Náhodné procesy, markovove reťazce

Teória hromadnej obsluhy

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

26. septembra 2013

Náhodný proces

Náhodným procesom rozumieme množinu náhodných premenných

$$\{\mathbb{X}(\omega, t) : \omega \in \Omega, \ \ t \in T\},$$

kde Ω je množina elementárnych udalostí a T je množina nezáporných reálnych čísel. Budeme používať skrátený zápis $\{\mathbb{X}(t)\}_{t \in T}, \{\mathbb{X}_t\}_{t \in T}$.

- $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ – hovoríme o procese s diskrétnym časom,
- $T = \langle 0, \infty)$– hovoríme o procese so spojitým časom.

Náhodný proces $\{\mathbb{X}(t)\}_{t\in T}$ nazveme náhodným reťazcom, ak množina všetkých hodnôt S náhodného procesu je nanajvýš spočítateľná. Množinu S nazývame množinou stavov reťazca.

Príklad 1.1

V dvoch urnách je spolu 5 guličiek. Pri každom pokuse náhodne vyberieme jednu guličku a premiestnime ju do susednej urny. Modelujte chovanie takéhoto systému náhodným procesom.

Nech $\{\mathbb{X}(\omega, t)$ udáva počet guličiek v 1. urne. Ak je v 1. urne i guličiek, potom je 2. urne $5 - i$ guličiek. Potom $S = \{0, 1, \ldots, 5\}$ udáva počet guličiek v 1. urne, $T = \{t_0, t_1, \ldots\}$ sú časové okamihy jednotlivých pokusov a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5\}$ pričom ω_i je výber i-tej guličky.

Poznámka

Príklad 1.1 môže modelovať reálnu situáciu, keď máme vo výrobnej hale 5 kamier s vysielačmi (5 guličiek), ktoré monitorujú pohyb robotov. Každý vysielač môže byť v stave vysiela alebo nevysiela (gulička je v 1. alebo 2. urne) ak jeho kamera zaregistruje konflikt robotov. Náhodný mechanizmus rozhoduje o zmene stavu takéhoto zabezpečovacieho systému. Ak vysielače len odošlú snímok kamery pôjde o proces s diskrétnym časom ale ak budú vysielať snímky počas doby konfliktu pôjde o proces so spojitým časom.

Náhodný reťazec $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in T}$ s množinou stavov S nazveme Markovov reťazec, ak

1. množina $T = \{0, 1, 2, \dots\}$,
2. platí Markovova vlastnosť:

$$\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S :$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+1} = j | \mathbb{X}_n = i, \mathbb{X}_{n-1} = i_{n-1} \dots, \mathbb{X}_0 = i_0) =$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+1} = j | \mathbb{X}_n = i).$$

Ak $\mathbb{X}_n = i$, potom hovoríme, že reťazec je v čase n v stave i. Podmienené pravdepodobnosti Markovovej vlastnosti sa nazývajú pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j,

Ďalej sa obmedzíme výhradