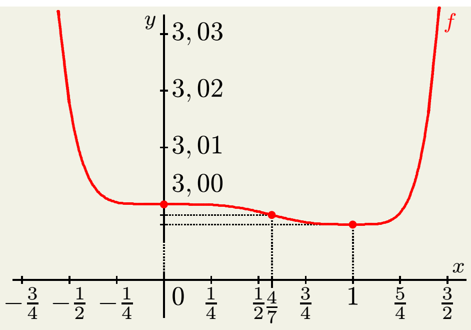
Z vety 4.3.18 vyplýva, že v bodoch $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ je funkcia f rastúca. Z vety 4.3.19 vyplýva, že sú tieto body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ inflexné. Ďalej pre $x_3 = 2/3$ platí

$$f'(2/3) = 16/729 > 0, \; f''(2/3) = 0, \; f'''(2/3) = -16/27 < 0.$$

Vetu 4.3.18 použiť nemôžeme. Funkcia f v bode x_3 nie je klesajúca, ale je rastúca (veta 4.3.8). Z vety 4.3.19 vyplýva, že je bod x_3 inflexný. To znamená, že f nemá lokálne a ani globálne extrémy a že body x_1, x_2, x_3 sú inflexné (viď obr. 4.3.26). ■



Obr. 4.3.26: Funkcia z príkladu 4.3.30 (os y je zväčšená 40-krát vzhľadom na x).



Obr. 4.3.27: Funkcia z príkladu 4.3.31 (os y je zväčšená 30-krát vzhľadom na x).

Príklad 4.3.31.
Nájdite extrémy a inflexné body funkcie $f(x) = \dfrac{x^8}{8} - \dfrac{3x^7}{7} + \dfrac{x^6}{2} - \dfrac{x^5}{5} + 3$, $x \in R$.

Riešenie.
Pre prvú a druhú deriváciu funkcie f na celej množine R platí

$$f'(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 = x^4(x-1)^3, \; x \in R,$$
$$f''(x) = 7x^6 - 18x^5 + 15x^4 - 4x^3 = x^3(x-1)^2(7x-4), \; x \in R.$$

Rovnica $f'(x) = 0$ má dve riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a rovnica $f''(x) = 0$ má tri riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 4/7$. Ďalej pre derivácie funkcie f do rádu 5 platí

$$f^{(3)}(x) = 6(7x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 2x^2), \; x \in R,$$
$$f^{(4)}(x) = 6(35x^4 - 60x^3 + 30x^2 - 4x), \; x \in R,$$
$$f^{(5)}(x) = 24(35x^3 - 45x^2 + 15x - 1), \; x \in R.$$

Pre hodnoty funkcií f', f'',..., $f^{(5)}$ v bodoch $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4/7$ platí

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = -24 < 0,$$
$$f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 0, \qquad f^{(4)}(1) = 6 > 0,$$
$$f'(4/7) \approx -0,0084 < 0, \quad f''(4/7) = 0, \quad f^{(3)}(4/7) \approx 0,2399 > 0.$$

Z toho vyplýva (vety 4.3.18, 4.3.19 a 4.3.8), že v bodoch $x_1 = 0$, $x_3 = 4/7$ je funkcia f klesajúca, tieto body sú inflexné a v bode $x_2 = 1$ je funkcia f rýdzo konvexná, v bode $x_2 = 1$ má lokálne minimum (viď obr. 4.3.27). ■

- **Celkové vyšetrenie priebehu funkcie**

V tejto časti zhrnieme všetky naše doterajšie výsledky o funkciách a uvedieme postup na celkové vyšetrenie priebehu funkcie. Tento postup nemusíme považovať za záväzný predpis, ale skôr za návod k tomu, ako môžeme pri riešení tohto problému postupovať. Zhrnieme ho do nasledujúcich bodov:

1. Určíme definičný obor funkcie (pokiaľ nie je zadaný).
2. Určíme, či je funkcia párna, nepárna alebo periodická.
3. Určíme nulové body funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.

4. Určíme všetky body spojitosti a nespojitosti funkcie. V bodoch nespojitosti a v hraničných bodoch definičného oboru (vrátane nevlastných bodov $\pm\infty$) určíme jednostranné limity danej funkcie.
5. Určíme stacionárne body funkcie, lokálne a globálne extrémy funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca, resp. konštantná.
6. Určíme inflexné body funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
7. Určíme asymptoty grafu funkcie a načrtneme graf funkcie.

Poznámka 4.3.19.
Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám vo väčšine prípadov poskytne jej graf. Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje. Mnohokrát sú tieto informácie nedostatočné, preto ich musíme vhodne doplniť. Sú to napríklad nulové body prvej a druhej derivácie funkcie, dotyčnice grafu funkcie v niektorých dôležitých bodoch (napríklad v inflexných bodoch) alebo iba vhodne zvolené funkčné hodnoty.

Príklad 4.3.32.
Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{8(x-2)}{x^2}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R - \{0\}$, t.j. $D(f) = (-\infty\,;\,0) \cup (0\,;\,\infty)$.
Funkcia f nie je periodická, nie je párna, ani nepárna.
Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$, nie je spojitá v bode $x_1 = 0$. Funkcia f má jeden nulový bod $x_2 = 2$, t.j. $f(2) = 0$. Na intervale $(-\infty\,;\,0)$ je funkcia f záporná, na intervale $(0\,;\,2)$ je tiež záporná a na intervale $(2\,;\,\infty)$ je kladná.
Pre všetky $x \neq 0$ platí $x^2 > 0$. Z toho vyplýva na základe vety 3.2.6, že platí

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = -\infty,$$

t.j. priamka $x = 0$ predstavuje asymptotu bez smernice.
Pre jej limity v bodoch $\pm\infty$ platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right] = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0. \tag{4.20}$$

Pre prvú deriváciu funkcie f pre všetky $x \in R$, $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8\cdot x^2 - (8x-16)\cdot 2x}{x^4} = \frac{32x - 8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3} = 8\frac{4-x}{x^3}.$$

To znamená, že funkcia f' má jeden nulový bod $x_3 = 4$. Funkcia f' je spojitá na množine $R - \{0\}$, na intervale $(-\infty\,;\,0)$ je záporná, na intervale $(0\,;\,4)$ je kladná a na intervale $(4\,;\,\infty)$ je záporná. Z toho vyplýva, že je funkcia f klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0)$, rastúca na intervale $(0\,;\,4\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 4\,;\,\infty)$. To znamená, že v bode $x_3 = 4$ má funkcia f lokálne maximum $f(4) = 1$.
Pre druhú deriváciu funkcie f na množine $R - \{0\}$ platí

$$f''(x) = \left[8\frac{x-2}{x^2}\right]'' = \left[8\frac{4-x}{x^3}\right]' = 8\frac{-x\cdot x^3 - (4-x)\cdot 3x^2}{x^6} = 8\frac{2x^3 - 12x^2}{x^6} = 16\frac{x-6}{x^4}.$$

Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x \neq 0$ a má jeden nulový bod $x_4 = 6$. Na intervaloch $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,6)$ je záporná a na intervale $(6\,;\,\infty)$ je kladná. To znamená, že funkcia f je konkávna na intervaloch $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,6\rangle$ a konvexná na intervale $\langle 6\,;\,\infty)$. Z toho vyplýva, že funkcia f má jeden inflexný bod $x_4 = 6$ (tabuľka 4.3.4).
Pre asymptotu so smernicou $y = kx + q$ na základe vety 3.2.12 a vzťahu (4.20) platí

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right] = 0 - 0 = 0,$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Takže asymptotou so smernicou je priamka $y = 0$, t.j. os x (obrázok 4.3.28). ■

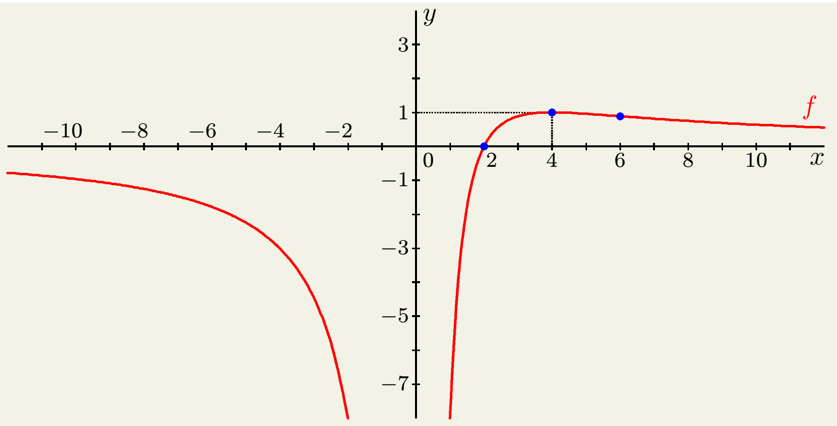
Príklad 4.3.33.
Vyšetrite priebeh funkcie: a) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x+2}$, b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-2}$.

Riešenie.
a) Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R - \{-2\}$, t.j. $D(f) = (-\infty\,;\,-2) \cup (-2\,;\,\infty)$. Môžeme ju vyjadriť v tvare

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{x+2} = -\dfrac{x+2-3}{x+2} = -1 + \dfrac{3}{x+2}, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,-2) \cup (-2\,;\,1)\,, \\[2ex] \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{x+2-3}{x+2} = 1 - \dfrac{3}{x+2}, & \text{pre } x \in \langle 1\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

$(-\infty\,;0)$	$(0\,;2)$	$(2\,;4)$	$(4\,;6)$	$(6\,;\infty)$
$0\ldots$ bod nespojitosti	$2\ldots$ nulový bod			
$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$+$ kladná $+$ $f(x)>0$		
		$4\ldots$ lokálne maximum		
$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$	$\nearrow$ rastie $\nearrow$ $f'(x)>0$		$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$	
			$6\ldots$ inflexný bod	
$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x)<0$	$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x)<0$			$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x)>0$

Tab. 4.3.4: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x)=\dfrac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.32.



Obr. 4.3.28: Graf funkcie $f(x)=\dfrac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.32.

Funkcia f nie je periodická, nie je párna, ani nepárna.
Funkcia f je spojitá na $D(f)$. Pre jej jednostranné limity v bode $x_1=-2$ platí

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{|x-1|}{x+2}=-\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{|x-1|}{x+2}=\infty.$$

To znamená, že sa funkcia f v bode $x_1=-2$ nedá dodefinovať tak, aby bola spojitá. Ďalej z toho vyplýva, že asymptota bez smernice je určená rovnicou $x=-2$.
Funkcia f má jeden nulový bod $x_2=1$, t.j. $f(1)=0$. Na intervale $(-\infty\,;-2)$ je funkcia f záporná, na intervale $(-2\,;1)$ je kladná a na intervale $(1\,;\infty)$ je tiež kladná.
Pre nevlastné limity v bodoch $\pm\infty$ platí

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{3}{x+2}\right]=-1, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{3}{x+2}\right]=1. \tag{4.21}$$

Pre prvú deriváciu funkcie $f(x)$, $x\in R-\{-2\}$ platí

$$f'(x)=\begin{cases}\left[-1+3(x+2)^{-1}\right]'=-3(x+2)^{-2}=\dfrac{-3}{(x+2)^2}<0, & \text{pre } x\in(-\infty\,;-2)\cup(-2\,;1)\,,\\[2ex] \left[1-3(x+2)^{-1}\right]'=3(x+2)^{-2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\infty)\,.\end{cases}$$

T.j. funkcia f' nemá nulové body. Funkcia f' je spojitá na množine $R-\{-2,1\}$, na intervaloch $(-\infty\,;-2)$, $(-2\,;1)$ je záporná a na intervale $(1\,;\infty)$ je kladná. Z toho vyplýva, že je funkcia f klesajúca na intervaloch $(-\infty\,;-2)$ a $(-2\,;1\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 1\,;\infty)$. To znamená, že v bode $x_2=1$ má funkcia f lokálne minimum $f(1)=0$.
Pre druhú deriváciu funkcie $f(x)$, $x\in R-\{-2,1\}$ platí

$$f''(x)=\begin{cases}\left[-3(x+2)^{-2}\right]'=6(x+2)^{-3}=\dfrac{6}{(x+2)^3}, & \text{pre } x\in(-\infty\,;-2)\cup(-2\,;1)\,,\\[2ex] \left[3(x+2)^{-2}\right]'=-6(x+2)^{-3}=\dfrac{-6}{(x+2)^3}, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\infty)\,.\end{cases}$$

Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x \neq -2$, $x \neq 1$ a nemá nulové body. Na intervale $(-\infty\,;\,-2)$ je záporná, na intervale $(-2\,;\,1)$ je kladná a na intervale $(1\,;\,\infty)$ je záporná. To znamená, že funkcia f je konkávna na intervaloch $(-\infty\,;\,-2)$, $\langle 1\,;\,\infty\rangle$ a konvexná na intervale $\langle -2\,;\,1\rangle$. Z toho vyplýva, že funkcia f má jeden inflexný bod $x_3 = 1$ (tabuľka 4.3.5).
Pre asymptotu so smernicou $y = kx + q$ na základe vety 3.2.12 a vzťahov (4.21) platí

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \pm 1 \cdot 0 = 0,$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad q_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Takže asymptoty so smernicou sú dve priamky $y = 1$ a $y = -1$ (obrázok 4.3.29).

$(-\infty\,;\,-2)$	$(-2\,;\,1)$	$(1\,;\,\infty)$
-2 ... bod nespojitosti		1 ... nulový bod
$-$ záporná $-$ $f(x) < 0$	$+$ kladná $+$ $f(x) > 0$	$-$ záporná $-$ $f(x) < 0$
	1 ... lokálne minimum	
$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x) < 0$	$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x) < 0$	$\nearrow$ rastie $\nearrow$ $f'(x) > 0$
	1 ... inflexný bod	
$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$	$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x) > 0$	$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$

Tab. 4.3.5: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x+2}$ z príkladu 4.3.33 a).

b) Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R - \{2\}$, t.j. $D(f) = (-\infty\,;\,2) \cup (2\,;\,\infty)$. Môžeme ju vyjadriť v tvare

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{x-2} = -\dfrac{x-2+1}{x-2} = -1 - \dfrac{1}{x-2}, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,1)\,, \\[2ex] \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-2+1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}, & \text{pre } x \in \langle 1\,;\,2) \cup (2\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

Funkcia f nie je periodická, nie je párna, ani nepárna.
Funkcia f je spojitá na $D(f)$. Pre jej jednostranné limity v bode $x_1 = 2$ platí

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{|x-1|}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{|x-1|}{x-2} = \infty.$$

To znamená, že sa funkcia f v bode $x_1 = 2$ nedá dodefinovať tak, aby bola spojitá. Ďalej z toho vyplýva, že asymptota bez smernice je určená rovnicou $x = 2$.
Funkcia f má jeden nulový bod $x_2 = 1$, t.j. $f(1) = 0$. Na intervaloch $(-\infty\,;\,1)$, $(1\,;\,2)$ je funkcia f záporná a na intervale $(2\,;\,\infty)$ je kladná.
Pre nevlastné limity v bodoch $\pm\infty$ platí

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[-1 - \frac{1}{x+2}\right] = -1, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left[1 + \frac{1}{x+2}\right] = 1. \tag{4.22}$$

Pre prvú deriváciu funkcie $f(x)$, $x \in R - \{2\}$ platí

$$f'(x) = \begin{cases} \left[-1 - (x-2)^{-1}\right]' = (x-2)^{-2} = \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,1)\,, \\[2ex] \left[1 + (x-2)^{-1}\right]' = -(x-2)^{-2} = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0, & \text{pre } x \in (1\,;\,2) \cup (2\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

T.j. funkcia f' nemá nulové body. Funkcia f' je spojitá na množine $R - \{1, 2\}$, na intervale $(-\infty\,;\,1)$ je kladná a na intervaloch $(1\,;\,2)$, $(2\,;\,\infty)$ je záporná. Z toho vyplýva, že funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty\,;\,1\rangle$ a klesajúca na intervaloch $(1\,;\,-2)$ a $(-2\,;\,\infty)$. To znamená, že v bode $x_2 = 1$ má funkcia f lokálne maximum $f(1) = 0$.
Pre druhú deriváciu funkcie $f(x)$, $x \in R - \{2\}$ platí

$$f''(x) = \begin{cases} \left[(x-2)^{-2}\right]' = -2(x-2)^{-3} = \dfrac{-2}{(x-2)^3}, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,1)\,, \\[2ex] \left[-(x-2)^{-2}\right]' = 2(x-2)^{-3} = \dfrac{2}{(x-2)^3}, & \text{pre } x \in (1\,;\,2) \cup (2\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x \neq 2$ a nemá nulové body. Na intervale $(-\infty\,;\,1)$ je kladná, na intervale $(1\,;\,2)$ je záporná a na intervale $(2\,;\,\infty)$ je kladná. To znamená, že funkcia f je konvexná na intervaloch $(-\infty\,;\,1\rangle$, $(2\,;\,\infty)$ a konkávna na intervale $\langle 1\,;\,2)$. Z toho vyplýva, že funkcia f má jeden inflexný bod $x_3 = 1$ (tabuľka 4.3.6).
Pre asymptotu so smernicou $y = kx + q$ na základe vety 3.2.12 a vzťahov (4.22) platí

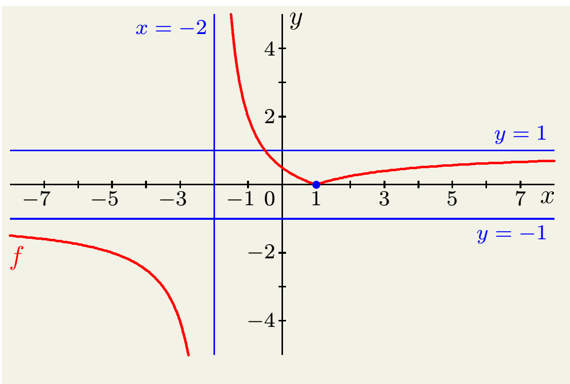
$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \pm 1 \cdot 0 = 0,$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad q_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

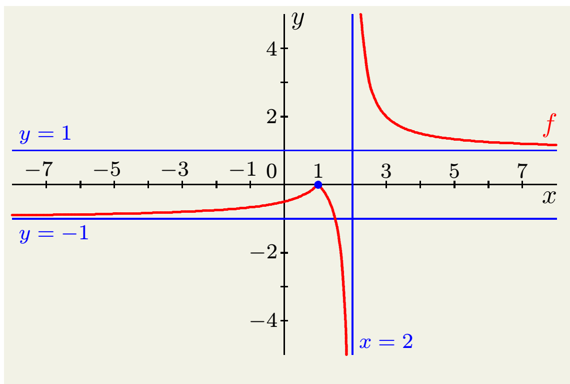
Takže asymptoty so smernicou sú dve priamky $y = 1$ a $y = -1$ (obrázok 4.3.30). ■

$(-\infty\,;\,1)$	$(1\,;\,2)$	$(2\,;\,\infty)$
$1 \ldots$ nulový bod	$2 \ldots$ bod nespojitosti	
$-$ záporná $f(x) < 0$ $-$	$-$ záporná $f(x) < 0$ $-$	$+$ kladná $f(x) > 0$ $+$
	$1 \ldots$ lokálne maximum	
$\nearrow$ rastie $f'(x) > 0$ $\nearrow$	$\searrow$ klesá $f'(x) < 0$ $\searrow$	$\searrow$ klesá $f'(x) < 0$ $\searrow$
$1 \ldots$ inflexný bod		
$\cup$ konvexná $f''(x) > 0$ $\cup$	$\cap$ konkávna $f''(x) < 0$ $\cap$	$\cup$ konvexná $f''(x) > 0$ $\cup$

Tab. 4.3.6: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-2}$ z príkladu 4.3.33 b).



Obr. 4.3.29: Príklad 4.3.33 a).



Obr. 4.3.30: Príklad 4.3.33 b).

4.3.6 Derivácia funkcie zadanej parametricky, implicitne a derivácia funkcie zadanej v polárnych súradniciach

- **Derivácia funkcie zadanej parametricky**

Najprv sa budeme zaoberať deriváciou funkcie f, ktorá je parametricky zadaná vzťahmi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, kde J je reálny interval s krajnými bodmi α, β. O funkciách φ a ψ budeme predpokladať, že majú na intervale J spojité derivácie (jednostranné derivácie v krajných bodoch α, β).

Veta 4.3.20.
Nech $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sú funkcie definované na reálnom intervale J. Nech na J existujú derivácie φ', ψ', pričom φ' je na J spojitá.
Nech pre všetky $t \in J$ platí $\varphi'(t) \neq 0$.
Potom systém rovníc $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ určuje funkciu

$$f\colon\; y = f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),\; x \in \varphi(J),$$

ktorá má na intervale $\varphi(J)$ deriváciu

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \text{pričom} \quad t = \varphi^{-1}(x).$$

Ak je funkcia ψ' spojitá na J, potom je funkcia f' spojitá na intervale $\varphi(J)$.

Dôkaz.
Pretože je φ' spojitá a nenulová na intervale J, musí platiť pre všetky $t \in J$ buď $\varphi'(t) > 0$ alebo $\varphi'(t) < 0$. To znamená, že je φ na J rastúca alebo klesajúca.
Z predchádzajúceho ďalej vyplýva, že φ je na intervale J spojitá a že $\varphi(J)$ je interval. To znamená, že existuje inverzná funkcia $\varphi^{-1}\colon \varphi(J) \to J$, $t = \varphi^{-1}(x)$, ktorá je spojitá a tiež rýdzo monotónna na intervale $\varphi(J)$.
Funkciu f je zložená $f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, $x \in \varphi(J)$ a pre jej deriváciu platí

$$f'(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left[\varphi^{-1}(x)\right]' = \frac{\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ t = \varphi^{-1}(x).$$

Ak je funkcia ψ' spojitá na J, potom je zrejme aj funkcia $f' = \psi'/\varphi'$ spojitá na $\varphi(J)$. ■

Poznámka 4.3.20.
Ak použijeme zápis pomocou diferenciálov, môžeme deriváciu funkcie f vyjadriť v tvare

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Deriváciu f' môžeme parametricky vyjadriť vzťahmi

$$f'\colon\ x = \varphi(t),\ \ y = \chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ t \in J.$$

Teoreticky vieme funkciu f' tiež vyjadiť v explicitnom tvare

$$f'(x) = \chi(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \chi(\varphi^{-1}(x)), \quad \text{t.j. } f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

Praktické vyjadrenie predchádzajúceho vzťahu je ale v mnohých prípadoch problematické.

Ak existujú na J druhé derivácie φ'', ψ'', potom môžeme vetu 4.3.20 aplikovať na funkciu $f'\colon\ x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $t \in J$ a dostaneme vyjadrenie druhej derivácie f''

$$f''(x) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

kde $t = \varphi^{-1}(x)$. To znamená, že parametrické vyjadrenie f'' má tvar

$$f''\colon\ x = \varphi(t),\ \ y = \tau(t) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},\ t \in J. \tag{4.23}$$

Príklad 4.3.34.
Nech f je určená parametricky rovnicami $x = \sqrt{t^3}$, $y = t^2$, $t \in (0\,;\infty)$. Určte f', f'', f'''.

Riešenie.
Pre derivácie funkcií $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ na intervale $(0\,;\infty)$ platí

$$\varphi'(t) = \left[\sqrt{t^3}\right]' = \left[t^{3/2}\right]' = \frac{3t^{1/2}}{2} = \frac{3\sqrt{t}}{2} > 0, \qquad \psi'(t) = \left[t^2\right]' = 2t > 0.$$

Funkcia φ' je na intervale $(0\,;\infty)$ spojitá a predpoklady vety 4.3.20 sú splnené. Derivácia funkcie f je potom určená vzťahmi

$$f'\colon\ x = \sqrt{t^3}, \quad y = \chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{2t}{3\sqrt{t}/2} = \frac{4\sqrt{t}}{3},\ t \in (0\,;\infty).$$

Keďže $\chi'(t) = \left[\dfrac{4\sqrt{t}}{3}\right]' = \dfrac{4\left[t^{1/2}\right]'}{3} = \dfrac{2t^{-1/2}}{3} = \dfrac{2}{3\sqrt{t}}$ pre $t \in (0\,;\infty)$, potom pre f'' platí

$$f''\colon\ x = \sqrt{t^3}, \quad y = \tau(t) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{2/\left(3\sqrt{t}\right)}{3\sqrt{t}/2} = \frac{4}{9t},\ t \in (0\,;\infty).$$

Analogicky zo vzťahu $\tau'(t) = \left[\dfrac{4}{9t}\right]' = \dfrac{4\left[t^{-1}\right]'}{9} = \dfrac{-4t^{-2}}{9} = \dfrac{-4}{9t^2}$ pre $t \in (0\,;\infty)$ vyplýva

$$f'''\colon\ x = \sqrt{t^3}, \quad y = \frac{\tau'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{-4/\left(9t^2\right)}{3\sqrt{t}/2} = \frac{-8}{27t^2\sqrt{t}} = \frac{-8}{27\sqrt{t^5}},\ t \in (0\,;\infty). ■$$

Z vety 4.3.20 a z nutnej podmienky existencie lokálneho extrému funkcie (veta 4.3.10) vyplýva, že ak má funkcia $f\colon\ x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$ v bode $t_0\in J$ lokálny extrém, potom pre bod $x_0=\varphi(t_0)$ musí platiť

$$f'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}=0, \quad \text{t.j.}\ \ \psi'(t_0)=0,\ \varphi'(t_0)\neq 0. \tag{4.24}$$

Z vety 4.3.12 vyplýva, že funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, ak $f'(x_0)=0$ a existuje konečná druhá derivácia $f''(x_0)\neq 0$, t.j. ak $\psi'(t_0)=0$, $\varphi'(t_0)\neq 0$ a platí

$$f''(x_0)=\frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)-\psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}=\frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}=\frac{\psi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^2}\neq 0.$$

Z nerovnosti $[\varphi'(t_0)]^2>0$ potom vyplýva, že funkcia $f\colon\ x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$ má v bode $t_0\in J$ **lokálne maximum** [resp. **lokálne minimum**], ak platí

$$\psi'(t_0)=0,\ \varphi'(t_0)\neq 0,\ \psi''(t_0)<0 \quad [\text{resp.}\ \ \psi'(t_0)=0,\ \varphi'(t_0)\neq 0,\ \psi''(t_0)>0]\,. \tag{4.25}$$

Príklad 4.3.35.
Nájdite extrémy parametricky zadanej funkcie $f\colon\ x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in I$, pričom $a>0$, $b>0$ a I je definičný interval.

Riešenie.
Ak I je ľubovoľný interval, ktorého dĺžka je väčšia ako 2π, potom f predstavuje elipsu, t.j. uzavretú krivku (viď obr 4.3.31). Nech $f\colon\ x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$.
Zo vzťahu (4.24) vyplýva, že extrémy môžu nastať iba v bodoch t, pre ktoré platí

$$\psi'(t)=[b\sin t]'=b\cos t=0, \quad \varphi'(t)=[a\cos t]'=-a\sin t\neq 0.$$

Rovnica $\psi'(t)=b\cos t=0$ má na intervale $\langle 0\,;\,2\pi\rangle$ dve riešenia $t_1=\pi/2$, $t_2=3\pi/2$. V obidvoch z týchto bodov t_1, t_2 nastávajú extrémy, pretože platí

$$\varphi'(t_1)=-a\sin\frac{\pi}{2}=-a\neq 0, \quad \varphi'(t_2)=-a\sin\frac{3\pi}{2}=a\neq 0.$$

Pre druhú deriváciu $\psi''(t)=[b\cos t]'=-b\sin t$ platí

$$\psi''(t_1)=-b\sin\frac{\pi}{2}=-b<0, \quad \psi''(t_2)=-b\sin\frac{3\pi}{2}=b>0.$$

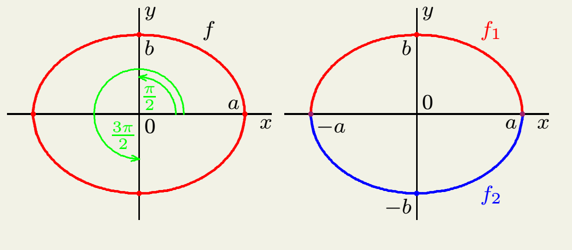
To znamená, že v bode $t_1=\pi/2$ nastáva maximum, pre ktoré platí $x_1=\varphi(t_1)=0$, $y_1=\psi(t_1)=b$ a v bode $t_2=3\pi/2$ nastáva minimum, pre ktoré platí $x_2=0$, $y_2=-b$.
Krivku f môžeme rozdeliť na dve funkcie f_1, f_2, pričom $f_1\colon\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$, $f_2\colon\ t\in\langle\pi\,;\,2\pi\rangle$. Pre bod $t_0=0$ platí[15] $x_0=a$, $y_0=0$ a pre bod $t_3=\pi$ platí $x_3=-a$, $y_3=0$. Funkcia f_1 má jedno globálne maximum $f_1(0)=b$ a dve globálne minimá $f_1(\pm a)=0$. Funkcia f_2 má globálne mimimum $f_2(0)=-b$ a dve globálne maximá $f_2(\pm a)=0$. ■

- **Derivácia funkcie zadanej implicitne**

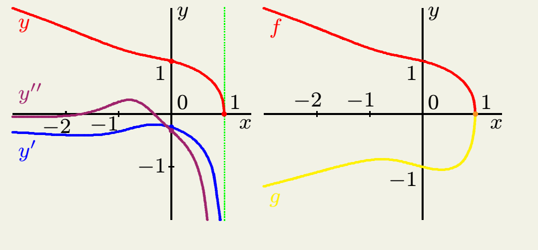
Nech je funkcia f definovaná implicitne rovnicou $F(x,y)=0$, kde $y=f(x)$. Uvedieme vzťah pre výpočet derivácie $f'(x)$. Tento vzťah vyplýva z vlastností derivácie funkcie s dvomi premennými a preto ho uvádzame bez dôkazu.

Ak budeme vo výraze $F(x,y)$ považovať premennú y za konštantu, potom sa F redukuje na funkciu jednej premennej x, ktorú označíme $F_x(x,y)$. Analogicky dostaneme funkciu $F_y(x,y)$ premennej y v prípade, že x považujeme za konštantu. Ak existujú derivácie $F'_x(x,y)=\mathrm{d}F_x(x,y)/\,\mathrm{d}x$, $F'_y(x,y)=\mathrm{d}F_y(x,y)/\,\mathrm{d}y\neq 0$, potom môžeme deriváciu $f'(x)$ vyjadriť vzťahom

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{\dfrac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}F_y(x,y)}{\mathrm{d}y}}=-\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)/\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}F_y(x,y)/\,\mathrm{d}y}. \tag{4.26}$$



Obr. 4.3.31: Parametricky definované funkcie z príkladu 4.3.35.



Obr. 4.3.32: Implicitne definované funkcie z príkladu 4.3.36.

[15]Krivka f je uzavretá a karteziánske súradnice zodpovedajúce bodom $t=0$ a $t=2\pi$ sú rovnaké.

Poznámka 4.3.21.
Výrazy $F'_x(x,y)$, resp. $F'_y(x,y)$ sa nazývajú **parciálne derivácie** funkcie F podľa premennej x, resp. y a označujú sa symbolmi $\partial F(x,y)/\partial x$, resp. $\partial F(x,y)/\partial y$.
Reálna funkcia $F(x,y)$ má dve nezávislé premenné x, y, pre ktoré platí vzťah $y=f(x)$. Na základe pravidiel pre derivovanie funkcií viac premenných[16] platí

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}y'(x)=0.$$

Poznámka 4.3.22.
Funkciu $F(x,y)=F(x,f(x))$ môžeme považovať za zloženú funkciu premennej x, pričom jej vnútornú zložku $y=f(x)$ derivujeme ako funkciu premennej x. Ak existuje derivácia $F'(x,f(x))=F'(x,y)$, potom deriváciu implicitnej funkcie $y'=f'(x)$ vyjadríme z rovnice $F'(x,y)=0$ (viď príklad 4.3.36) ako jej riešenie pomocou premenných x, $y=f(x)$.
Druhú deriváciu y'' vyjadríme analogicky pomocou y', y a x ako riešenie implicitnej rovnice $F''(x,y)=0$. Takto môžeme pokračovať aj pre ostatné derivácie vyšších rádov.
Ak chceme vyjadriť deriváciu $f'(x_0)$ v konkrétnom bode $x_0\in D(f)$, musíme najprv určiť hodnotu $y_0=f(x_0)$ ako riešenie implicitnej rovnice $F(x_0,y_0)=0$.

Príklad 4.3.36.
Vypočítajte prvú a druhú deriváciu funkcie $y=f(x)$, ktorá je implicitne určená vzťahom $F(x,y)=x^3+x^2y^2+xy^3+y^4-1=0$, $y\geq 0$. Určte ich hodnoty v bodoch 0 a 1.

Riešenie.
Ak použijeme vzťah (4.26), potom pre prvú deriváciu f' platí

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{3x^2+2xy^2+y^3}{2x^2y+3xy^2+4y^3}. \tag{4.27}$$

Ak derivujeme rovnicu $F(x,y)=0$ v zmysle poznámky 4.3.22, potom platí

$$\begin{aligned} F'(x,y) &= 3x^2+(2xy^2+2x^2yy')+(y^3+3xy^2y')+4y^3y'-0= \\ &= 3x^2+2xy^2+y^3+(2x^2y+3xy^2+4y^3)y'=0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Po vyjadrení y' dostávame vzťah (4.27). Pre druhú deriváciu platí

$$\begin{aligned} F''(x,y) &= [3x^2+2xy^2+y^3+2x^2yy'+3xy^2y'+4y^3y']'=6x+(2y^2+4xyy')+3y^2y'+ \\ &\quad +(4xyy'+2x^2y'y'+2x^2yy'')+(3y^2y'+6xyy'y'+3xy^2y'')+(12y^2y'y'+4y^3y'')= \\ &= 6x+2y^2+[8xy+6y^2]y'+[2x^2+6xy+12y^2](y')^2+[2x^2y+3xy^2+4y^3]y''=0. \end{aligned}$$

Aby sme mohli vypočítať hodnoty prvej derivácie $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ a druhej derivácie $f''(-1)$, $f''(0)$, $f''(1)$, musíme najprv určiť hodnoty $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.
Hodnotu $f(0)$ vypočítame z rovnice $F(0,y)=0^3+0^2y^2+0y^3+y^4-1=y^4-1=0$, t.j. $y^4=1$. Z posledného vzťahu vyplýva $y^2=1$, t.j. $y=\pm 1$. To znamená, že $f(0)=1$. Po dosadení do vzťahu (4.28), prípadne do vzťahu (4.27), dostaneme

$$F'(0,y)=3\cdot 0^2+2\cdot 0\cdot 1^2+1^3[2\cdot 0^2\cdot 1+3\cdot 0\cdot 1^2+4\cdot 1^3]y'=1+4y'=0, \quad \text{t.j.} \quad f'(0)=-\frac{1}{4}.$$

Pre druhú deriváciu $f''(0)$ potom platí

$$F''(0,y)=0+2-[0+6]\frac{1}{4}+[0+0+12]\frac{1}{16}+[0+0+4]y''=\frac{5}{4}+4y''=0, \quad \text{t.j.} \quad f''(0)=-\frac{5}{16}.$$

Hodnotu $f(1)$ vypočítame analogicky ako v predchádzajúcom prípade z rovnice

$$F(1,y)=1+y^2+y^3+y^4-1=y^2+y^3+y^4=y^2(1+y+y^2)=0.$$

Keďže nemá rovnica $1+y+y^2=0$ reálne riešenie, musí platiť $y^2=0$, t.j. $f(1)=0$.
Pre hodnotu $f'(1)$ potom zo vzťahu (4.28) vyplýva

$$F'(1,y)=3+0+0+[0+0+0]y'=0, \quad \text{t.j.} \quad 3=0.$$

Dostali sme spor. To znamená, že derivácie $f'(1)$, $f''(1)$ neexistujú. ■

Poznámka 4.3.23.
Vzťah $F(x,y)=x^3+x^2y^2+xy^3+y^4-1=0$, $y\geq 0$ určuje funkciu $y=f(x)$. Ak vynecháme podmienku $y\geq 0$, potom rovnica $F(x,y)=0$ nevyjadruje funkciu, ale krivku zloženú z dvoch funkcií $f\colon\ x^3+x^2y^2+xy^3+y^4-1=0,\ y\geq 0$, $g\colon\ x^3+x^2y^2+xy^3+y^4-1=0,\ y\leq 0$ (obr. 4.3.32).

[16] S reálnymi funkciami viac premenných sa v tejto časti zaoberať nebudeme.

Ak má funkcia $y = f(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$ lokálny extrém a existuje jej derivácia $f'(x_0)$, potom na základe nutnej podmienky existencie lokálneho extrému platí $f'(x_0) = 0$. Špeciálne pre funkciu $y = f(x)$ implicitne určenú rovnicou $F(x, y) = 0$ platí

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = 0, \qquad \text{kde} \;\; y_0 = f(x_0).$$

Z toho vyplýva, že v bode x_0, v ktorom má funkcia f lokálny extrém, musí platiť

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{4.29}$$

Pomocou vlastností funkcií viac premenných sa dá odvodiť aj postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému implicitnej funkcie. Funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 **lokálne maximum** [resp. **lokálne minimum**], ak platí

$$\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} > 0 \quad \left[\text{resp.} \;\; \frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} < 0\right], \qquad \text{kde} \;\; F''_{xx}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}F_x(x, y)}{\mathrm{d}x}\right].$$

Príklad 4.3.37.
Nájdite extrémy funkcie $y = f(x)$ danej implicitne rovnicou $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Riešenie.
Krivka f sa nazýva Descartov list a z obrázku 4.3.33 je zrejmé, že nepredstavuje funkciu. Nájdeme jej lokálne extrémy. Zo vzťahu (4.29) vyplýva, že extrém môže nastať iba v bode $[x; y]$, ktorý spĺňa podmienky

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad F'_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \quad F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x \neq 0.$$

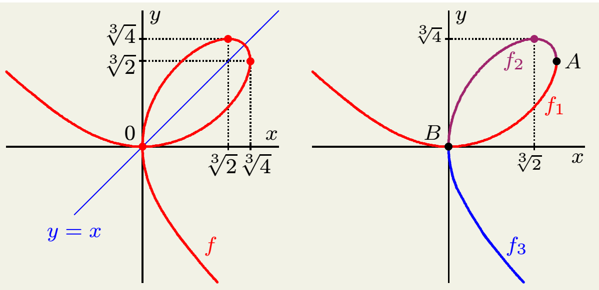
Z druhej rovnice vyjadríme $y = x^2$ a dosadíme do prvej rovnice. Potom platí

$$x^3 + \left(x^2\right)^3 - 3x \cdot x^2 = x^6 - 2x^3 = x^3\left(x^3 - 2\right) = 0, \qquad \text{t.j.} \;\; x = 0, \;\; \text{resp.} \;\; x = \sqrt[3]{2}.$$

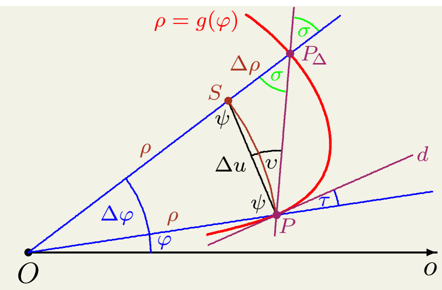
Ak $x = 0$, potom z rovnice $F(0, y) = y^3 = 0$ vyplýva $y = 0$. Túto hodnotu môžeme získať jednoduchšie zo vzťahu $y = x^2$. Lenže bod $[0; 0]$ nevyhovuje podmienke $F'_y(0, 0) \neq 0$.
Ak $x = \sqrt[3]{2}$, potom platí $y = x^2 = \sqrt[3]{4}$. V tomto bode $[x; y] = \left[\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right]$ nastáva lokálne maximum, pretože platí

$$\frac{F'_{xx}(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{6x}{3y^2 - 3x} > 0, \qquad \text{t.j.} \;\; \frac{F'_{xx}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})}{F'_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{2}} > 0.$$

Krivku f môžeme rozdeliť napríklad na tri funkcie f_1, f_2 a f_3, ktorých grafy sú oddelené bodmi $A = \left[\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right]$ a $B = [0; 0]$ (viď obr. 4.3.33 vpravo). Funkcia f_1 nadobúda globálne minimum $f_1(0) = 0$, lokálne maximum $f_1(\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{2}$. Funkcia f_2 nadobúda globálne minimum $f_2(0) = 0$, globálne maximum $f_2(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$. Funkcia f_3 nadobúda globálne maximum $f_3(0) = 0$. ■



Obr. 4.3.33: Descartov list f a funkcie f_1, f_2, f_3 z príkladu 4.3.37.



Obr. 4.3.34: Derivácia funkcie v polárnych súradniciach.

- **Derivácia funkcie v polárnych súradniciach**

Predpokladajme, že je funkcia $f\colon y = f(x)$ definovaná v polárnom súradnicovom systéme vzťahom $f\colon \rho = g(\varphi)$, $\varphi \in J$. Pre jej deriváciu v polárnom systéme platí

$$g'(\varphi) = \frac{\mathrm{d}g(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{g(\varphi + \Delta\varphi) - g(\varphi)}{\Delta\varphi}.$$

Ak použijeme vzťahy pre prevod súradníc do karteziánskeho systému, potom môžeme funkciu f považovať za zadanú parametricky vzťahmi

$$f\colon \; x = \rho\cos\varphi = g(\varphi)\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi = g(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi).$$

Ak je funkcia $g(\varphi)$ spojitá, existuje spojitá derivácia $g'(\varphi)$ a platí $[g(\varphi)\cos(\varphi)]' \neq 0$, potom sú splnené predpoklady vety 4.3.20 a pre parametrické vyjadrenie funkcie f' platí

$$f'\colon \; x = g(\varphi)\cos\varphi, \;\; y = \frac{[g(\varphi)\sin\varphi]'}{[g(\varphi)\cos\varphi]'} = \frac{g'(\varphi)\sin\varphi + g(\varphi)\cos\varphi}{g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi}, \quad \varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi). \tag{4.30}$$

Poznámka 4.3.24.
Graficky zodpovedá derivácia polárne definovanej funkcie $f\colon\ \rho = g(\varphi)$ v bode φ dotyčnici ku grafu tejto funkcie v bode $P = [\varphi; g(\varphi)]$. Ak označíme τ uhol, ktorý zviera dotyčnica d s polpriamkou OP, potom platí (obr. 4.3.34)

$$g'(\varphi) = \frac{\mathrm{d}g(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = g(\varphi)\,\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = g(\varphi)\,\operatorname{cotg}\tau.$$

Označme $\rho = g(\varphi)$, $\Delta\rho = g(\varphi{+}\Delta\varphi){-}g(\varphi)$, $P_\Delta = [\varphi{+}\Delta\varphi; g(\varphi{+}\Delta\varphi)]$, kde $\Delta\varphi$ je uhol medzi polpriamkami OP_Δ a OP. Označme σ uhol, ktorý zviera priamka PP_Δ s polpriamkou OP_Δ. Pre $\Delta\varphi \to 0$ zrejme platí $P_\Delta \to P$, t.j. $OP_\Delta \to OP$, $PP_\Delta \to d$, $\sigma \to \tau$.
Trojuholník OPS je rovnoramenný s ramenami OS, OP, jeho uhly priľahlé k základni sú $\psi = (\pi - \Delta\varphi)/2$. Na základe súčtového vzorca pre funkciu sínus (veta 3.1.7) platí

$$\sin\psi = \sin\frac{\pi - \Delta\varphi}{2} = \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 1\cdot\cos\frac{\Delta\varphi}{2} - 0\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \cos\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Zo sínusovej vety v trojuholníku OPS vyplýva

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\psi}, \quad \text{t.j.}\quad \Delta u = \rho\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\psi} = \rho\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos(\Delta\varphi/2)}. \tag{4.31}$$

Pre vnútorné uhly v trojuholníku OPP_Δ platí $\Delta\varphi + (\psi + \upsilon) + \sigma = \pi$, t.j.

$$\upsilon = \pi - \Delta\varphi - \sigma - \psi = \pi - \Delta\varphi - \sigma - \frac{\pi - \Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2} - \sigma = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\Delta\varphi}{2} + \sigma\right).$$

Z toho vyplýva

$$\sin\upsilon = \sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2} + \sigma\right) - \cos\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} + \sigma\right) = \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2} + \sigma\right).$$

Zo sínusovej vety v trojuholníku SPP_Δ a zo vzťahu (4.31) vyplýva

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta u} = \frac{\sin\upsilon}{\sin\sigma}, \quad \text{t.j.}\quad \Delta\rho = \Delta u\,\frac{\sin\upsilon}{\sin\sigma} = \rho\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos(\Delta\varphi/2)}\,\frac{\cos(\Delta\varphi/2 + \sigma)}{\sin\sigma},$$

Pre deriváciu $g'(\varphi)$ v polárnom systéme potom platí

$$g'(\varphi) = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\rho}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left[\frac{\rho}{\cos(\Delta\varphi/2)}\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\,\frac{\cos(\Delta\varphi/2{+}\sigma)}{\sin\sigma}\right] = \frac{\rho}{1}\cdot 1\cdot\frac{\cos\tau}{\sin\tau} = \rho\operatorname{cotg}\tau.$$

Príklad 4.3.38.
Uvažujme funkciu f, ktorá je v karteziánskom súradnicovom systéme explicitne definovaná vzťahom $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r\,;\, r\rangle$. Jej grafom je polkružnica so stredom v počiatku systému a s polomerom $r > 0$ (obr. 4.3.35). Pre všetky $x \in (-r\,;\, r)$ platí

$$f'(x) = \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]' = \left[(r^2 - x^2)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \tag{4.32}$$

Takže dotyčnica k funkcii f v bode $P = [x; f(x)]$ má smernicu $\operatorname{tg}\psi = -x/\sqrt{r^2 - x^2}$.
V polárnych súradniciach predstavuje uvedená polkružnica konštantnú funkciu $f(\varphi) = r$, $\varphi \in \langle 0\,;\, \pi\rangle$. Pre jej deriváciu f' v ľubovoľnom bode $\varphi \in \langle 0\,;\, \pi\rangle$ potom platí

$$f'(\varphi) = [r]' = 0, \quad \text{t.j.}\quad r\operatorname{cotg}\tau = 0.$$

To znamená, že dotyčnica d zviera v bode $P = [\varphi; f(\varphi)]$ s polpriamkou OP pravý uhol $\tau = \pi/2$. Na základe vzťahu (4.30) pre parametrické vyjadrenie $f'(\varphi)$, $\varphi \in (0\,;\, \pi)$ platí

$$f'\colon\ x = f(\varphi)\cos\varphi = r\cos\varphi,\quad y = \frac{f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi}{f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi} = \frac{0 + r\cos\varphi}{0 - r\sin\varphi} = -\operatorname{cotg}\varphi.$$

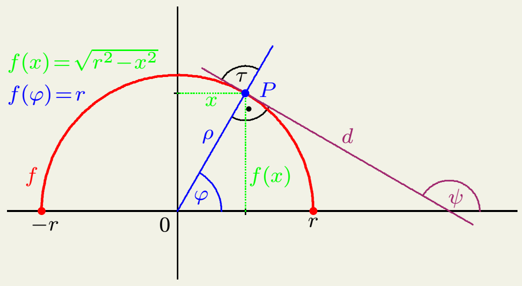
Posledný vzťah zodpovedá výrazu (4.32), pretože platí $\operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{x}{f(x)} = \dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. ■

Poznámka 4.3.25.
Pre porovnanie sú grafy funkcií $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $f'(x) = -x/\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (-r\,;\, r)$ z príkladu 4.3.38 zostrojené na obrázku 4.3.36.

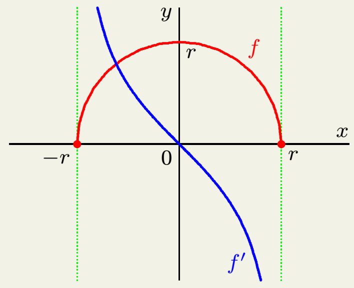
Cvičenia

4.3.1. Dokážte, že pre $0 < a < b$, $n \in N$ platí:

a) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < b - a$,
b) $\sqrt{1 + a^2} \le 1 + a\ln\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)$,
c) $\frac{\operatorname{arctg} a}{1+a} < \ln(1 + a) < a$,
d) $1 + \frac{1}{1+\mathrm{e}} < \ln(1 + \mathrm{e}) < 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$,
e) $\ln(1 + a^2) \le 2a\operatorname{arctg} a$,
f) $na^{n-1}(b - a) \le b^n - a^n \le nb^{n-1}(b - a)$,
g) $2 + a^2 \le \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}$,
h) $\sin a < a - \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{120}$,
i) $1 + a < \mathrm{e}^a$.



Obr. 4.3.35: Polkružnica $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, resp. $f(\varphi) = r$ z príkladu 4.3.38.



Obr. 4.3.36: Grafy funkcií $f(x)$, $f'(x)$ z poznámky 4.3.25.

4.3.2. Pomocou vety o strednej hodnote odhadnite nasledujúce výrazy:

a) $\operatorname{tg} 4,2$, b) $\operatorname{arctg} 1,5$, c) $\log_3 18$, d) $\arcsin 0,5$, e) $\arccos 0,5$.

4.3.3. Rozviňte do Taylorovho polynómu so stredom v bodoch $1, -1, 2, -2$ polynómy:

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, b) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, c) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$,
d) $x^4 - 2x^3 + 2x + 1$, e) $x^4 + 2x^2 + 2x - 1$, f) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1$,
g) $x^5 - 2x^4 + 2x^2 + 1$, h) $x^5 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, i) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x$,
j) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, k) $x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
l) $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, m) $x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$.

4.3.4. Určte Taylorov polynóm stupňa n so stredom v bode x_0 pre funkciu $y = f(x)$:

a) $y = x^{\frac{2}{3}}$, $n = 3$, $x_0 = 1$, b) $y = x^x$, $n = 3$, $x_0 = 1$, c) $y = \frac{1}{x}$, $n = 4$, $x_0 = 2$,
d) $y = \ln x$, $n = 4$, $x_0 = 2$, e) $y = \ln x$, $n = 4$, $x_0 = 3$, f) $y = \frac{1}{x^3}$, $n = 3$, $x_0 = 1$.

4.3.5. Určte Maclaurinov polynóm stupňa n pre funkciu $y = f(x)$:

a) $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n = 3$, b) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $n = 3$, c) $y = \frac{1-x^2}{1+x+x^2}$, $n = 3$,
d) $y = \frac{e^x}{e^x+1}$, $n = 4$, e) $y = \ln \cos x$, $n = 6$, f) $y = \ln \cos x^2$, $n = 6$,
g) $y = \operatorname{tg} x$, $n = 5$, h) $y = \operatorname{tg}^2 x$, $n = 5$, i) $y = \sin^2 x$, $n = 5$,
j) $y = \sin^3 x$, $n = 5$, k) $y = \cos^2 x$, $n = 5$, l) $y = \cos^3 x$, $n = 5$.

4.3.6. Určte Maclaurinov polynóm stupňa n pre funkciu $y = f(x)$:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $y = \cosh x$, c) $y = \sinh x$, d) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

4.3.7. Pomocou Maclaurinovho vzorca vypočítajte s chybou menšou ako $0,0001$ hodnoty:

a) $\sqrt[10]{1010}$, b) $\operatorname{tg} 4,2$, c) $\sqrt{\pi}$, d) $(1,1)^{1,2}$, e) $\operatorname{arctg} 1,7$,
f) $\arcsin 0,5$, g) $\cos 1,6$, h) $\sin 0,9$, i) $\sqrt[4]{83}$, j) $\sqrt[3]{121}$.

4.3.8. Vypočítajte pre $m, n \in N$, $a > 0$, $b > 0$ nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - x}{x^n - 1}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m - x}{x^n - x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,
f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$, g) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n}$, h) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{a^x}$, i) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln^x \frac{1}{x}$,
k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{tg} ax)}{\ln(\operatorname{tg} bx)}$, m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$, n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2 \operatorname{tg} 3x}$, p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg} x}$, q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 3x}$, r) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
s) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x}\right)$, t) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$, u) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$, v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$,
w) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}$, x) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3a}}$, y) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$, z) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.

4.3.9. Zistite, či možno použiť L'Hospitalovo pravidlo a vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

4.3.10. Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je monotónna funkcia $y=f(x)$:

a) $y=\frac{x}{1+x^2}$, b) $y=\frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$, c) $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, d) $y=(1+\frac{1}{x})^x$,
e) $y=x\,|x|$, f) $y=\ln|x|+1$, g) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, h) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}+1$,
i) $y=x^2-x+12$, j) $y=x^5-15x^3+3$, k) $y=|x+1|+|x-1|$,
l) $y=\frac{x}{x^2-1}+x+2$, m) $y=\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}-1$, n) $y=x^2-1+|x^2-1|$,
o) $y=\ln\sqrt{1+x^2}-1$, p) $y=2x^2-\ln x+1$, q) $y=\sin x+\operatorname{tg} x-2x$,
r) $y=\sin x+\cos x+1$, s) $y=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}-1$, t) $y=x+\sin x-1$.

4.3.11. Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$:

a) $y=x^2(x-6)$, b) $y=x-\frac{1}{x}$, c) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^3}$, d) $y=\ln\frac{x^2+4x+2}{x+2}$,
e) $y=x-\lfloor x\rfloor$, f) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, g) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1$, h) $y=1+\sqrt{|x|}$,
i) $y=\sqrt{6x-x^2}$, j) $y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$, k) $y=3-2x^{\frac{3}{2}}$, l) $y=4x-\operatorname{tg} x$,
m) $y=x^2-2x-1$, n) $y=x^4+2x^2-1$, o) $y=x+\frac{2x}{1+x^2}$, p) $y=\frac{1}{4x^3-9x^2+6x}$,
q) $y=|x|\,\mathrm{e}^{|x-1|}$, r) $y=\frac{x}{\ln x}+2$, s) $y=x^3-2\,|x|$, t) $y=\operatorname{arctg}|x-1|$,
u) $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$, v) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$, w) $y=\mathrm{e}^{x}\sin x$, x) $y=\mathrm{e}^{x}\cos x$.

4.3.12. Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$:

a) $y=\sin x+\cos x+1$, b) $y=4x^3-3x^2-36x-5$, c) $y=4x^3-18x^2+27x$,
d) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$, e) $y=x-\ln(1+x)-1$, f) $y=|x+4|-|x|+|x-1|$,
g) $y=-\ln(1+x-4x^2)$, h) $y=\ln^2 x-3\ln x+2$, i) $y=\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$.
j) $y=x^x$, $x\in(0\,;\,\infty)$, k) $y=x^2\ln x$, $x\in\langle 1\,;\,\mathrm{e}\rangle$, l) $y=x-2\ln x$, $x\in\langle 1\,;\,\mathrm{e}\rangle$,
m) $y=x+\frac{1}{x-1}$, $x\in\langle -4\,;\,1)$, n) $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$, $x\in\langle\frac{3}{2}\,;\,3\rangle$, o) $y=\frac{2x}{x^2-1}$, $x\in\langle\frac{11}{10}\,;\,3\rangle$.

4.3.13. Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$:

a) $y=\sqrt[3]{x^4-2x^3+x^2}$, $x\in\langle -3\,;\,2\rangle$, b) $y=\cos 2x-2x+11$, $x\in\langle -\pi\,;\,\pi\rangle$,
c) $y=\sin x+\sin^2 x+1$, $x\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$, d) $y=\sin x-\sin^2 x+1$, $x\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
e) $y=x^2-6x+10$, $x\in\langle -1\,;\,5\rangle$, f) $y=x^3-3x+20$, $x\in\langle -3\,;\,4\rangle$,
g) $y=|x^2-6x+5|$, $x\in\langle -2\,;\,2\rangle$, h) $y=|x^2-6x+5|$, $x\in\langle -6\,;\,6\rangle$,
i) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in\langle -1\,;\,1\rangle$, j) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in R$.

4.3.14. Rozložte číslo $a>0$ na súčet dvoch kladných čísel x_1, x_2 tak, aby:

a) x_1x_2 bolo maximálne, b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ bolo minimálne,
c) $x_1^n+x_2^n$ bolo minimálne pre $n\in N$, d) $x_1^n x_2^n$ bolo maximálne pre $n\in N$.

4.3.15. Nájdite $x>0$ tak, aby jeho súčet s jeho obrátenou hodnotou bol minimálny.

4.3.16. Do trojuholníka s najdlhšou stranou $a>0$ a výškou $v>0$ vpíšte obdĺžnik tak, aby jedna jeho strana ležala na strane a a aby mal maximálny obsah.

4.3.17. Určte rozmery trojuholníka, ktorý má jednu stranu $a>0$ a obvod $s>2a$, tak aby mal maximálny obsah.

4.3.18. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvodu $s>0$, aby jeho uhlopriečka bola minimálna.

4.3.19. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obsahu $P>0$, aby jeho obvod bol minimálny.

4.3.20. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvod $s>0$, aby jeho obsah bol maximálny.

4.3.21. Do elipsy s poloosami $0<a<b$ vpíšte pravouhlý rovnobežník so stranami rovnobežnými s osami elipsy tak, aby mal maximálny obsah.

4.3.22. Do gule s polomerom $r>0$ vpíšte válec tak, aby mal:

a) maximálny objem, b) maximálny povrch, c) maximálny plášť.

4.3.23. Do gule s polomerom $r>0$ vpíšte kolmý kužeľ tak, aby mal:

a) maximálny objem, b) maximálny povrch, c) maximálny plášť.

4.3.24. Do kužeľa s výškou $h>0$, polomerom $r>0$ vpíšte válec s maximálnym objemom.

4.3.25. Na priamke p nájdite bod tak, ktorý je najbližšie k bodu $A=[1;2]$:

a) $p\colon\ y=3x-1$, b) $p\colon\ y=3x+2$, c) $p\colon\ y=3x+1$, d) $p\colon\ y=3x-2$.

4.3.26. Na parabole p nájdite bod tak, ktorý je najbližšie k bodu $A=[1;2]$:

a) $p\colon\ y=4x-x^2$, b) $p\colon\ y=x+x^2$, b) $p\colon\ y=-4x+2x^2$, d) $p\colon\ y=-3x-x^2$.

4.3.27. Silážna jama má mať tvar pravouhlého rovnobežnostena (bez hornej steny) s objemom $V=1000\ \mathrm{m}^3$. Dĺžka podstavy má byť 4–krát väčšia ako jej šírka. Náklady na vybudovanie 1 m^2 podstavy sú 2–krát menšie ako náklady na vybudovanie 1 m^2 steny. Určte rozmery silážnej jamy, aby náklady na jej vybudovanie boli minimálne.

4.3.28. Drôt s dĺžkou 10 m máme rozdeliť na dve časti, z ktorých prvá sa zohne do štvorca a druhá do kruhu. Kde má byť rez, aby súčet obsahov štvorca a kruhu bol minimálny.

4.3.29. Kartón má tvar obdĺžnika s rozmermi 30×14 cm. V rohoch vystrihneme rovnaké štvorce a zvyšok ohneme do otvorenej krabice. Aká veľká má byť strana vystrihnutých štvorcov, aby mala krabica maximálny objem.

4.3.30. Okno, ktoré má tvar rovinného obrazca zloženého z obdĺžnika a polkruhu zostrojeného nad jednou jeho stranou, má obvod $s>0$. Aké majú byť rozmery obdĺžnika a polkruhu, aby malo okno maximálny obsah.

4.3.31. Dva splavné, na seba kolmé kanály, sú široké 4 m a 6 m. Vypočítajte dĺžku najdlhšieho trámu, ktorý môže preplávať z jedného kanálu do druhého.

4.3.32. Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia $y=f(x)$ konvexná alebo konkávna a nájdite všetky jej inflexné body:

a) $y=5x^2+20x+7$, b) $y=3x^5-5x^4+4$, c) $y=2-|x^2-2|$, d) $y=x^2+x^{\frac{2}{3}}-1$,
e) $y=x(1-x)^2+1$, f) $y=x+x^{\frac{5}{3}}+1$, g) $y=3-(x+2)^{\frac{7}{5}}$, h) $y=x-\cos x$,
i) $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$, j) $y=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}+1$, k) $y=x\ln x+1$, l) $y=x+\sin x$,
m) $y=x+\frac{1}{x^2}+1$, n) $y=x+\frac{2x}{1-x^2}$, o) $y=\frac{x}{1+x^2}+1$, p) $y=\frac{x^3}{x^2+27}+27$,
q) $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$, r) $y=x^3-12x^2-5x+2$, s) $y=(x-1)^{\frac{5}{2}}+5(x+1)^{\frac{3}{2}}$,
t) $y=|x^2-1|+|x^2+1|$, u) $y=12-\ln(x^2-9)$, v) $y=x^4+2x^3-12x^2-5x$.

4.3.33. Dokážte, že všetky inflexné body funkcie $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ ležia na priamke $x-4y=0$.

4.3.34. Dokážte, že pre pravouhlé súradnice každého inflexného bodu funkcie $y=x\sin x$ platí $(x^2+4)y^2=4x^2$.

4.3.35. Dokážte, že každý polynóm nepárneho stupňa $n>1$ má inflexný bod.

4.3.36. Pre aké $b\in R$ má funkcia $y=\mathrm{e}^x+bx^3$ inflexný bod?

4.3.37. Určte asymptoty ku grafu funkcie $y=f(x)$:

a) $y=\frac{x}{x-1}+1$, b) $y=\frac{1}{1-x^2}+1$, c) $y=\frac{x^2+2}{x^2-4}+1$, d) $y=\frac{x\sin x}{1+x^2}+1$,
e) $y=3x+\frac{3}{x-2}$, f) $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$, g) $y=2x-\frac{\cos x}{x}$, h) $y=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$,
i) $y=x+\frac{\ln x}{x}$, j) $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$, k) $y=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}+1$, l) $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)$,
m) $y=\frac{\sin x}{x}+12$, n) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+12$, o) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+12$, p) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$.

4.3.38. Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=3x^5-5x^3$, b) $y=-x^4+6x^2-5$, c) $y=(\frac{x^2}{6}+x)^2$, d) $y=(\frac{x^3}{8}-1)^3$,
e) $y=(1-x^2)^2$, f) $y=(x^2-1)3x$, g) $y=x^6-x^3+1$, h) $y=x^6-x^4-1$,
i) $y=x^3+\frac{1}{x^2}$, j) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$, k) $y=x^3+\frac{1}{x^3}$, l) $y=x^2+\frac{1}{x^3}$,
m) $y=\frac{2x}{x^2-1}+x$, n) $y=\frac{\ln x}{x}+1$, o) $y=x-\ln x$, p) $y=x+2\,\mathrm{arctg}\,x$,
q) $y=x+\mathrm{arccotg}\,x$, r) $y=(2-x)\,\mathrm{e}^{x-1}$, s) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}+1$, t) $y=x^2\,\mathrm{e}^{x+2}-1$,
u) $y=x\,\mathrm{e}^{-x^2}+1$, v) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1$, w) $y=x-\mathrm{e}^{-x}+1$, x) $y=x^2-\mathrm{e}^{-x}-1$.

4.3.39. Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}$, b) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$, c) $y=(x-4)\sqrt[3]{x}$, d) $y=(x+4)\sqrt[3]{x^2}$,
e) $y=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$, f) $y=\operatorname{cotgh}\frac{1-x}{1+x}$, g) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$, h) $y=x+\frac{\sin x}{x}$,
i) $y=x^3+3x$, j) $y=16x(x-1)^3$, k) $y=|16-x^2|$, l) $y=x^2-2\,|x|$,
m) $y=\sqrt{|x-1|}$, n) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, o) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$, p) $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$,
q) $y=x\ln x+1$, r) $y=x+e^{-x}$, s) $y=\ln(4-x^2)$, t) $y=\sin x+\cos x$,
u) $y=x^2\sin\frac{1}{x}$, v) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+1$, w) $y=x\operatorname{arctg}x$, x) $y=\arcsin|x|$.

4.3.40. Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\frac{x-1}{x+1}$, b) $y=\frac{x^3+4}{x^6}$, c) $y=\frac{x^2+1}{x}$, d) $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$, e) $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$,
f) $y=\frac{x-1}{x-2}$, g) $y=\frac{x^2}{x-1}$, h) $y=\frac{x+1}{x^2}$, i) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, j) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$,
k) $y=\frac{x-3}{x-2}$, l) $y=\frac{2x^5-3}{x^2}$, m) $y=\frac{2-x}{(x-1)^2}$, n) $y=\frac{x^2+4}{x^2+3}$, o) $y=\frac{x^2+2}{x^2+3}$,
p) $y=\frac{x+1}{x-1}$, q) $y=\frac{x-2}{x^3}$, r) $y=\frac{x^2-3}{x^3}$, s) $y=\frac{1-x^4}{x^2}$, t) $y=\frac{1-x^3}{x^4}$,
u) $y=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, v) $y=\left|\frac{x^2}{x-1}\right|$, w) $y=\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$, x) $y=\left|\frac{(x-1)^2}{1-x^2}\right|$, y) $y=\left|\frac{1+x^2}{1-x}\right|$.

4.3.41. Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{10}$, b) $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$, c) $y=\frac{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}{3}$,
d) $y=\cos^3 x-3\cos x+1$, e) $y=(x+2)^2(x+5)$, f) $y=(1-x)^3(1+x)^4$,
g) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, h) $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, i) $y=\sinh x+\sinh(1-x)$,
j) $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}$, k) $y=2(x+1)-3(x-1)^{\frac{2}{3}}$, l) $y=\cos x-\ln\cos x$,
m) $y=x^2\,e^{\frac{1}{x}}+12$, n) $y=e^{-2x}\sin 3x$, o) $y=x-2\operatorname{arctg}x$, p) $y=x-|\sin x|$.

4.3.42. Nájdite explicitný tvar funkcie $y=f(x)$ definovanej parametricky:

a) $x=t+1,\ y=1-2t-t^2,\ t\in(1\,;\,4)$, b) $x=3\cosh t,\ y=2\sinh t,\ t\in\langle 0\,;\,\infty)$,
c) $x=4\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$, d) $x=4\cos^2 t,\ y=9\sin^2 t,\ t\in\left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

4.3.43. Určte množiny hodnôt pre parameter t tak, aby dané parametrické rovnice určovali spojitú funkciu $y=f(x)$. Elimináciou parametra t určte jej explicitný tvar:

a) $x=2t^2-1,\ y=4t^2-1$, b) $x=2t-1,\ y=4t-1$, c) $x=4t^2+1,\ y=3t+2$,
d) $x=2\sin\frac{\pi t}{3},\ y=\cos\frac{\pi t}{3}$, e) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$, f) $x=3t+2,\ y=4t^2+1$.

4.3.44. Zistite, aké krivky sú dané parametrickými rovnicami pre $a\in R,\ a>0$:

a) $x=\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$, b) $x=\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$,
c) $x=\cos^2 t,\ y=a\sin^2 t,\ t\in\left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$, e) $x=\sin^3 t,\ y=a\cos^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$.

4.3.45. Preveďte uvedený implicitný tvar krivky na parametrický tvar (položte $y=tx$):

a) $x^3+y^3-axy=0,\ a>0$, b) $x^2+y^2=x^3+y^3$, c) $x^2+y^2=x^4+y^4$.

4.3.46. Určte deriváciu funkcie $y=f(x)$ definovanej parametricky:

a) $x=\frac{4t^3}{3},\ y=\frac{t^2}{2},\ t\in(-\infty\,;\,\infty)$, b) $x=\frac{1-t}{1+t},\ y=\frac{2t}{1+t},\ t\in R-\{-1\}$,
c) $x=\frac{2\sin t}{1+2\cos t},\ y=\frac{4\cos t}{1+2\cos t},\ t\in\left(-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right)$, d) $x=\arcsin\frac{1}{1+t^2},\ y=\arccos\frac{1}{1+t^2},\ t\in R$,
e) $x=t-\cos t,\ y=1+\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$, f) $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
g) $x=e^{2t}\cos^2 t,\ y=e^{2t}\sin^2 t,\ t\in\left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$, h) $x=2\cosh t,\ y=4\sinh t,\ t\in(0\,;\,\infty)$.

4.3.47. Určte f', f'', f''' pre funkciu $y=f(x)$ určenú parametricky:

a) $x=4t+t^2,\ y=t^3+t,\ t\in\langle 0\,;\,\infty)$, b) $x=\ln t,\ y=\sin 2t,\ t\in(0\,;\,\infty)$,
c) $x=4\sin t,\ y=4\cos t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$, d) $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
e) $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ t\in R$, f) $x=e^t,\ y=\arcsin t,\ t\in(-1\,;\,1)$.

4.3.48. Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu $y = f(x)$ určenej parametricky:

a) $x = 4t + t^2$, $y = t^3 + t$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$ v bodoch $[0;0]$, $[5;2]$, $[12;10]$, $[21;30]$, $[32;68]$,

b) $x = t^2 - 4t + 4$, $y = t^2 - 3t + 2$, $t \in \langle 2\,;\,\infty)$ v bodoch $[1;2]$, $[4;6]$, $[9;12]$, $[16;20]$, $[25;30]$,

c) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in R$ v bodoch $[-\pi;2]$, $\left[\frac{2-\pi}{2};1\right]$, $[0;0]$, $\left[\frac{\pi-2}{2};1\right]$, $[\pi;2]$,

d) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$ v bodoch $[1;0]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $[0;1]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $[-1;0]$,

e) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$ v bodoch $[1;0]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, $[0;1]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, $[-1;0]$.

4.3.49. Nájdite inflexné body funkcie $y = f(x)$ zadanej parametricky:

a) $x = 3t + t^3 + 1$, $y = t^2 + 1$, $t \in R$,

b) $x = \sin t$, $y = \mathrm{e}^t$, $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

4.3.50. Zistite priebeh krivky určenej parametricky:

a) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$,

b) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$,

c) $x = t\,\mathrm{e}^t$, $y = t\,\mathrm{e}^{-t}$,

d) $x = \frac{\ln t}{t}$, $y = t \ln t$,

e) $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$,

f) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

Každý je taký, ako ho boh stvoril, ba často aj horší.
RODA RODA

Nemám nič proti gombíkom, v primeranom počte.
WILLIAM MAKEPEACE THACKERAY

Najhoršie je tváriť sa, že chápeme, keď nechápeme.
LEV NIKOLAJEVIČ TOLSTOJ

Táto čiara sa nazýva poludník. Jasné? Rovnobežky sa tretajú v nekonečne.
Jasné? Nekonečno je konečné. Jasné? Vám to nie je jasné?
Tak ešte raz. Táto čiara sa nazýva poludník. Jasné? ...
MACOUREK

Slony sa kreslia zmenšené, ale blcha v nadživotnej veľkosti.
JONATHAN SWIFT

Lekársky výskum urobil také pokroky,
že už napokon na svete niet zdravého človeka.
THOMAS HENRY HUXLEY

Povedz mi čo čítaš a ja ti poviem, kde si tú knihu ukradol.
ILJA ILF

Jeho svedomie bolo čisté, nikdy ho nepoužíval.
STANISLAV JERZY LEC

Keby bolo u nás konverzačné umenie na vyššej úrovni,
bola by oveľa nižšia populácia.
STANISLAV JERZY LEC

Niektoré charaktery sú nezlomné, pretože sú pružné.
STANISLAV JERZY LEC

Stretol som sa už s tak málo sčítanými ľuďmi,
že si citáty klasikov museli vymýšľať sami.
STANISLAV JERZY LEC

Niet divu, že je na univerzitách toľko učenosti.
Každý jej niečo prinesie a nijakú neodnesie.
AMY LOWELL

Práve láska, nie však k feuerbachovskému človeku, ...
nie k proletariátu, ale láska k milej, teda k Tebe,
robí opäť z muža muža.
KARL MARX

Život je krátky. Samozrejme, ale v pomere k čomu?
ANDRÉ MAUROIS

Rozum je pravdepodobne jediný dar, ktorý príroda rozdelila spravodlivo,
lebo sa nikto nesťažuje, že ho má málo.
MICHEL de MONTAIGNE

Krása sa pominie, hlúposť večná.
JOHANN NESTROY

Klamár musí mať dobrú pamäť.
QUINTILIANUS

Je to často len otázka nábytku. Pre ženu je ťažšie ostať vernou
v izbe s gaučom, než v miestnosti, kde sú len kreslá.
JUAN CARLOS REY

Starci s obľubou dávajú dobré ponaučenia,
aby sa utešovali, že už nemôžu dávať zlé príklady.
FRANÇOIS ROCHEFOUCAULD

Dobre sa obesiť, to vylúči možnosť zle sa oženiť.
WILLIAM SHAKESPEARE

Je stále lepšie byť ženatý, ako byť mŕtvy.
JEAN BAPTISTE MOLIÉRE

Výsledky cvičení

1 Základné pojmy

1.1.1. a) *„Nie je pravda, že všetci ľudia vedia plávať.“*, resp. *„Nie všetci ľudia vedia plávať.“*, resp. *„Existuje človek, ktorý nevie plávať.“*. b) Rovnica $2^x = 4x$ nemá kladný koreň x. c) Najviac jedno číslo je kladné. d) Menej ako tretina krajín patrí do OSN. e) Nie je pravda, že práve dve čísla sú kladné. Žiadne, jedno alebo viac ako tri čísla sú kladné. f) Exisuje číslo tvaru n^2, $n \in N$, ktoré nie je párne. **1.1.2.** a) $\exists x \in R$: $\sin x \geq 1$, b) $\forall x \in R$: $\sin x \geq 1$, c) $\exists! x \in R$: $\sin x \geq 1$, d) $\exists x \in R$: $\sin x < 1$, e) $\exists x \in R$: $\sin x \leq 1$, f) $\forall x \in R$: $\sin x \leq 1$, g) $\exists! x \in R$: $\sin x \leq 1$, h) $\exists x \in R$: $\sin x > 1$, i) $\exists x \in R$: $\sin x \neq 1$, j) $\forall x \in R$: $\sin x \neq 1$, k) $\exists! x \in$: $\sin x \neq 1$, l) $\exists x \in R$: $\sin x = 1$. **1.1.3.** Ak pq sú postupne PP, PN, NP, NN, potom výsledné pravdivostné hodnoty sú: a) $NNPN$, b) $PNPP$, c) $NNNP$, d) $NPPN$, e) $PPPN$, f) $PNNP$, g) $PPPN$, h) $NNPN$, i) $PPPP$, j) $PNPP$, k) $NNPP$, l) $PPNN$. **1.1.4.** a) záleží od trojuholníka, v oboch prípadoch môže byť P alebo N, b) záleží od k, v oboch prípadoch môže byť P alebo N, c) záleží od nerovnice, v oboch prípadoch môže byť P alebo N, d) vždy N, v závislosti od nerovnice môže byť P alebo N. **1.1.5.** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, resp. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [\overline{p \wedge \overline{q}} \wedge \overline{\overline{p} \wedge q}] \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})] \Leftrightarrow \overline{\overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p \vee \overline{q}}} \Leftrightarrow \overline{(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)}$. **1.1.7.** a) áno, b) áno, c) nie, d) áno, e) áno, f) áno, g) áno, h) áno, i) nie, j) áno. **1.1.9.** a) áno, b) nie, c) nie, d) nie, e) nie, f) nie, g) nie, h) áno, i) áno, j) nie, k) nie, l) áno. **1.1.10.** a) *„x je deliteľné dvomi alebo tromi práve vtedy, ak je deliteľné šiestimi.“*, neg. $(p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{p \wedge q})$: *„$x$ je deliteľné dvomi, tromi a nie šiestimi alebo je deliteľný šiestimi a nie dvomi a tromi zároveň“*, b) *„Ak je x deliteľné dvomi alebo tromi, potom je deliteľné šiestimi.“*, neg. $(p \vee q) \wedge \overline{r}$: *„$x$ je deliteľné dvomi alebo tromi a nie šiestimi.“*, c) *„Ak neplatí, že x je deliteľné dvomi alebo tromi, potom x nie je deliteľné dvomi ani tromi.“*, neg. $\overline{p \vee q} \wedge (p \vee q)$: *„Neplatí, že x je deliteľné dvomi alebo tromi a zároveň platí, že x je deliteľné dvomi alebo tromi.“*, d) *„Platí, že ak je x deliteľné dvomi potom je deliteľné aj tromi alebo neplatí, že x je deliteľné dvomi a tromi.“*, neg. $p \wedge \overline{q} \wedge r$: *„$x$ je deliteľné dvomi a nie tromi a šiestimi.“*, e) *„Implikácia, ak x je deliteľné dvomi, potom je deliteľné aj tromi, platí práve vtedy, ak je x deliteľné dvomi alebo nie je deliteľné tromi.“*, neg. $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$: *„Buď je x deliteľné dvomi a nie tromi, alebo je x deliteľné tromi a nie dvomi.“*, f) *„Ak je x deliteľné dvomi alebo šiestimi potom je x deliteľné dvomi alebo romi.“*, neg. $(p \vee r) \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}$: *„$x$ je deliteľné dvomi alebo šiestimi a zároveň nie je deliteľné dvomi ani tromi.“*. **1.1.11.** a) áno, b) nie, c) áno, d) áno, e) nie, f) áno. **1.1.12.** a) nie, b) nie, c) áno, d) nie, e) nie, f) nie. **1.1.13.** Tautológie: b), d), e), f), h), kontraindikácie: a), c), g), i), j). **1.1.14.** $\overline{\overline{p \wedge \overline{q}} \wedge \overline{\overline{\overline{r \wedge \overline{s}}} \wedge \overline{\overline{s \wedge \overline{r}}}}}$. **1.1.15.** a) $\overline{(p \wedge q) \vee r \vee s}$, b) $(p \wedge q) \wedge \overline{r \vee s}$, c) $(p \vee q) \vee \overline{r \wedge s}$. **1.1.18.** a) nie, b) nie, c) nie, d) áno, e) nie, f) áno. **1.1.19.** Pravdivosť pôvodných výrokov: a) áno, b) nie, c) áno, d) nie, e) áno, f) nie, g) áno, h) áno.

1.3.2. Do množiny 2^A patria $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, A. Do množiny 2^B patria $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, B. **1.3.3.** $2^{(n^k)}$. **1.3.4.** a) nie, b) áno, c) áno, d) nie, e) nie, f) nie, g) áno, h) nie, i) nie, j) nie, k) nie, l) áno. **1.3.5.** $A \subset B \cap D$, $A' \cup C = X$, $B \cup (D - A)' = (D - B)'$, $D \triangle (A \cap C) = D - A$. **1.3.6.** $R \subset P$. **1.3.7.** $A \cup B = B$, $B \cap D' = B - A$, $B \cap D' \subset A \triangle C$, $B \cap D' \subset A \cup B$. **1.3.9.** a) $\{2, 4, 8, 10, 14\}$, $\{2, 4, 6, 8, 12, 14\}$, $\{3, 6, 9, 12\}$, b) $\{3, 9, 15\}$, $\{5, 15\}$, $\{5, 10\}$, c) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$, $\{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$, $\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$, d) $\{6, 12\}$, $\{10\}$, $\{15\}$, e) $\emptyset$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$, f) $\{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$, $\{2, 4, 5, 6, 8, 12, 14, 15\}$, $\{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$, g) $\{5, 6, 10, 12, 15\}$, $\{10, 15\}$, h) $\{3, 6, 9, 10, 12, 15\}$, $\{6, 12, 15\}$, i) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$, $\{6, 10, 12\}$, j) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$, $\{6, 12\}$, k) $\{10, 15\}$, l) $\{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$, m) $\{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$, n) $\{3, 6, 9, 10, 12, 15\}$. **1.3.13.** Obidve. **1.3.14.** a) relácia medzi A a B, aj B a A, b) nie, c) relácia medzi A a B, d) relácia medzi A a B, zobrazenie z B do A. **1.3.15.** $[\pm 2; \pm 1]$. **1.3.16.** a) $f = \{[a;a], [a;b], [a;c], [a;d], [a;e], [b;a], [b;b], [b;c], [b;d], [b;e], [c;a], [c;b], [c;c], [c;d], [c;e], [d;a], [d;b], [d;c], [d;d], [d;e], [e;a], [e;b], [e;c], [e;d], [e;e]\}$, b) $f = \{[a;a], [a;b], [a;e], [b;a], [b;b], [b;c], [c;b], [c;c], [c;d], [d;c], [d;d], [d;e], [e;a], [e;d], [e;e]\}$, c) $f = \{[a;a], [a;c], [a;e], [b;b], [c;c], [c;e], [d;d], [e;e]\}$, d) $f = \{[a;a], [a;c], [a;e], [c;a], [c;c], [c;e], [e;a], [e;c], [e;e]\}$. **1.3.17.** a) áno, b) nie. **1.3.19.** a) spočítateľná, b) nespočítateľná, c) nespočítateľná, d) nespočítateľná. **1.3.20.** Nespočítateľná.

2 Reálne čísla

2.1.6. a) 2 a 3, b) 0 a 3/2, c) 0 a 1, d) 0 a $\sin 1$, e) 0 a 1/2, f) 1 a ∞. **2.1.7.** a) $-1/3$ a $1/2$, b) $(\sqrt{5} - 1)/2$ a ∞. **2.1.14.** a) $\langle 3; 4\rangle$, b) $(3; 4)$, c) $(3; 4) \cup (4; \infty)$. **2.1.15.** a) $(-\infty; 1)$, b) R, c) $(0; \infty)$, d) R, e) $\emptyset$, f) $(-\infty; 0)$, g) $(0; \infty)$, h) $R - \{\pm\sqrt{3}\}$, i) $\langle(-1 - \sqrt{5})/2; 0\rangle \cup \langle(-1 + \sqrt{5})/2; \infty)$, j) R, k) $\langle 0; 1\rangle$, l) $\langle 0; \infty)$. **2.1.18.** a) $(-4; (-3 - \sqrt{21})/2) \cup ((-3 + \sqrt{21})/2; 1)$, b) $(-\infty; 2 - \sqrt{5}\rangle \cup \langle 2 + \sqrt{5}; \infty)$, c) $(-\infty; (-1 - \sqrt{13})/2) \cup (-2; 1) \cup ((-1 + \sqrt{13})/2; \infty)$. **2.1.19.** Dlhšia odvesna väčšia ako $(1 + \sqrt{241})/2$. **2.1.20.** a) $(-\infty; -1/2\rangle \cup (1/2; \infty)$, b) komplexné pre $(-4\sqrt{3}; 4\sqrt{3})$, c) komplexné pre $(25/4; \infty)$.

2.2.3. a) $\{0\} \cup \{n^{-1}; n \in N\}$, b) $\{0\} \cup \{n^{-1}; n \in N\} \cup \{n^{-2}; n \in N\}$, c) $\{0\}$, d) $N \cup \{\infty\}$, e) $\{n^2; n \in N\} \cup \{\infty\}$, f) $\{0\}$, g) R^*, h) R^*, i) R^*.

2.3.1. a) rastúca, ohraničená zhora číslom 1, b) klesajúca, ohraničená zdola číslom 1/2, c) klesajúca, ohraničená zdola číslom 1, d) rastúca, nie je ohraničená zhora, e) rastúca, nie je ohraničená zhora, f) rastúca, nie je ohraničená zhora, g) klesajúca, ohraničená zdola číslom 0, h) nie je monotónna, nie je ohraničená zdola ani zhora, i) nie je monotónna, ohraničená zdola číslom 0 a zhora číslom 3, j) rastúca, ohraničená zhora číslom 0, k) rastúca, ohraničená zhora číslom 1. **2.3.2.** a) $\{0\}$, b) $\{1\}$, c) $\{1\}$, d) $\{1/2, 2\}$. **2.3.3.** $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = n$), resp. diverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$ pre n párne a $b_n = n^{-1}$ pre n nepárne), $\{b_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = n^{-2}$, $b_n = n$). **2.3.4.** $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = \mp n$), diverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = \pm n$), $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$), resp. diverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = n^2$, $b_n = n$), $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$). **2.3.5.** a) napr. $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$, b) napr. $a_n = n^{-1}$, $b_n = n^{-2}$, c) napr. $a_n = n + 4$, $b_n = n$, d) neexistujú. **2.3.6.** $a_n = -(n^2 - 3n + 4)/2$. **2.3.7.** a) $a_{n+1} = 2a_n - 3$, b) $a_{n+1} = 2 - a_n$, c) $a_{n+1} = a_n - 1$, d) $a_{n+1} = a_n/(a_n + 1)$. **2.3.8.** a) $a_n = n$, b) $a_n = (-1)^{n+1}$, c) $a_n = 2^{n-1} n!$. **2.3.9.** a) ± 1, b) 0, c) ± 1, d) 0, e) ∞, f) $\pm\infty$, g) 0. **2.3.10.** 200. **2.3.11.** a) $a_n = a(\sqrt{2}/2)^{n-1}$, b) $8a/(2 - \sqrt{2})$, c) $2a^2$. **2.3.12.** -2. **2.3.13.** a) áno, b) áno, c) nie, d) áno, e) áno, f) áno. **2.3.14.** a) 2, b) 4, c) 5, d) 1, e) 1, f) 2, g) 0, h) $(1 + \sqrt{5})/2$. **2.3.15.** a) 0, b) 0, c) 0, d) 0. **2.3.16.** a) 61/450, b) 8/15, c) 1, d) 50/99, e) 2/3, f) 4/33. **2.3.17.** a) $a \leq 3$, b) $-1 < a \leq 1$, c) $-4 < a \leq 2$, d) $a > -1$. **2.3.18.** a) $a = 0$, $b = -1$, b) $a = -1$, $b = 2$, c) $a < 2$, $b = 0$, resp. $a = 3$, $b = -1$, d) $a > 2$, $b = 0$. **2.3.20.** a) 1, b) 2, c) 1, d) $(1 + \sqrt{1 + 4a})/2$. **2.3.21.** a) 1, b) 1, c) -5, d) 0, e) 1/6, f) 1/3, g) 4/3, h) 2. **2.3.22.** a) ∞, b) 1/2, c) 0, d) 1, e) -4, f) 5/3, g) 1, h) ∞, i) 4. **2.3.23.** a) -1, b) -1, c) 0, d) 1, e) ∞, f) 1, g) ∞, h) 0, i) 0, j) 1, k) 0, l) 0, m) 0, n) 1, o) e^{-2}, p) $\mathrm{e}^{-3/2}$, q) e^{-1}, r) e^{-5}, s) $\mathrm{e}^{-1/3}$, t) e. **2.3.24.** a) 1/3, b) ∞, c) $-\infty$, d) 1, e) 1, f) $1/\sqrt{2}$, g) 0, h) 2. **2.3.25.** a) $1/b$, b) $1/b$, c) $\sqrt{ab}$. **2.3.26.** a) a pre $-1 < a < 1$, 1/2 pre $a = 1$, 0 pre $a > 1$, resp. $a < -1$, $\nexists$ pre $a = -1$, b) 0 pre $-1 < a < 1$, 1/2 pre $a = 1$, 1 pre $a > 1$, resp. $a < -1$, $\nexists$ pre $a = -1$, c) 0 pre $a \neq 1$, 1/2 pre $a = 1$, $\nexists$ pre $a = -1$, d) 0 pre $-5 < a < 1$, 1 pre $a = -1$, ∞ pre $a > -1$, $\nexists$ pre $a \leq -5$, e) 0 pre $-1 < a < 1$, e pre $a = 1$, ∞ pre $a > 1$, $\nexists$ pre $a \leq -1$, f) a^2, g) e^{-2a}, h) 0 pre $-3 < a < 3$, -1 pre $a = 3$,

$-\infty$ pre $a>3$, $\nexists$ pre $a\le -3$. **2.3.27.** a) 0, b) 0, c) $a/2$, d) 0, e) $1/2$, f) $-\infty$, g) 0, h) 0, i) $1/2$, j) ∞ pre $a>b$, $-2a$ pre $a=b$, $-\infty$ pre $a<b$, k) $a-b$, l) ∞ pre $a<1$, 3 pre $a=1$, $-\infty$ pre $a>1$. **2.3.28.** a) 1, b) $5/3$, c) 0, d) $2/3$, e) $(a+b)/2$, f) 1. **2.3.29.** a) ∞ pre $a>1/4$, 1 pre $a=1/4$, 0 pre $a<1/4$, b) 1 pre $a\le 1$, a pre $a>1$, c) a, d) 0 pre $a<1$, ∞ pre $a\ge 1$, e) $\ln a$ pre $a>0$, 0 pre $a=0$, f) a/b pre $b>0$, ∞ pre $b=0$, g) $\ln a-\ln b$ pre $a\ge b>0$, ∞ pre $a>b=0$, 0 pre $a=b=0$. **2.3.30.** ∞.

2.4.1. a) diverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) diverguje, e) konverguje, f) diverguje, g) konverguje, h) konverguje, i) diverguje, j) diverguje, k) diverguje, l) diverguje, m) diverguje, n) diverguje, o) diverguje [ukážte, že $a_{n+1}/a_n>1$], p) konverguje, q) konverguje, r) diverguje, s) konverguje, t) konverguje, u) konverguje, v) diverguje, w) diverguje, x) diverguje, y) konverguje. **2.4.2.** a) diverguje, b) diverguje, c) diverguje, d) konverguje, e) konverguje, f) konverguje, g) konverguje, h) konverguje, i) diverguje, j) diverguje, k) diverguje, l) diverguje, m) konverguje n) diverguje o) konverguje p) diverguje, q) konverguje, r) konverguje, s) konverguje, t) diverguje, u) konverguje, v) diverguje, w) diverguje, x) konverguje [porovnajte s radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^a$]. **2.4.3.** a) konverguje, b) diverguje, c) konverguje, d) konverguje, e) diverguje, f) diverguje, g) diverguje, h) konverguje, i) konverguje, j) diverguje, k) konverguje, l) konverguje, m) diverguje, n) konverguje, o) diverguje, p) konverguje, q) konverguje, r) konverguje. **2.4.4.** a) konverguje, b) diverguje, c) diverguje, d) konverguje, e) konverguje, f) konverguje, g) konverguje, h) diverguje, i) diverguje, j) diverguje, k) konverguje, l) diverguje, m) konverguje, n) konverguje, o) konverguje, p) konverguje, q) konverguje, r) konverguje, s) konverguje, t) konverguje, u) konverguje, v) diverguje, w) konverguje, x) konverguje. **2.4.5.** a) diverguje, b) konverguje, c) konverguje, d) konverguje, e) konverguje, f) diverguje, g) diverguje, h) diverguje, i) konverguje, j) konverguje, k) konverguje, l) konverguje. **2.4.6.** a) $1/2$, b) $1/2$, c) ∞, d) $319/1680$, e) 1, f) $1/24$, g) $3/2$, h) 3, i) $1/4$, j) $2/5$, k) $-5/12$, l) $1/3$, m) $1-\sqrt{2}$, n) $8/4928$. **2.4.7.** a) relatívne konverguje, b) relatívne konverguje, c) relatívne konverguje, d) absolútne konverguje, e) relatívne konverguje, f) relatívne konverguje, g) diverguje, h) diverguje, i) absolútne konverguje, j) absolútne konverguje, k) absolútne konverguje, l) relatívne konverguje, m) relatívne konverguje, n) diverguje, o) relatívne konverguje. **2.4.8.** a) $a>3/2$, b) $a>2$, c) $a>1$, d) $a>1$, e) $a>\mathrm{e}$, f) $0<a<\mathrm{e}^{-1}$, g) $a<0$, h) $a>1/2$. **2.4.9.** a) konvergujú (napr. $a_n=-b_n$), resp. divergujú (napr. $a_n=b_n=n$), b) konvergujú (napr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\{0,1,0,1,\ldots\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\{1,0,1,0,\ldots\}$), resp. divergujú (napr. $a_n=b_n=n$), c) konvergujú (napr. $a_n=n$, $b_n=a^2$), resp. divergujú (napr. $a_n=b_n$), d) konvergujú (napr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\{0,-1,0,-1,\ldots\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\{-1,0,-1,0,\ldots\}$), resp. divergujú (napr. $a_n=b_n=n$). **2.4.10.** a) diverguje, b) konverguje (napr. $a_n=0$, $b_n=1$), resp. diverguje (napr. $a_n=1/n^2$, $b_n=n$), c) konverguje (napr. $a_n=1/n^2$, $b_n=n$), resp. diverguje (napr. $a_n=1/n^2$, $b_n=1/n$), d) konverguje (napr. $a_n=0$, $b_n=-1/n$), resp. diverguje (napr. $a_n=0$, $b_n=1/n$). **2.4.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n]/3^n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/9^n=1/4$. **2.4.15.** $14+14/17$. **2.4.20.** a) $s=1$, $a_n=1/2^n$, b) $s=1$, $a_1=3/2$, $a_n=-1/2^n$, c) $s=0$, $a_1=-1$, $a_n=(-1)^n(2n-1)/(n^2-n)$ pre $n\ge 2$, d) $s=1/2$, $a_1=-1/2$, $a_n=1/(n^2-n)$ pre $n\ge 2$. **2.4.21.** a) $1,6<s<1,7$, b) $1,206<s<1,207$, c) $0,12<s<0,15$. **2.4.22.** konverguje, $a_n=a_1\sqrt{(1-a_1^2)^{(n-1)}}$, $a=a_1/[1-\sqrt{1-a_1^2}]$, $P=\sqrt{1-a_1^2}/(2a_1)$. **2.4.23.** $2\pi h^3R^2/(12R^2+9h^2)$. **2.4.24.** a) $\sqrt{2}d$ (nezávisí od n), b) $(\sqrt{2}+1)d$ (nezávisí od n), c) $\pi d/2$ (nezávisí od n), d) $2d$ (nezávisí od n). **2.4.25.** a) $\sqrt{2}o=2\sqrt{2}\pi r$, b) $(\sqrt{2}+1)o=(\sqrt{2}+1)2\pi r$, c) $\pi o/2=\pi^2 r$, d) $2o=4\pi r$. **2.4.26.** a) $P+0=P$, b) $P+0=P$, c) $P+0=P$, d) $P+0=P$.

3 Reálne funkcie

3.1.1. a) nie, b) áno, c) áno, d) áno, e) nie, f) áno, g) áno, h) áno. **3.1.2.** a) $\langle \mathrm{e}^{-1};\, \mathrm{e}\rangle$, b) $R-\{\pi/2+2k\pi\,;\, k\in Z\}$, c) $(-\infty;\,-1\rangle\cup\langle 1;\,\infty)$, d) $\langle\sqrt{0+2k\pi};\,\sqrt{\pi+2k\pi}\rangle$, $k\in Z$, e) $Z\cup\langle 0;\,\infty)$, f) $\langle(2k\pi)^2;\,(2k+1)^2\pi^2\rangle$, $k=0,1,\ldots$ g) $\langle 0;\,\pi^2/4\rangle\cup\langle(-\pi^2+2k\pi)^2;\,(\pi^2+2k\pi)^2\rangle$, $k\in Z$, h) $\langle\sqrt{(4k-1)\pi/2};\,\sqrt{(4k+1)\pi/2}\rangle\cup\langle-\sqrt{(4k+1)\pi/2};\,-\sqrt{(4k-1)\pi/2}\rangle$, $k=0,1,\ldots$, i) $R-\{\pm\sqrt{1/2}\}$, j) $(0;\,\infty)-N$, k) $(1;\,\infty)\cup((-2k+1)^{-1};\,(-2k)^{-1})\cup((2k+1)^{-1};\,(2k)^{-1})$, $k\in N$, l) $(-\infty;\,-1\rangle\cup(1;\,\infty)$, m) $(-\infty;\,0)$, n) $(-1;\,1)$, o) $R-\langle 2;\,3)$, p) $\langle 2;\,\infty)-\{4\}$, q) R, r) $(\mathrm{e};\,\infty)$, s) $\langle\pi/4+k\pi;\,\pi/2+k\pi)$, $k\in Z$, t) $(-\infty;\,0\rangle$, u) $(-\infty;\,-1)\cup\langle 1;\,\infty)$, v) $R-\{-1\}$, w) $(-\infty;\,-1)\cup(0;\,\infty)$, x) $(-\infty;\,-2)\cup(3;\,\infty)$. **3.1.3.** a) $(-\pi/4+k\pi/2;\,\pi/8+k\pi/2\rangle$, $k\in Z$, b) $R-\langle-2;\,2\rangle$, c) $(2;\,\infty)$, d) $\langle k\pi;\,\pi/2+k\pi\rangle$, $k\in Z$, e) $\langle 0+2k\pi;\,\pi/2+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, f) $\emptyset$, g) $\langle-5\pi/6+k\pi;\,5\pi/6+k\pi\rangle$, $k\in Z$, h) $\langle 0;\,1)\cup(1;\,\infty)$, i) $R-\{1\pm\sqrt{7}\}$, j) $(0;\,\infty)$, k) $(-\pi/2+k\pi;\,\pi/4+k\pi)$, $k\in Z$, l) $(-\pi/6+2k\pi;\,\pi/6+2k\pi)$, $k\in Z$, m) R, n) R, o) $\langle-2;\,4\rangle$, p) $\langle-1;\,1\rangle$, q) $\langle-1;\,1\rangle$, r) $\langle-1;\,1\rangle$, s) $\langle 0;\,4\rangle$, t) $(-\infty;\,\sqrt{3}\rangle\cup\langle 0;\,\sqrt{3}\rangle$, u) $\langle-4;\,0\rangle$. **3.1.4.** a) $\langle-1;\,3\rangle$, b) $\langle-1/3;\,1\rangle$, c) $(-1;\,1)\cup(2;\,\infty)$, d) $\langle 1;\,100\rangle$, e) $R-\{(1+k\pi)/2\,;\,k\in Z\}$, f) $\emptyset$, g) $(-\infty;\,-8\rangle\cup\langle-2;\,2\rangle\cup\langle 8;\,\infty)$, h) $\langle-\ln 2;\,\ln 2)$, i) $(-\infty;\,-1\rangle\cup\langle 1;\,\infty)$, j) $R-\{3\pi/2+2k\pi\,;\,k\in Z\}$, k) $(-\infty;\,\ln 3\rangle$, l) $\langle 1/\mathrm{e};\,\infty)-\{1\}$, m) $(-1/3;\,\infty)$, n) $(3/2;\,\infty)$, o) $(-\infty;\,\infty)-\{-1\}$, p) $\langle 0;\,\infty)$, q) $\langle-2k+1;\,-2k+2)$, $k\in Z$, r) $\langle-1/3;\,1\rangle$. **3.1.7.** a) áno, b) nie, c) nie. **3.1.8.** $f=h$. **3.1.11.** a) párna, b) párna, c) nepárna, d) ani párna ani nepárna, e) nepárna, f) nepárna, g) ani párna ani nepárna, h) párna a aj nepárna, i) nepárna, j) párna, k) nepárna, l) párna, m) nepárna, n) párna, o) párna, p) nepárna, q) nepárna, r) párna, s) ani párna ani nepárna, t) ani párna ani nepárna, u) nepárna, v) párna, w) párna, x) nepárna. **3.1.13.** Párna, nepárna: a) 1, x, b) $|x|$, x, c) $x^2+|x|$, 0, d) x^2, x, e) $\chi(x)$, 0, resp. 0, $\chi(x)$, resp. $\chi(x)/2$, $\chi(x)/2$, f) $\cosh x$, $\sinh x$, g) $1/(1-x^2)$, $-x/(1-x^2)$, h) x^2+1, $-2x$, i) $-(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)/2$, $(2x-\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)/2$, j) $(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)/2$, $(2x+\lfloor x\rfloor-\lfloor -x\rfloor)/2$, k) $((-1)^{\lfloor x-1\rfloor}+(-1)^{\lfloor -x-1\rfloor})/2$, $((-1)^{\lfloor x-1\rfloor}-(-1)^{\lfloor -x-1\rfloor})/2$, l) $(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor+2\,|x|)/2$, $(\lfloor x\rfloor-\lfloor -x\rfloor)/2$. **3.1.14.** Párna, resp. nepárna: a) $y=|x|-1$, $x\in R$, resp. $y=x-1$, $x>0$, $y=x+1$, $x<0$, b) $y=|x-1|$, $x>0$, $y=|x+1|$, $x<0$, resp. $y=|x-1|$, $x>0$, $y=-|x+1|$, $x<0$, c) $y=\sqrt{x+1}$, $x>0$, $y=\sqrt{-x+1}$, $x<0$, resp. $y=\sqrt{x+1}$, $x>0$, $y=-\sqrt{-x+1}$, $x<0$, d) $y=(x+1)^{-1}$, $x>0$, $y=(-x+1)^{-1}$, $x<0$, resp. $y=(x+1)^{-1}$, $x>0$, $y=(x-1)^{-1}$, $x<0$, e) $y=x+\lfloor x\rfloor$, $x>0$, $y=-x+\lfloor -x\rfloor$, $x<0$, resp. $y=x+\lfloor x\rfloor$, $x>0$, $y=x-\lfloor -x\rfloor$, $x<0$, f) $y=x^2-x$, $x>0$, $y=x^2+x$, $x<0$, resp. $y=x^2-x$, $x>0$, $y=-x^2-x$, $x<0$. **3.1.15.** a) áno, π, b) nie, c) áno, π, d) áno, 2, e) áno, 1, f) áno, nemá (všetky $p\in R$), g) áno, nemá (všetky $p\in R$), h) áno, 2. **3.1.16.** a) áno, 2π, b) áno, π, c) nie, d) áno, 2π, e) áno, 2π, f) áno, 2π, g) áno, π, h) áno, π, i) nie, j) áno, 2, k) áno, 2, l) nie. **3.1.17.** a) $y=(x-k)^2$, $x\in(k;\,k+1\rangle$, $k\in Z$, b) $y=(x+1-k)^2$, $x\in(k;\,k+1\rangle$, $k\in Z$, c) $y=\sqrt{x+3-k}$, $x\in(k;\,k+1\rangle$, $k\in Z$. **3.1.18.** Uvedieme iba definíciu funkcie na intrevale periodicity: a) napr. $y=1-x$ pre $x\in\langle 0;\,1)$, $y=0$ pre $x\in\langle 1;\,3\rangle$ a $y=x-3$ pre $x\in\langle 3;\,4\rangle$, b) napr. $p=9$, $y=x-1$ pre $x\in\langle 1;\,3\rangle$, $y=2$ pre $x\in\langle 3;\,6\rangle$, $y=8-x$ pre $x\in\langle 6;\,8\rangle$ a $y=0$ pre $x\in\langle 8;\,10\rangle$, c) napr. $p=8$, $y=x+2$ pre $x\in\langle-4;\,-1\rangle$, $y=-x$ pre $x\in\langle-1;\,1\rangle$, $y=x-2$ pre $x\in\langle 1;\,4\rangle$, d) neexistuje, e) napr. $f(0)=0$, $f(x)=3-x$ pre $x\in\langle 1;\,5\rangle$, f) napr. $f(x)=3-x$ pre $x\in\langle 0;\,3\rangle$ a $f(x)=x-5$ pre $x\in\langle 5;\,8\rangle$. **3.1.20.** a) na $(-\infty;\,-1\rangle$, $\langle 1;\,\infty)$, $(1/(k+1);\,1/k\rangle$, $k\in Z-\{0,-1\}$ je konštantná, b) na $(-\infty;\,1/2\rangle$ klesá, na $\langle 1/2;\,\infty)$ rastie, c) na $(-\infty;\,3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2;\,\infty)$ rastie, d) na $(-\infty;\,-1\rangle$ klesá, na $\langle-1;\,2\rangle$ je konštantná a na $\langle 2;\,\infty)$ rastie, e) na $(-\infty;\,3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2;\,\infty)$ rastie, f) na $(-\infty;\,-\sqrt{3/2}\rangle$ a $\langle 0;\,\sqrt{3/2}\rangle$ klesá a na $\langle-\sqrt{3/2};\,0\rangle$ a $\langle\sqrt{3/2};\,\infty)$ rastie, g) na $(-\infty;\,0\rangle$ rastie a na $\langle 0;\,\infty)$ je konštantná, h) na $(0;\,\sqrt{\mathrm{e}}\rangle$ klesá a na $\langle\sqrt{\mathrm{e}};\,\infty)$ rastie, i) klesá na R, j) na $(-\infty;\,-\sqrt{1/3}\rangle$ a $\langle\sqrt{1/3};\,\infty)$ rastie a na $\langle-\sqrt{1/3};\,\sqrt{1/3}\rangle$ klesá, k) klesá na $(-\infty;\,2/3\rangle$, l) na $(-\infty;\,-3\rangle$ a $\langle 0;\,\infty)$ je konštantná a na $\langle-3;\,0\rangle$ rastie, m) rastie na $\langle k;\,k+1)$, $k\in Z$, n) na $(-\infty;\,-1\rangle$ klesá a na $\langle-1;\,\infty)$ rastie, o) na $(-\infty;\,0\rangle$ je konštantná a na $\langle 0;\,\infty)$ rastie, p) rastie na $\langle 1;\,\infty)$, q) klesá na $(-\infty;\,3)$ a $\langle 3;\,\infty)$, r) klesá na $(-\infty;\,3)$ a $\langle 3;\,\infty)$, s) rastie na $\langle 0;\,\infty)$, t) rastie na $(0;\,\infty)$. **3.1.21.** a) ohraničená zdola, $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, b) ohraničená zdola, $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, c) ohraničená, $\inf f(x)=\min f(x)=1/2$, $\sup f(x)=\max f(x)=1$, d) ohraničená, $\inf f(x)=-14$, $\sup f(x)=\max f(x)=1$, e) ohraničená zdola, $\inf f(x)=\min f(x)=1$, $\sup f(x)=\infty$, f) ohraničená, $\inf f(x)=\min f(x)=2$, $\sup f(x)=17$. **3.1.22.** a) $\min f(x)=3/2$, $\sup f(x)=\infty$, b) $\inf f(x)=-\infty$, $\sup f(x)=\infty$, c) $\min f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, d) $\min f(x)=-1/4$, $\sup f(x)=\infty$, e) $\min f(x)=0$, $\max f(x)=1$, f) $\min f(x)=-1$, $\max f(x)=1$, g) $\min f(x)=1$, $\max f(x)=3$, h) $\min f(x)=-1$, $\max f(x)=1$. **3.1.23.** $f(g)=g(f)$: $y=1-x^2$, $f(h)=h(f)$: $y=\sin x$, $h(g)=f[h(g)]=h[f(g)]=h[g(f)]$: $y=\sin(1-x^2)$, $g(h)=f[g(h)]=g[f(h)]=g[h(f)]$: $y=1-\sin^2 x$. **3.1.24.** Porade $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$: a) $8-2x$, $4-2x$, $4x$, x, b) $1-x^2+x^4$, $2x+3x^2+2x^3+x^4$, $3+3x+4x^2+2x^3+x^4$, $-2x^2+x^4$, c) $\ln\sqrt{1-|x|}$, $\sqrt{1-|\ln x|}$, $\ln\ln x$, $\sqrt{1-|\sqrt{1-|x|}|}$, d) $\ln\sinh x$, $(-1+x^2)/(2x)$, $\ln\ln x$, $\sinh\sinh x$, e) $\operatorname{argsinh}\cosh x$, $\sqrt{1+x^2}$, $\cosh\operatorname{argsinh} x$, $\cosh\cosh x$, f) x, x, x^4, $\sqrt[4]{x}$, g) $(\sqrt{x}+1)^2$, $x+1$, $4+8x+8x^2+4x^3+x^4$, $\sqrt[4]{x}$, f) $x^2\pm\lfloor x\rfloor$, $x^2\lfloor x\rfloor$, $x^2/\lfloor x\rfloor$, $\lfloor x\rfloor^2$, $\lfloor x^2\rfloor$, x^4, $\lfloor x\rfloor$, i) $-x+x^2+\lfloor x^2-x\rfloor$, $-x+x^2-\lfloor x\rfloor+2x\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor^2$, $x+\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor$, $x-2x^3+x^4$, j) $\sqrt{(5+2x)/(2+x)}$, $1/(2+\sqrt{x+2})$, $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$, $(2+x)/(5+2x)$. **3.1.25.** a) $|g|=g$, $f+g$: $y=x+1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=2x^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, g^2:

$y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, fg: $y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4+x^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, f/g: $y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2/(x^2+1)$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(g)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(g)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, b) $|g|=g$, $f+g$: $y=x+x^2$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2+x+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, g^2: $y=x^2$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, fg: $y=x^3$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^3+x$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, f/g: $y=1/x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2/(x+1)$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(g)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(g)$: $y=x^4$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x+2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$. **3.1.26.** Pre $n\in N\cup\{0\}$: a) $f_n(x)=x+n$, b) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, c) $f_n(x)=(a_n+xa_{n+1})/(a_{n-1}+xa_n)$, kde a_n je n-tý člen Fibonacciho postupnosti, d) $f_n(x)=x/(1+nx)$, e) $f_{4n}(x)=x$, $f_{4n+1}(x)=f(x)$, $f_{4n+2}(x)=-1/x$, $f_{4n+3}(x)=-1/f(x)$, f) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, g) $f_n(x)=x/(1-nx)$, h) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, i) $f_{4n}(x)=x$, $f_{4n+1}(x)=f(x)$, $f_{4n+2}(x)=-1/x$, $f_{4n+3}(x)=-1/f(x)$, j) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, k) $f_n(x)=(a_n-xa_{n+1})/(-a_{n-1}+xa_n)$, kde a_n je n-tý člen Fibonacciho postupnosti, l) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$. **3.1.27.** a) $R-(0;\,1\rangle$, b) $R-\big(2-\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\big)$, c) $(-\infty;\,2/3)$. **3.1.30.** a) $y=\sqrt{x+1}$, $x\in\langle 3;\,24\rangle$, b) $y=3x/(1-x)$, $x\in R-\{1\}$, c) $y=4+\sqrt{x}$, $x\in\langle 0;\,1\rangle$, d) $y=(\arcsin x+1)/3$, $x\in(-1;\,1)$, e) $y=\mathrm{e}^{2x}+1$, $x\in R$, f) $y=1+2\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$, $x\in R$. **3.1.31.** a) $D(f)=(-\pi/2;\,\pi/2)$, f^{-1}: $y=\operatorname{arctg}(x/2-1/2)$, b) $D(f)=(-\pi/2;\,\pi/2)$, f^{-1}: $y=x$, c) $D(f)=(-\pi/2;\,\pi/2)$, f^{-1}: $y=\arcsin(1-x^2)$, d) $D(f)=(-\infty;\,0\rangle$, f^{-1}: $y=\ln\cos x$, e) $D(f)=\langle 0;\,\pi/2)$, f^{-1}: $y=\arccos\mathrm{e}^x$, f) $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, f^{-1}: $y=\sqrt{1-\ln(1+x)}$, g) $D(f)=R$, f^{-1}: $y=\ln(\mathrm{e}^x-1)$, h) $D(f)=R$, f^{-1}: $y=1+\ln(x+1)$, i) $D(f)=\langle -1;\,1\rangle$, f^{-1}: $y=x$, j) $D(f)=\langle 1;\,\infty)$, f^{-1}: $y=1+\sqrt{2+x}$, k) $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, f^{-1}: $y=\sqrt[4]{x+1}$, l) $D(f)=\langle -1;\,\infty)$, f^{-1}: $y=-1+x^2$, m) $D(f)=(2/3;\,\infty)$, f^{-1}: $y=(1+2x)/(1+3x)$, n) $D(f)=\langle 0;\,\pi)$, f^{-1}: $y=\arccos((1-x)/(1+x))$, o) $D(f)=\langle 0;\,3\rangle$, f^{-1}: $y=3\sin x^2$, p) $D(f)=R$, f^{-1}: $y=\ln(1/2)\ln((1-x)/(1+x))$. **3.1.32.** a) $D(f)=(3;\,\infty)$, $H(f)=R$, f^{-1}: $y=(5+\sqrt{1+4\,\mathrm{e}^x})/2$, b) $D(f)=R$, $H(f)=\langle 0;\,\infty)$, f^{-1}: $y=\ln\sqrt{x^2-2x}$, c) $D(f)=\langle 0;\,1\rangle$, $H(f)=\langle 0;\,\pi+1\rangle$, f^{-1}: $y=\cos((1-x^2)/2)$, d) $D(f)=R$, $H(f)=R$, f^{-1}: $y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x/2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, e) $D(f)=R$, $H(f)=R$, f^{-1}: $y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, f) $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, $H(f)=\langle 0;\,\infty)$, f^{-1}: $y=\sqrt{x}$, resp. f^{-1}: $y=x$.

3.2.1. a) 0, b) 1, c) 1, d) e^{-1}, e) 9, f) -1, g) $\nexists$, h) $1/2$, i) 4, j) $10/9$, k) 1, l) -1, m) $\nexists$, n) $-\sqrt{2}/2$, o) $\sqrt{2}/2$, p) $\sqrt{2}/2$, q) $\ln a/\ln b$, r) 0, s) 0, t) 2, u) $-\ln 3/3$, v) $\nexists$, w) $\nexists$, x) $-2/\sin 3$. **3.2.2.** a) n/m, b) m/n, c) a, d) $a-b$, e) $1/2$, f) $1/2$, g) $1/3$, h) $\ln 3/\ln 6$, i) e^a, j) 0, k) 1, l) 3, m) π, n) π, o) 1, p) $1/4$, q) 3, r) $\nexists$, s) $-\infty$, t) ∞. **3.2.3.** a) 1, b) $1/\sqrt{\mathrm{e}}$, c) 1, d) $1/\mathrm{e}$, e) e^3, f) 0, g) 1, h) 1, i) $\nexists$, j) 1, k) -1, l) -12, m) e^5, n) e^5, o) -1, p) 1, q) $1/12$, r) $1/3$, s) π, t) $3/5$, u) $1/3$, v) $5/6$, w) $3/5$, x) $4/3$. **3.2.4.** a) 1, b) 0, c) $(2a)^{-1}$, d) $\sqrt{2}/4$, e) $\sqrt{2}/4$, f) 0, g) $-2/5$, h) -1, i) $1/8$, j) $\nexists$, k) 4, l) $5/2$, m) 0, n) $1/2$, o) $-\infty$, p) ∞, q) 0, r) $\nexists$, s) 0, t) 0, u) $\nexists$. **3.2.5.** a) $1/8$, b) 4, c) -1, d) $15/2$, e) $1/4$, f) $-2/3$, g) $1/n$, h) $11/3$, i) $\sqrt[3]{2}/3$, j) 1, k) $-\sqrt{2}/2$, l) 2, m) -1, n) 2, o) $1/2$, p) 1, q) $\sqrt{2/3}$, r) 1, s) $1/\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$, t) $\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$, u) 1, v) $2/\pi$, w) 1, x) $2/\sqrt{3}$. **3.2.6.** a) $3/2$, b) $3/2$, c) 0, d) 6, e) 1, f) $1/2$, g) $6\sqrt{2}$, h) ∞, i) $-1/2$, j) $3/2$, k) $(a-1)/(3a^2)$, l) 1, m) $-1/4$, n) $(n^2-m^2)/2$, o) $\cos x$, p) $\sqrt{\mathrm{e}^3}$, q) -1, r) $1/2$, s) $\nexists$, t) $-\pi/2$, u) $\pi/2$. **3.2.7.** a) 0, b) $1/6^{100}$, c) $1/4$, d) $-1/2$, e) -2, f) 3, g) $2a$, h) a, i) 6, j) 0, k) 0, l) 0, m) 2, n) 1, o) $2\cos a$, p) $2\cos x$.

3.3.1. Body nespojitosti: a) 0 odstrániteľný, b) $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, c) 1 neodstrániteľný 2. druhu, d) 0 neodstrániteľný 1. druhu, e) $k\pi$, $\pi/2+2k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, f) $2k\pi$, $\pi/2+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, g) $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, h) $\pi/2+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, i) 0 neodstrániteľný 2. druhu, j) 0 neodstrániteľný 2. druhu, k) nie sú, l) 0 odstrániteľný, m) $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, n) $\pi/2+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, o) nie sú, p) nie sú, q) 0 odstrániteľný, r) 0 neodstrániteľný 1. druhu, s) 0 odstrániteľný, resp. $k\pi$, $k\in Z-\{0\}$ neodstrániteľný 2. druhu, t) 0 neodstrániteľný 2. druhu. **3.3.2.** a) 2, b) $a\in R$, c) 1, d) 1. **3.3.3.** a) $a=2$, $b=-2$, b) $a=7/4$, $b=-3/2$. **3.3.4.** a) $1/2$, b) $1/4$, c) 4, d) e^2, e) -1, f) $3/2$. **3.3.5.** Spojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=2$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$). **3.3.6.** Napr. $1/[x(x-1)\cdots(x-n)]$, resp. $\lfloor x\rfloor$. **3.3.7.** Napr. $f(x)=0$ pre $x\in Q$, $f(x)=x(x-1)\cdots(x-n)$ pre $x\notin Q$, resp. $f(x)=0$ pre $x\in Q$, $f(x)=\sin x$ pre $x\notin Q$. **3.3.8.** a) spojitá (napr. $f=-g$), resp. nespojitá (napr. $g=f$), b) spojitá (napr. $f=g$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$, $g(x)=2$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$), c) spojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=0$ pre $x<a$, $g(x)=0$ pre $x\geq a$, $f(x)=1$ pre $x<a$), resp. nespojitá (napr. $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=0$ pre $x<a$), d) spojitá (napr. pre $a=0$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$), e) spojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$), f) spojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$). **3.3.9.** a) nespojitá, b) nespojitá, c) spojitá (napr. $f(x)=0$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=1$), d) spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$), e) spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$), f) spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$, $g(x)=0$ pre $x\geq 0$, $g(x)=1$ pre $x<0$). **3.3.10.** Funkcia $f(g)$: a) $(-\infty;\,-1)$, $(-1;\,0)$, $(0;\,1)$, $(1;\,\infty)$, b) $(k;\,k+1)$, $k\in Z$ c) $(-\infty;\,1)$, $(1;\,\infty)$, d) R, e) R, f) všade nespojitá. Funkcia $g(f)$: a) R, b) R, c) $(-\infty;\,0)$, $(0;\,\infty)$, d) R, e) $(-\infty;\,0)$, $(0;\,\infty)$, f) R. **3.3.12.** a) $1{,}92627032$, c) $-0{,}56714329$, b) $-0{,}73512111$, resp. $-0{,}21180469$, resp. $1{,}09808432$, resp. $5{,}84884147$, d) $2{,}20794003$, e) $-0{,}51859913$, resp. $1{,}36393887$, f) $1{,}41298437$, resp. $1{,}89713947$. **3.3.13.** a) $0{,}20669990$, resp. $-1{,}08004724$, resp. $1{,}22919369$, resp. $3{,}64415368$, b) $1{,}22919369$, resp. $-1{,}08004724$, resp. $0{,}20669990$, resp. $3{,}64415368$, c) $1{,}32471796$, d) $0{,}73908513$, e) $-0{,}87672622$, resp. 0, f) $0{,}48902657$. **3.3.14.** a) $\langle 0;\,1\rangle$, b) $\langle 0;\,18\rangle$, c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle n^2;\,n^2+n)\cup\{0\}$, d) $(-\pi;\,-2\pi)\cup(-3\pi;\,-4\pi)\cup\{0;\ \pi/2;\ 3\pi/2\}$, e) $\{0,1\}$, f) $(-\infty;\,-4\rangle$.

4 Diferenciálny počet reálnej funkcie

4.1.1. a) 0, b) -2, c) -1, d) 15, e) 0, f) π^3. **4.1.2.** a) $4x$, b) $x/\sqrt{x^2+1}$, c) $1/(2\sqrt{x-1})$, d) $1-2x$, e) $-1/\sin^2 x$, f) -3, g) $-1/(x-1)^2$, h) $-\mathrm{e}^{-x}$. **4.1.3.** $1\pm 1/\sqrt{2}$. **4.1.4.** a) $-2x\ln 2\,2^{-x^2}$, b) $\sin x\,\mathrm{e}^{-\cos x}$, c) $\sqrt[x]{x}(1-\ln x)/x^2$, d) $x^{-2/3}/3$, e) $2^{\operatorname{tg}x}\ln 2/\cos^2 x$, f) $\mathrm{e}^x x^{\mathrm{e}^x-1}(1+x\ln x)$, g) $x^{\sin x-1}(x\cos x\ln x+\sin x)$, h) $2x^{\ln x-1}\ln x$, i) $\mathrm{e}^{\operatorname{tgh}x}/\cosh^2 x$, j) $[\ln x]^{x-1}+[\ln x]^x\ln\ln x$, k) $-\mathrm{e}^{1/x}/x^2$, l) $\mathrm{e}^{-1/x}/x^2$, m) $2\,\mathrm{e}^{x^2-1}x$, n) $3\sqrt{x}/2$, o) $-\sin x/(3\sqrt[3]{\cos^2 x})$, p) $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$, q) $\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}x}/(1+x^2)$, r) $x^x(1+x+x\ln x)$, s) $x^{-1+x+x^x}(1+x\ln x+x\ln^2 x)$, t) $(x^x)^x(x+x\ln x+\ln x^x)$, u) $2^{(}2/5)/(25x^{(}4/5))$, v) $-2\operatorname{cotg}x/\sin^2 x$, w) $-2\sqrt[3]{4}/(3x^{7/3})$, x) $\operatorname{tg}x/\cos x$, y) $-\sin 2x/\cos x+2x\cos^2 x\operatorname{tg}x^2/\cos x^2$. **4.1.5.** a) $\operatorname{cotg}x-x/\sin^2 x$, b) $\operatorname{cotg}\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x/\sin^2\mathrm{e}^x$, c) $3^x(\ln x-\ln 2)/2^x$, d) $(\mathrm{e}^x(-3+x))/x^4$, e) $-1/(1+x^2)$, f) $\mathrm{e}^x x^4\mathrm{e}^x(5+x)$, g) $5\operatorname{tg}^4 x/\cos^2 x$, h) $2x\cos x^2$, i) $5\,\mathrm{e}^{5x}/(2\sqrt{\mathrm{e}^{5x}})$, j) $\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$, k) $3x^2\operatorname{sgn}x$, l) $2\,|x|$, m) 0, n) $2\,3^{2x}\ln 3$, o) $-\sin x$ pre $x\in(-\pi/2+2k\pi;\,\pi/2+2k\pi)$, $\sin x$ pre $x\in(\pi/2+2k\pi;\,3\pi/2+2k\pi)$, p) $-3^{\operatorname{cotg}x}\ln 3/\sin^2 x$, q) $x^{\sqrt{x}-1/2}(2+\ln x)/2$, r) $\cos x/x^{2\sin^2(x/2)}-x^{\cos x}\ln x\sin x$, s) $x^{(x^2)}(1+x^2+2x^2\ln x)$, t) $3/x$, u) $-1/\sin^2 x$, v) $x(2\ln x-1)/\ln^2 x$, w) $-2/\mathrm{e}^{2x}$, x) $-2/(x\ln^3 x)$, y) $-1/((1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x)$. **4.1.6.** a) $2/(x-1)^2$, b) $\operatorname{tg}(x/2)/\cos^2(x/2)$, c) $2x^2[(1-x^3)/(1+x^3)]^{2/3}/(x^3-1)^2$, d) $2[(1-x)/(1+x)]^{2x/(1-x)}/(x^2-1)+2[(1-x)/(1+x)]^{(1+x)/(1-x)}\ln[(1-x)/(1+x)]/(x-1)^2$, e) $\sin 2x/\mathrm{e}^{\cos^2 x}$, f) $-\operatorname{tg}x$, g) $-7/x^8-5/x^6$, h) $-4x^{1/3}/3+5x^4/(2\sqrt{x^5})$, i) $4/(x^2-4)$, j) $(1+\ln x+\ln^2 x)/(1+\ln x)^2$, k) $1/\sin x$, l) $-2/(1-\sin 2x)$, m) $2x/(1+x^2)$, n) $6x(x^2-1)^2$, o) $-\mathrm{e}^{-x}-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $x^4(-4+5\ln x)$, q) $-(1+2x)^{-3/2}$, r) $-1/(1+x^2)$, s) $-2\,\mathrm{e}^x/(\mathrm{e}^x-1)^2$, t) $1/(1+x^2)$, u) $-8(1-2x)^3$, v) $2\ln(1+x)/(1+x)$, w) $2x/(1+x^2)$, x) $1/[2(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}]$. **4.1.7.** a) $-2\cos x^{-2}/x^3$, b) $(-2-2x+x^2)/(-1+x)^2$, c) $4\,\mathrm{e}^{2x}/(1+\mathrm{e}^{2x})^2$, d) $(-1-\cos x+\sin x)/(1+\sin 2x)$, e) $\mathrm{e}^{\cos x+\sin x}(\cos x-\sin x)$, f) $-2x^3/\sqrt{1-x^4}$, g) $-1/(2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x})$, h) $40x(-1+x^2)^{19}$, i) $4x/(1+x^2)^2$, j) $1/(2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2)$, k) $-(1+3x^2)/(2x^{3/2})$, l) $(x^2(3+2x+x^2))/(1+x+x^2)^2$, m) $(1+2x)/\mathrm{e}^{1/x}$, n) $x\,\mathrm{e}^x(x\cos x+2\sin x+x\sin x)$, o) $(1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $-1/(2\sqrt{x}(1+x))$, q) $(3-x)/(2\sqrt{(1-x)^3})$, r) $2(-x\cos x+x^3\cos x-\sin x-x^2\sin x)/(-1+x^2)^2$, s) $(1-\sqrt{2})/[2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2]$, t) $1/[\sqrt{(-1+x)/(1+x)}(1+x)^2]$, u) $\mathrm{e}^{1-x^2}(1-2x^2)$, v) $7x^{-1/8}/8$, w) $1+\ln x$, x) $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(-1+\sqrt{x}+x)/(2\sqrt{x(x-1)})$. **4.1.8.** a) $-1/(x^2\cos^2(1+1/x))$, b) $-1/(2\sin^2(x/2))$, c) $-\operatorname{tg}(x/2)/(2\cos^2(x/2))$, d) $-1/[2\sqrt{x(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})^2]$, e) $8x\ln^3(1+x^2)/(1+x^2)$, f) $2\operatorname{cotg}2x$, g) $x\cosh x+\sinh x$, h) $-2x/[(1+x^4)\operatorname{arccotg}x^2]$, i) $-2\operatorname{cotg}x/\sin^2 x$, j) $16x^7/(-1+x^16)$, k) $1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, l) $-\sqrt{3}/\sqrt{5+2x-3x^2}$, m) $-\ln\sin x[\sin x]^{2\cos^2(x/2)}+\cos^2 x/[\sin x]^{2\sin^2(x/2)}$, n) $[\cos x]^{1+\sin x}\ln\cos x-[\cos x]^{-1+\sin x}\sin^2 x$, o) $[\cosh x]^{-1+\ln x}(\cosh x\ln\cosh x+x\ln x\sinh x)/x$, p) $(1+x^2)^{-1+\operatorname{arctg}x}(2x\operatorname{arctg}x+\ln(1+x^2))$, q) $2x/\sqrt{16+x^4}$, r) $\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x+x)/(1+\mathrm{e}^x)^2$, s) $-3\operatorname{cotgh}x/[(1+x)\ln^2(1+x)]-3/(\ln(1+x)\sinh^2 x)$, t) $2/(x^3\sqrt{-x^{-4}+2x^{-2}})$, u) $2[\operatorname{tg}x]^{-1+\operatorname{cotg}x}/\sin 2x-\ln\operatorname{tg}x\sin^2 x\,[\operatorname{tg}x]^{\operatorname{cotg}x}$, v) $3^{\ln[1+x+x^2]}(1+2x)\ln[3])/(1+x+x^2)$, w) $x(1-3x+2\ln x)$, x) $1-5\sin 2x$. **4.1.9.** a) $-1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, b) $2\,\mathrm{e}^{2x}\operatorname{cotg}\mathrm{e}^{2x}$, c) $-2x$ pre $x\in(-1;\,1)$, $2x$ pre $x\in R-\langle -1;\,1\rangle$, d) $1/[x\sqrt{1-\ln^2 x}]$, e) $x/\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, f) $\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$, g) $x\,\mathrm{e}^x$, h) $\mathrm{e}^x/\sqrt{1-x^2}+\mathrm{e}^x\arcsin x$, i) $1/(2\sqrt{x-1})$ pre $x>1$, $-1/(2\sqrt{1-x})$ pre $x<1$, j) 1 pre $x>2$, -1 pre $x<2$, k) $\operatorname{cotg}x-x/\sin^2 x$, l) $1/[x\ln x\ln\ln x\ln\ln\ln x]$, m) $2x/(-1+x^2)$, n) $2x/(-1+x^2)$, o) $-\operatorname{tgh}^2 x$, p) $5/[\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x]$, q) $\operatorname{cotg}x$, r) $1/[\sqrt{1-x^2}\arcsin x]$, s) $1/\cos 2x$, t) $-1/(x+x\ln^2 x)$, u) $1/(x\sqrt{1+x^2})-\operatorname{argsinh}x/x^2$, v) $2x/\cosh x-x^2\operatorname{tgh}x/\cosh x$,

w) $1/(-1+x^2)+x\arccos x/\sqrt{(1-x^2)^3}$, x) $1/(x-x\ln^2 x)$. **4.1.10.** a) $3/(4x^{3/4})+2/(3^{2/3})+1/(2x^{1/2})$, b) $x/\sqrt{x^2(1-x^2)}$, c) $1+6x+15x^2+28x^3$, d) $2(30+8x+15x^2+10x^3)/(5-4x-x^3)^3$, e) $2\operatorname{sgn} x/(1-x^2)$, f) $2/\sqrt{1+x^2}$, g) $5\sin 2x+6x^2\sin x^3$, h) $(3+2x)/(3(2+3x+x^2)^{2/3})$, i) $4(-1+14x+3x^2)(1-x+7x^2+x^3)^3$, j) $1+4/x^3+6x^2$, k) $-1/(2x^4)+20x\cos 4x+3\ln x/(2x^4)+5\sin 4x$, l) $1/[(-2+x)^2(5-4x+x^2)]$, m) $-\cos x+6x^5\ln 2$, n) $6x^5\ln 2$, o) $1-1/(2\sqrt{x})-3\sqrt{x}/2$, p) $-(3\cos x+\cos 3x-3\sin x+\sin 3x)/(4\sin^2 2x)$, q) $2x/(-4-15x^2+4x^4)-2x^2\operatorname{arctg} 2x/(-4+x^2)^2+\operatorname{arctg} 2x/(-4+x^2)$, r) $(-1+x^2)/[(1+x^2)^2\sqrt{(1+x^4)/(1+x^2)^2}]$, s) $x\cos x$, t) $-3\cos^2 x\sin x+3\cos x\sin^2 x$, u) $e^x(-5+4x^2+x^3)$, v) $-6x^8/(1+x^6)^2$, w) $-2/(1-\sin 2x)$, x) $-1/[2\sqrt{1+x}(2+x)\operatorname{arctg}(1+x)^{-1/2}]$. **4.1.11.** a) $2\sin^2 x$, b) $(-5x(2/3))/3+(5x(3/2))/2$, c) $e^{-x}[-1+2x-x^2+4x^3-x^4]$, d) $-2\arcsin[1/(-1+x)]/(\sqrt{1-(-1+x)^{-2}}(-1+x)^2)$, e) $2(1-\cos x\cosh x)/(\cos x-\cosh x)^2$, f) $-1/2$, g) $1/\sqrt{1+x^2}$, h) $\cos x\cos\sin x\cos\sin\sin x\cos\sin\sin\sin x$, i) $1+1/(6x^{5/6})+1/(4x^{3/4})+1/(2x^{1/2})$, j) $2/(1-x^2)$, k) $2x/(2+2x^2+x^4)$, l) $3/[x(1+x^3)^2]$, m) $(-1+2\ln^2 x)/(x\ln x)$, n) $\cos\cos x\cos\cos\sin\cos x\sin x\sin\sin\cos x$, o) $2\sqrt{1-x^2}$, p) $(1+2x\operatorname{argcotgh} x)/(-1+x^2)^2$, q) $-\operatorname{tg}[1-1/x]/x^2$, r) $2\cos x/(3[\sin x]^{1/3})+2\operatorname{tg} x/\cos^2 x$, s) -2 pre $x<1$, 0 pre $x\in(1;2)$, 2 pre $x>2$, t) $(2+2x)/(3+2x+x^2)$, u) 0, v) $-[-2/x^2+3/(x\cos^2 x)-3\operatorname{tg} x)/x^2]/[1+(2+3\operatorname{tg} x)^2/x^2]$, w) $-\operatorname{cotg}^2 x/\sin x-1/\sin^2 x-1/\sin^3 x$, x) $(\arcsin x-\arccos x)(\arcsin x+\arccos x)^2/(\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x\arcsin^2 x)$. **4.1.12.** a) -1, b) -1, c) $|\cos x|/\cos x$, d) $(13-11x+2x^2)/(-6+11x-6x^2+x^3)$, e) $3(-1+x^2)/(1-x-x^3+x^4)$, f) $(3\cos x+2\sin x)/(2\sqrt{5(-2\cos x+3\sin x)})$, g) $-x^{-2}$, h) $-x^{-2}$, i) $-x\operatorname{tg}\sqrt{1+x^2}/\sqrt{1+x^2}$, j) $(4\sin x-3\sin 2x)/(6\cos^3 x)$, k) $1/(1+x^2)$, l) $3\sqrt{x^3}\ln x/x$, m) $-|\sin x|/\sin x$, n) $-1/(2\sqrt{\operatorname{cotg} x}\sin^2 x)-1/(2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos^2 x)$, o) $-\cos\ln x-\sin\ln x$, p) $[1+(1+1/(2\sqrt{x}))/(2\sqrt{\sqrt{x}+x})]/[2(x+\sqrt{\sqrt{x}+x})^{1/2}]$, q) $(\sin(x/2)-\cos(x/2))/[(\cos(x/2)+\sin(x/2))^3\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}]$, r) $1/[24\sqrt{x}(1+(1+\sqrt{x})^{1/3})^{3/4}(1+\sqrt{x})^{2/3}]$, s) $-1/(2\sqrt{-x}\sqrt{1+x})$, t) $e^{\sqrt{1+x}}(\cos x-\sqrt{1+x}\sin x)/[2\sqrt{1+x}\sqrt{\cos x}]$, u) $1/(2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x})$, v) $4\sin 2x/(3+\cos 4x)$, w) $-4\sin 2x/(3+\cos 4x)$, x) $(1+x/\sqrt{1+x^2})/(1+x+\sqrt{1+x^2})$. **4.1.13.** a) $\sqrt{2+x^2}$, b) $2(1+x)/(1+x+x^2)$, c) $-x/\sqrt{1+2x-x^2}$, d) $\sqrt{2}(3-x^2)/(1+x^4)$, e) $2x(1+x)\sqrt{2+x^2}/(3(3+x^2)^{2/3})+x(1+x)(3+x^2)^{1/3}/\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2+x^2}(3+x^2)^{1/3}$, f) $4\operatorname{tg}^5 x$, g) $x\sin^2 x$, h) $\arcsin x/(1-x^2)^{3/2}$, i) $2x\ln[(1+x)/(1-x)]$, j) $x\operatorname{arctg} x$, k) 0, l) $2(1-x^2+x\sqrt{-1+x^2})/\sqrt{-1+x^2}$, m) $-\sin x/12-4\sin 2x/3+\sin 3x/4$, n) $1-\cos 4x-\cos x\sin^4 x+2\cos 2x\sin^2 2x$, o) $-1/(1+x)^2+x/(-1+x^2)$, p) $(-1/2+x)/(2\sqrt{1-x}\sqrt{x})+(1-2x)/(4\sqrt{x-x^2})+\arcsin\sqrt{x}$, q) $2+4x+6x^2+4x^3+5x^4$, r) $2+6x+9x^2+8x^3+5x^4$, s) $4x^2/(-16+x^4)$, t) $(5-3x^2)/[2(1+x^2+x^4)]$, u) $\arcsin x/(1-x^2)^{3/2}$, v) $-2\sqrt{\sin x}/\cos x$, w) $1/[\sqrt{1-x^2}\arcsin x]+1/[x\sqrt{1-\ln^2 x}]$,$\ln[x-\sqrt{-1+x^2}]$, x) $-2(1+9x+6x^2+x^3)/[(2+x)^2(3+x)^2(4+x)^2]$, y) $-\sqrt{1+x}[1/(2\sqrt{1+x})+1/(2\sqrt{2+x})+1/(2\sqrt{3+x})]/[\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{3+x}]^2+1/[2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{3+x})]$. **4.1.14.** Porade $f'_-(0)$, $f'_+(0)$: a) -1, 1, b) 0, 0, c) -1, 1, d) -1, 0, e) 0, 0 f) neexistujú, g) 1, 1, h) -1, -1. **4.1.15.** a) $x^{-3/4}/4$, b) $1/(x\ln 10)$, c) $x^{-4/5}/5$, d) $1/(x\ln 2)$. **4.1.17.** a) $y=4x-4$, b) $y=-4x/3$, c) $y=x/4+1$, d) $y=3x$, e) $y=x$, f) $y=1$, g) $y=2x$, h) $y=ex-1$, i) $50y=14-3x$. **4.1.18.** $a=e^{1/e}$, $[e;e]$. **4.1.19.** $a\le 0$. **4.1.20.** $y=3x$, resp. $y=-x$. **4.1.21.** a) $y=(3x-13)/4$, b) $y=x+3/4$, c) $y=2x(\sqrt3-1)$, resp. $y=-2x(\sqrt3+1)$, d) $y=2a-2a^2-2a\sqrt{a^2-2a-b+3}+b+2x(-1+a+\sqrt{a^2-2a-b+3})$, resp. $y=2a-2a^2+2a\sqrt{a^2-2a-b+3}+b+2x(-1+a-\sqrt{a^2-2a-b+3})$ kde $b\le a^2-2a+3$, e) $y=x+3/4$, resp. $y=-x+11/4$, f) $y=2+\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi/4-x\operatorname{tg}\varphi$, resp. $y=2-\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi/4+x\operatorname{tg}\varphi$. **4.1.22.** a) $y=3x-77/36$, b) $y=x+7/4$, c) $y=3+(1-x)/\sqrt2$, resp. $y=3-(1-x)/\sqrt2$, d) $y=x+7/4$. **4.1.23.** a) $y=1$ v bodoch $[\pi/2+2k\pi;1]$, $k\in Z$, resp. $y=-1$ v bodoch $[-\pi/2+2k\pi;1]$, $k\in Z$, b) $y=1$ v bodoch $[k\pi;1]$, $k\in Z$, resp. $y=-1$ v bodoch $[\pi/2+k\pi;1]$, $k\in Z$, c) neexistuje, d) $y=2\sqrt3/9$ v bode $[-1/\sqrt3;2\sqrt3/9]$, resp. $y=-2\sqrt3/9$ v bode $[1/\sqrt3;-2\sqrt3/9]$, e) $y=1/e$ v bode $[e;1/e]$, f) $y=1$ v bode $[0;1]$, g) $y=-1/e$ v bode $[1/e;-1/e]$ h) $y=e$ v bode $[1;e]$.

4.2.1. a) $e^x(1+x)h$, b) $x^2 2^x(3+x\ln 2)h$, c) $-h/x^2$, d) $h/\sqrt{1-x^2}$, e) $2^{-\ln x/x}\ln 2(\ln x-1)h-x^2$, $x>0$, f) $(2-\ln x)h/(2\sqrt{x^3})$, $x>0$, g) $h/(x-1)^2$, h) $2h/(x^2-1)$, i) $-2xh\,e^{-x^2}$, j) $h(1+\ln x)$. k) $h/\cos^2 x$, l) $h/(1+x^2)$. **4.2.2.** a) $\Delta S\approx r\alpha\delta r=10\pi\ \mathrm{cm}^2$, b) $\Delta S\approx r\alpha\delta r=10\pi\ \mathrm{cm}^2$, c) $\Delta S\approx r^2\Delta\alpha/2=2{,}5\pi\ \mathrm{cm}^2$. **4.2.3.** $\Delta S=2\pi r\Delta r$, $\delta S=2\delta r$. **4.2.4.** Presné hodnoty: a) $0{,}4848096$, b) $0{,}9656887$, c) $-0{,}1053605$, d) $1{,}9956925$, e) $0{,}5704371$, f) $2{,}0305432$, g) $4{,}0422932$, h) $9{,}0553851$, i) $5{,}981424$, j) $0{,}7701709$, k) $1{,}2166529$, l) $2{,}0027745$, m) $2{,}9957323$, n) $3{,}0004341$, o) $0{,}8097835$. **4.2.6.** a) $y^{(3)}=18x\cos x-x^3\cos x+6\sin x-9x^2\sin x$, $y^{(5)}=-60x\cos x+x^3\cos x-60\sin x+15x^2\sin x$, b) $y^{(3)}=6\cos x-9x^2\cos x-18x\sin x+x^3\sin x$, $y^{(5)}=-60\cos x+15x^2\cos x+60x\sin x-x^3\sin x$, c) $y^{(3)}=36x\cos 2x-8x^3\cos 2x+6\sin 2x-36x^2\sin 2x$, $y^{(5)}=-480x\cos 2x+32x^3\cos 2x-240\sin 2x+240x^2\sin 2x$, d) $y^{(3)}=6\cos 2x-36x^2\cos 2x-36x\sin 2x+8x^3\sin 2x$, $y^{(5)}=-240\cos 2x+240x^2\cos 2x+480x\sin 2x-32x^3\sin 2x$, e) $y^{(3)}=2e^x(\cos x-\sin x)$, $y^{(5)}=-4e^x(\cos x+\sin x)$, f) $y^{(3)}=-2e^x(\cos x+\sin x)$, $y^{(5)}=-4e^x(\cos x-\sin x)$, g) $y^{(3)}=x^2(47+60\ln x)$, $y^{(5)}=274+120\ln x$, h) $y^{(3)}=2e^x(3\cos x+x\cos x-x\sin x)$, $y^{(5)}=-4e^x(x\cos x+5\sin x+x\sin x)$. **4.2.7.** a) $-2^{n-1}\cos(2x+n\pi/2)$, b) $[3\cos(x+n\pi/2)+3^n\cos(3x+n\pi/2)]/4$, c) $x\sin(x+n\pi/2)-n\cos(x+n\pi/2)$, d) $(n-1)!/x$, e) $2(-1)^n n!/(x-1)^{n+1}$, f) $2(-1)^{n+1}n!/(x+1)^{n+1}$, g) $(-1)^n n![\ln x-(1+1/2+1/3+\cdots+1/n)]/x^{n+1}$, h) $(-1)^n n![(x+1)^{-n-1}+(x-1)^{-n-1}]/2$, i) $e^x(x+n)$, j) $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n\ge 2$, k) $(-1)^{n+1}(n-1)!/x^n$ pre $n\ge 2$, l) $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n\ge 2$.

4.3.3. Koeficienty pre 1,-1,2,-2: a) $[1,5,10,10,5]$, $[1,-3,4,-2,1]$, $[1,9,31,49,31]$, $[1,-7,19,-23,11]$, b) $[1,5,8,6,1]$, $[1,-3,2,2,-3]$, $[1,9,29,41,21]$, $[1,-7,17,-15,1]$, c) $[1,3,4,2,1]$, $[1,-5,10,-10,5]$, $[1,7,19,23,11]$, $[1,-9,31,-49,31]$, d) $[1,2,0,0,2]$, $[1,-6,12,-8,2]$, $[1,6,12,10,5]$, $[1,-10,36,-54,29]$, e) $[1,4,8,10,4]$, $[1,-4,8,-6,0]$, $[1,8,26,42,27]$, $[1,-8,26,-38,19]$, f) $[1,2,2,2,0]$, $[1,-6,14,-14,4]$, $[1,6,14,16,7]$, $[1,-10,38,-64,39]$, g) $[1,3,2,0,1,2]$, $[1,-7,18,-20,9,0]$, $[1,8,24,34,24,9]$, $[1,-12,56,-126,136,-55]$, h) $[1,5,12,18,15,4]$, $[1,-5,12,-14,7,-2]$, $[1,10,42,94,112,55]$, $[1,-10,42,-90,96,-41]$, i) $[1,3,4,4,2,0]$, $[1,-7,20,-28,18,-4]$, $[1,8,26,44,39,14]$, $[1,-12,58,-140,167,-78]$, j) $[1,7,21,35,35,21,7]$, $[1,-5,22,-23,9,-3,1]$, $[1,13,71,209,351,321,127]$, $[1,-11,51,-127,179,-135,43]$, k) $[1,5,11,15,13,7,1]$, $[1,-7,21,-33,27,-9,-1]$, $[1,11,51,129,189,153,53]$, $[1,-13,71,-207,337,-287,97]$, l) $[1,8,28,56,70,56,28,8]$, $[1,-6,16,-24,22,-12,4,0]$, $[1,15,97,351,769,1023,769,255]$, $[1,-13,73,-229,433,-493,313,-85]$, m) $[1,6,14,16,10,4,2,0]$, $[1,-8,26,-44,42,-24,10,-4]$, $[1,13,71,211,369,381,217,53]$, $[1,-15,95,-329,673,-815,545,-159]$. **4.3.4.** a) $1+2(x-1)/3-(x-1)^2/9+4(x-1)^3/81$, b) $1+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3/2$, c) $1/2-(x-2)/4+(x-2)^2/8-(x-2)^3/16+(x-2)^4/32$, d) $\ln 2+(x-2)/2-(x-2)^2/8+(x-2)^3/24-(x-2)^4/64$, e) $\ln 3+(x-3)/3-(x-3)^2/18+(x-3)^3/81-(x-3)^4/324$, f) $1-3(x-1)+6(x-1)^2-10(x-1)^3$. **4.3.5.** a) $1+2x+2x^2$, b) $1-2x+2x^2$, c) $1-x-x^2+2x^3$, d) $1/2+x/4-x^3/48$, e) $-x^2/2-x^4/12-x^6/45$, f) $-x^4/4$, g) $x+x^3/3+2x^5/15$, h) $x^2+2x^4/3$, i) $x^2-x^4/3$, j) $x^3-x^5/2$, k) $1-x^2+x^4/3$, l) $1-3x^2/2+7x^4/8$. **4.3.6.** a) $a_{2n}=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)x^{2n}/2^n/n!$, $n\in N\cup\{0\}$, b) $a_{2n}=x^{2n}/(2n)!$, $n\in N\cup\{0\}$, c) $a_{2n+1}=x^{2n+1}/(2n+1)!$, $n\in N\cup\{0\}$, d) $a_{2n+1}=2x^{2n+1}/(2n+1)$, $n\in N\cup\{0\}$. **4.3.8.** a) $(n-1)/n$, b) $(m-1)/(n-1)$, c) $1/6$, d) 1, e) $\ln a-\ln b$, f) 0, g) ∞, h) 0 pre $a>1$, ∞ pre $a\le 1$, i) $1/e$, j) 1, k) a^2/b^2, l) 1, m) $1/3$, n) $-\infty$, o) $3/10$, p) 0, q) $2/9$, r) ∞, s) $-\infty$, t) 0, u) $1/2$, v) 1, w) $1/12$, x) $\sqrt{3/8}$, y) $(n^2-m^2)/2$, z) 2. **4.3.9.** a) nie, 1, b) nie, $\nexists$, c) áno, $-1/2$, d) áno, 1, e) áno, 1. **4.3.10.** a) rastúca na $\langle -1;1\rangle$, klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$, b) rastúca na $\langle -1/3;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;-1/3\rangle$, c) rastúca na $(-\infty;-5\rangle$, $(-1;\infty)$, klesajúca na $\langle -5;-1)$, d) rastúca na $(-\infty;-1)$, $(0;\infty)$, e) rastúca na R, f) rastúca na $(0;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;0)$, g) rastúca na $\langle 0;2\rangle$, klesajúca na $(-\infty;0\rangle$, $\langle 2;\infty)$, h) rastúca na $\langle 1;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;0)$, $(0;1\rangle$, i) rastúca na $\langle 1/2;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;1/2\rangle$, j) rastúca na $(-\infty;-3\rangle$, $\langle 3;\infty)$, klesajúca na $\langle -3;3\rangle$, k) rastúca na $\langle 1;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, konštantná na $\langle -1;1\rangle$, l) rastúca na $(-\infty;-\sqrt3\rangle$, $\langle\sqrt3;\infty)$, klesajúca na $\langle -\sqrt3;-1)$, $(-1;1)$, $(1;\sqrt3\rangle$, m) rastúca na $(2/3;1)$, $(1;2\rangle$, klesajúca na $(-\infty;0)$, $(0;2/3)$, $\langle 2;\infty)$, n) rastúca na $\langle 1;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;-1\rangle$, konštantná na $\langle -1;1\rangle$, o) rastúca na $\langle 0;\infty)$, klesajúca na $(-\infty;0\rangle$, p) rastúca na $\langle 1/2;\infty)$, klesajúca na $(0;1/2\rangle$, q) rastúca na $(\pi/2+k\pi;3\pi/2+k\pi)$, $k\in Z$, r) rastúca na $\langle -3\pi/4+2k\pi;\pi/4+2k\pi\rangle$, klesajúca na $\langle \pi/4+2k\pi;5\pi/4+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, s) rastúca na $\langle 2\pi/3+2k\pi;\pi+2k\pi\rangle$, $\langle 4\pi/3+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle$, klesajúca na $\langle 0+2k\pi;2\pi/3+2k\pi\rangle$, $\langle \pi+2k\pi;4\pi/3+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, t) rastúca na R. **4.3.11.** a) l min $f(4)=-32$, l max $f(0)=0$, b) $\nexists$, c) l min $f(\sqrt[5]{24})=5\sqrt[5]{2/27}$, d) $\nexists$, e) lg min $f(k)=0$, $k\in Z$, f) l min $f(0)=0$, l max $f(2)=4/e^2$, g) l min $f(1)=1+e$, h) lg min $f(0)=1$, i) g min $f(0)=f(6)=0$, lg max $f(3)=3$, j) g min $f(-1)=f(1)=0$, k) g max $f(0)=3$, l) l min $f(-\pi/3+k\pi)=\sqrt3-4\pi/3+4k\pi$, l max $f(\pi/3+k\pi)=4\pi/3-\sqrt3+4k\pi$, $k\in Z$, m) lg min $f(1)=-2$, n) lg min $f(0)=-1$, o) $\nexists$, p) l min $f(1/2)=4/5$, l max $f(1)=1$, q) lg min $f(0)=0$, r) l min $f(e)=2+e$, s) l min $f(\sqrt{2/3})=-\sqrt{32/27}$, l max $f(0)=0$, t) lg min $f(1)=0$, u) l min $f(5\pi/4+k\pi)=-e^{-5\pi/4}e^{-k\pi}/\sqrt2$, l max $f(\pi/4+2k\pi)=e^{-\pi/4}e^{-k\pi}/\sqrt2$, $k\in Z$, v) l min $f(3\pi/4+k\pi)=-e^{-3\pi/4}e^{-k\pi}/\sqrt2$, l max $f(-\pi/4+2k\pi)=e^{\pi/4}e^{-k\pi}/\sqrt2$, $k\in Z$, w) l min $f(5\pi/4+k\pi)=-e^{5\pi/4}e^{k\pi}/\sqrt2$, l max $f(\pi/4+2k\pi)=e^{\pi/4}e^{k\pi}/\sqrt2$, $k\in Z$, x) l min $f(3\pi/4+k\pi)=-e^{3\pi/4}e^{k\pi}/\sqrt2$, l max $f(-\pi/4+2k\pi)=e^{-\pi/4}e^{k\pi}/\sqrt2$, $k\in Z$ (l=lokálny, g=globálny). **4.3.12.** a) lg min $f(-3\pi/4+2k\pi)=1-\sqrt2$, lg max $f(\pi/4+2k\pi)=1+\sqrt2$, b) l min $f(2)=-57$, l max $f(-3/2)=115/4$, c) $\nexists$, d) l min $f((5-\sqrt{13})/6)=-(587+143\sqrt{13})/1458$, $f((5+\sqrt{13})/6)=(143\sqrt{13}-587)/1458$, l max $f(1)=0$, e) lg min $f(0)=-1$, f) lg min $f(-4)=1$, l min $f(1)=4$, l max $f(0)=5$, g) lg min $f(1/8)=\ln 16-\ln 17$, h) lg min $f(e^{3/2})=-1/4$, i) lg max $f(1)=\pi/4-\ln 2/2$, j) lg min $f(1/e)=1/\sqrt[e]{e}$ k) g min $f(1)=0$, g max $f(e)=e^2$, l) lg min $f(2)=2-\ln 4$, g max $f(1)=1$, m) lg max $f(0)=-1$, n) lg min $f(\sqrt{2+\sqrt3})=\sqrt3\sqrt{2+\sqrt3}$, g max $f(3/2)=39/10$, o) g min $f(3)=3/4$, g max $f(11/10)=220/21$ (l=lokálny, g=globálny). **4.3.13.** a) lg min $f(0)=f(1)=0$, l max $f(1/2)=1/\sqrt[3]{16}$, g max $f(-3)=\sqrt[3]{144}$, b) g min $f(\pi)=12-2\pi$, g max $f(-\pi) = 12+2\pi$, c) g min $f(0) = f(\pi) = 0$, lg max $f(\pi/2) = 3$, d) lg min $f(\pi/2) = 1$, g min $f(0) = f(\pi) = 1$, lg max $f(\pi/4) = f(3\pi/4) = (1+\sqrt{2})/2$, e) lg min $f(3) = 1$, g max $f(-1) = 17$, f) l min $f(1) = 18$, g min $f(-3) = 2$, l max $f(-1) = 22$, g max $f(4) = 72$, g) lg min $f(1) = 0$, g max $f(-2) = 21$, h) lg min $f(1) = f(5) = 0$, l max $f(3) = 4$, g max $f(-6) = 77$, i) g min $f(-1) = -10$, g max $f(1) = 2$, j) l min $f(3) = -26$, l max $f(1) = 2$ (l=lokálny, g=globálny). **4.3.14.** a) $x_1 = x_2 = a/2$, b) $x_1 = x_2 = a/2$, c) $x_1 = x_2 = a/2$, d) $x_1 = x_2 = a/2$. **4.3.15.** $x = 1$. **4.3.16.** Strany $a/2$, $h/2$. **4.3.17.** Rovnoramenný s ramenami $(s-a)/2$. **4.3.18.** Štvorec so stranou $s/4$. **4.3.19.** Štvorec so stranou $\sqrt{P}$. **4.3.20.** Štvorec so stranou $s/4$. **4.3.21.** Strany $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **4.3.22.** a) polomer podstavy $x = \sqrt{2}r/\sqrt{3}$, výška $v = 2r/\sqrt{3}$, b) polomer podstavy $x = r\sqrt{(5+\sqrt{5})/10} \approx 0{,}850651r$, výška $v = r\sqrt{2(5-Sqrt5)/5} \approx 1{,}051462$, c) polomer podstavy $x = 2r/\sqrt{2}$, výška $v = \sqrt{2}r$. **4.3.23.** a) polomer podstavy $x = 4\sqrt{2}r/3$, výška $v = 4r/3$, b) polomer podstavy $x = 4\sqrt{2}r/3$, výška $v = 4r/3$, c) polomer podstavy $x = \sqrt{95+7\sqrt{17}}r/\sqrt{128} \approx 0{,}983702r$, výška $v = (23-\sqrt{17})r/16 \approx 1{,}179806$. **4.3.24.** Polomer podstavy $x = r/2$, výška $v = h/2$. **4.3.25.** a) $[1;2]$, b) $[1/10;23/10]$, c) $[2/5;11/5]$, d) $[13/10;19/10]$. **4.3.26.** a) $\left[(3-\sqrt{3})/2;(6-\sqrt{3})/2\right]$, b) $[1;2]$, b) $\left[1-\sqrt{30}/4;7/4\right]$, d) $[-1/2;5/4]$. **4.3.27.** Dĺžka $20\sqrt[3]{5}$ m, šírka $5\sqrt[3]{5}$ m, výška $2\sqrt[3]{5}$ m. **4.3.28.** Na kruh treba $10\pi/(4+\pi) \approx 4{,}399010$ m. **4.3.29.** 6 cm. **4.3.30.** Strany obdĺžnika $4s/(8+3\pi)$, $(4+\pi)s/(8+3\pi)$, polomer kruhu $2s/(8+3\pi)$. **4.3.31.** $\sqrt{52+36\sqrt[3]{12}+24\sqrt[3]{18}}$ m. **4.3.32.** a) nemá inflexné body, konvexná na R, b) inflexný bod 1, konvexná na $\langle 1\,;\infty)$, konkávna na $(-\infty\,;1\rangle$, c) inflexné body $\pm\sqrt{2}$, konvexná na $\left\langle -\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right\rangle$, konkávna na $\left(-\infty\,;-\sqrt{2}\right\rangle$, $\left\langle \sqrt{2}\,;\infty\right)$, d) inflexný bod $\sqrt{3}/9$, konvexná na $\left\langle \sqrt{3}/9\,;\infty\right)$, konkávna na $\langle 0\,;\sqrt{3}/9\rangle$, e) inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty\,;0\rangle$, konkávna na $\langle 0\,;\infty)$, f) nemá inflexné body, konvexná na $\langle 0\,;\infty)$, g) nemá inflexné body, konkávna na $\langle -2\,;\infty)$, h) inflexné body $\pi/2+k\pi$, konvexná na $\langle -\pi/2+2k\pi\,;\pi/2+2k\pi\rangle$, konkávna na $\langle \pi/2+2k\pi\,;3\pi/2+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, i) nemá inflexné body, konvexná na R, j) nemá inflexné body, konvexná na $(0\,;\infty)$, konkávna na $(-\infty\,;0)$, k) nemá inflexné body, konvexná na $(0\,;\infty)$, l) inflexné body $k\pi$, konvexná na $\langle 2k\pi\,;\pi+2k\pi\rangle$, konkávna na $\langle \pi+2k\pi\,;2\pi+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, m) nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty\,;0)$, $(0\,;\infty)$, n) inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty\,;-1)$, $\langle 0\,;1)$, konkávna na $(-1\,;0\rangle$, $(1\,;\infty)$, o) inflexné body 0, $\pm\sqrt{3}$, konvexná na $\left(-\infty\,;-\sqrt{3}\right\rangle$, $\left\langle 0\,;\sqrt{3}\right\rangle$, konkávna na $\left\langle -\sqrt{3}\,;0\right\rangle$, $\left\langle \sqrt{3}\,;\infty\right)$, p) inflexné body 0, ± 9, konvexná na $(-\infty\,;-9\rangle$, $\langle 0\,;9\rangle$, konkávna na $\langle -9\,;0\rangle$, $\langle 9\,;\infty)$, q) nemá inflexné body, konkávna na $\langle 1\,;\infty)$, r) inflexný bod 4, konvexná na $\langle 4\,;\infty)$, konkávna na $(-\infty\,;4\rangle$, s) nemá inflexné body, konvexná na $\langle 1\,;\infty)$, t) nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty\,;-1\rangle$, $\langle 1\,;\infty)$, u) nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty\,;-9)$, $(9\,;\infty)$, v) inflexné body -2, 1, konvexná na $(-\infty\,;-2\rangle$, $\langle 1\,;\infty)$, konkávna na $\langle -2\,;1\rangle$. **4.3.36.** Pre všetky okrem $b\in\langle -\mathrm{e}/6\,;0\rangle$. **4.3.37.** a) $x = 1$, $y = 2$, b) $x = \pm 1$, $y = 1$, c) $x = \pm 2$, $y = 2$, d) $y = 1$, e) $y = 3x$, f) $x = \pm 1$, $y = x$, g) $x = 0$, $y = 2x$, h) $y = \pm 1/2$, i) $y = x$, j) $y = \pm\pi x/2 - 1$, k) $x = 0$, $y = 1$, l) $y = x + 1/\mathrm{e}$, m) $y = 12$, n) $x = 0$, $y = 13$, o) $x = 0$, $yx+ = 13$, p) $x = \pm 1$, $y = 0$. **4.3.42.** a) $y = 2 - x^2$, $x\in(2\,;5)$, b) $y = \sqrt{4x^2/9-4}$, $x\in\langle 3\,;\infty)$, c) $y = \sqrt{9-9x^2/16}$, $x\in\langle -4\,;4\rangle$, d) $y = 9 - 9x/4$, $x\in\langle 0\,;4\rangle$. **4.3.43.** a) $t\in\langle 0\,;\infty)$, $y = 2x+1$, $x\in\langle -1\,;\infty)$, b) $t\in R$, $y = 2x+1$, $x\in R$, c) $t\in\langle 0\,;\infty)$, $y = 2+3\sqrt{x-1}/2$, $x\in\langle 0\,;\infty)$, resp. $t\in(-\infty\,;0\rangle$, $y = 2-3\sqrt{x-1}/2$, $x\in\langle 0\,;\infty)$, d) $t\in\langle -3/2+6k\,;3/2+6k\rangle$, $y = \sqrt{1-x^2/4}$, $x\in\langle -2\,;2\rangle$, resp. $t\in\langle 3/2+6k\,;9/2+6k\rangle$, $y = -\sqrt{1-x^2/4}$, $x\in\langle -2\,;2\rangle$, $k\in Z$, e) $t\in\langle 0+2k\pi\,;\pi+2k\pi\rangle$, $y = (1-\sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, resp. $t\in\langle \pi+2k\pi\,;2\pi+2k\pi\rangle$, $y = -(1-\sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, $k\in Z$, f) $t\in R$, $y = 4(x-2)^2/9+1$, $x\in R$. **4.3.44.** a) elipsa $x^2+y^2/a^2 = 1$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, t.j. $y = \pm a\sqrt{1-x^2}$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, b) hviezdica $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2/a^2} = 1$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, t.j. $y = \pm a(1-\sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, c) úsečka $y = a - ax$, $x\in\langle 0\,;1\rangle$, e) hviezdica $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2/a^2} = 1$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, t.j. $y = \pm a(1-\sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$. **4.3.45.** a)$x = at/(1+t^3)$, $y = at^2/(1+t^3)$, $t\in R$, b)$x = (1+t^2)/(1+t^3)$, $y = (t+t^3)/(1+t^3)$, $t\in R$, c)$x = (1+t^3)/(1+t^4)$, $y = (t+t^4)/(1+t^4)$, $t\in R$. **4.3.46.** a) $x = 4t^3/3$, $y' = 1/(4t)$, $t\in R-\{0\}$, b) $x = (1-t)/(1+t)$, $y' = -1$, $t\in R-\{-1\}$, c) $x = 2\sin t/(1+2\cos t)$, $y' = -2\sin t/(2+\cos t)$, $t\in(-\pi/3\,;\pi/3)$, d) $x = \arcsin(1+t^2)^{-1}$, $y' = -1$, $t\in R$, e) $x = t-\cos t$, $y' = \cos t/(1+\sin t)$, $t\in\langle 0\,;2\pi\rangle - \{3\pi/2\}$, f) $x = 4\cos^3 t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $t\in\langle 0\,;\pi\rangle - \{\pi/2\}$, g) $x = \mathrm{e}^{2t}\cos^2 t$, $y' = (1-\cos 2t+\sin 2t)/(1+\cos 2t-\sin 2t)$, $t\in\langle 0\,;\pi/2) - \{\pi/4\}$, h) $x = 2\cosh t$, $y' = 2\operatorname{cotgh} t$, $t\in(0\,;\infty)$. **4.3.47.** a) $x = 4t+t^2$, $y' = (1+3t^2)/2/(2+t)$, $y'' = (-1+12t+3t^2)/4/(2+t)^3$, $y''' = 3(9-4t-t^2)/8/(2+t)^5$, $t\in\langle 0\,;\infty)$, b) $x = \ln t$, $y' = 2t\cos 2t$, $y'' = t(2\cos 2t - 4t\sin 2t)$, $y''' = 2t(\cos 2t - 4t^2\cos 2t - 6t\sin 2t)$, $t\in(0\,;\infty)$, c) $x = 4\sin t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = -1/(4\cos^3 t)$, $y''' = -3\sin t/(16\cos^5 t)$, $t\in(-\pi/2\,;\pi/2)$, d) $x = 2\cos^3 t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = 1/(6\sin t\cos^4 t)$, $y''' = (5\cos 2t-3)/(72\sin^3 t\cos^7 t)$, $t\in(0\,;\pi) - \{\pi/2\}$, e) $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y' = (\sin t-\cos t)/(\sin t+\cos t)$, $y'' = -2\,\mathrm{e}^t/(\sin t+\cos t)^3$, $y''' = -4\,\mathrm{e}^{2t}(\cos t - 2\sin t)/(\sin t+\cos t)^5$, $t\in R - \{3\pi/4+k\pi, k\in Z\}$, f) $x = \mathrm{e}^t$, $y' = \mathrm{e}^{-t}/\sqrt{1-t^2}$, $y'' = \mathrm{e}^{-2t}(-1+t+t^2)/\sqrt{(1-t^2)^3}$, $y''' = \mathrm{e}^{-3t}(3-3t-2t^2+3t^3+2t^4)/\sqrt{(1-t^2)^5}$, $t\in(-1\,;1)$. **4.3.48.** a) $d\colon y = x/4$, $n\colon y = -4x$ v bode $[0;0]$, $d\colon y = (2x-4)/3$, $n\colon y = (19-3x)/2$ v bode $[5;2]$, $d\colon y = (13x-76)/8$, $n\colon y = (226-8x)/13$ v bode $[12;10]$, $d\colon y = (14x-144)/5$, $n\colon y = (210-5x)/14$ v bode $[21;30]$, $d\colon y = (49x-752)/12$, $n\colon y = (3716-12x)/49$ v bode $[32;68]$, b) $d\colon y = (1+3x)/2$, $n\colon y = (8-2x)/3$ v bode $[1;2]$, $d\colon y = (5x+4)/4$, $n\colon y = (46-4x)/5$ v bode $[4;6]$, $d\colon y = (7x+9)/6$, $n\colon y = (138-6x)/7$ v bode $[9;12]$, $d\colon y = (9x+16)/8$, $n\colon y = (308-8x)/9$ v bode $[16;20]$, $d\colon y = (11x+25)/10$, $n\colon y = (580-10x)/11$ v bode $[25;30]$, c) $d\colon y = 2$, $n\colon x = -\pi$ v bode $[-\pi;2]$, $d\colon y = (4-\pi-2x)/2$, $n\colon y = (\pi+2x)/2$ v bode $[(2-\pi)/2;1]$, $d\colon x = 0$, $n\colon y = 0$ v bode $[0;0]$, $d\colon y = (4-\pi+2x)/2$, $n\colon y = (\pi-2x)/2$ v bode $[(\pi-2)/2;1]$, $d\colon y = 2$, $n\colon x = \pi$ v bode $[\pi;2]$, d) $d\colon x = 1$, $n\colon y = 0$ v bode $[1;0]$, $d\colon y = \sqrt{2}-x$, $n\colon y = x$ v bode $\left[\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right]$, $d\colon y = 1$, $n\colon x = 0$ v bode $[0;1]$, $d\colon y = \sqrt{2}+x$, $n\colon y = -x$ v bode $\left[-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right]$, $d\colon x = -1$, $n\colon y = 0$ v bode $[-1;0]$, e) $d\colon y = 0$, $n\colon x = 1$ v bode $[1;0]$, $d\colon y = 1/\sqrt{2}-x$, $n\colon y = x$ v bode $\left[\sqrt{2}/4;\sqrt{2}/4\right]$, $d\colon x = 0$, $n\colon y = 1$ v bode $[0;1]$, $d\colon y = 1/\sqrt{2}+x$, $n\colon y = -x$ v bode $\left[-\sqrt{2}/4;\sqrt{2}/4\right]$, $d\colon y = 0$, $n\colon x = -1$ v bode $[-1;0]$. **4.3.49.** a) $t = -1$, $x = -3$, $y = 2$, resp. $t = 1$, $x = 5$, $y = 2$, b) $\nexists$.

Literatúra

[1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* Praha, SNTL ALFA 1963.

[2] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2000.

[3] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej anylýzy,* Bratislava, ŠNTL 1955.

[4] Берман Г. Н., *Сборник задач по курсу математического анализа,* Москва, Издательство НАУКА 1964.

[5] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I,* Praha, SNTL ALFA 1985.

[6] Bukovský L., *Štruktúra reálnej osi,* Bratislava, VEDA 1979.

[7] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов,* издание пятое, Москва, Издательство НАУКА 1966.

[8] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* издание девятое), Москва, Издательство НАУКА 1977.

[9] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť,* 3. vydanie, Bratislava, ALFA 1971.

[10] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť,* 3. vydanie, Bratislava, ALFA 1972.

[11] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť,* 1. vydanie, Bratislava, SVTL 1967.

[12] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť,* 1. vydanie, Bratislava, ALFA 1970.

[13] Franek M., *Od algebry k počítačom,* Bratislava, SPN 1971.

[14] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky,* Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.

[15] Hejný M., kol., *Teória vyučovania matematiky 2,* Bratislava, SPN 1990.

[16] Hinner M., *Jemný úvod do fraktálů,*
`http://www.penguin.cz/~mhi/math/Fraktaly/`, 1999.

[17] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[18] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, II. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[19] Holenda J., *Řady,* Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.

[20] Horák Z., Krupka F., Šindelář V., *Základy technické fysiky,* Praha, Práce 1954.

[21] Horský Z., *Diferenciální počet,* Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.

[22] Hruša K., Kraemer E., Sedláček J., Vyšín J., Zelinka R., *Přehled elementární matematiky,* Praha, SNTL 1957.

[23] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1982.

[24] Kluvánek I., *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet, I. časť,* skriptá VŠDS, Žilina, 1991.

[25] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. diel,* Bratislava, SVTL 1959.

[26] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, II. diel,* 2. prepracované vydanie, Bratislava, SVTL 1965.

[27] Kolář J., Štěpánková O., Chytil M., *Logika, algebry a grafy,* Praha, SNTL 1989.

[28] Kolektív autorov, *Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a SOŠ,* Bratislava, SPN 1970.

[29] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I, A až L,* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1977.

[30] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika II, M až Ž,* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.

[31] Kufner A., *Nerovnosti a odhady,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1975.

[32] Míka S., *Numerické metódy algebry,* Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.

[33] Mikola M., *Algebra,* 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina, 1998.

[34] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky,* Praha, SNTL 1976.

[35] Okrucký V., *Elementárny úvod do modernej matematiky,* Bratislava, SPN 1971.

[36] Prágerová A., *Cvičení z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1987.

[37] Přikryl P., *Numerické metódy matematické analýzy,* Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.

[38] Sedláček J., *Co víme o přirozených číslech,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1961.

[39] Sedláček J., *Faktoriály a kombinační čísla,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1964.

[40] Šalát T., *Metrické priestory,* Bratislava, ALFA 1981.

[41] Šilov G. J., *Matematická analýza,* Bratislava, ALFA 1974.

[42] Škrášek J., Tichý Z., *Základy aplikované matematiky I,* Praha, SNTL 1989.

[43] Šulista M., *Základy analýzy v komplexním oboru,* Matematika pro VŠT, sešit XIII, Praha, SNTL 1981.

[44] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej,* Bratislava, ALFA SNTL 1987.

[45] Vitásek E., *Numerické metódy,* Praha, SNTL 1987.

[46] Výborný R., *Matematická indukce,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1963.

[47] Запорочец Г. И., *Руководство к рещению задач по математическому анализу,* издание третье, Москва, Издательство ВЫСШАЯ ШКОЛА 1964.

[48] Drexel University, Math Forum, `http://mathforum.org/`.

[49] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, `http://members.aol.com/jeff570/mathword.html`.

[50] Elsevier Mathematics, `http://www.elseviermathematics.com/mathematicsweb/show/Index.htt`.

[51] EMIS, The European Mathematical Information Service, `http://www.emis.de/`.

[52] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, `http://www.mathcurve.com/`.

[53] Excellent Matematika, `http://matematika.host.sk/index2.htm`.

[54] Geometry the online learning center, `http://www.geometry.net/`.

[55] On-line Mathematics Dictionary, `http://pax.st.usm.edu/cmi/inform_html/glossary.html`.

[56] The Math Forum, Internet Mathematics Library, `http://mathforum.org/library/`.

[57] Turnbull WWW Server, `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/`.

[58] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`.

[59] Wikipedia The free Encyclopedia, `http://www.wikipedia.org/`.

[60] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/`.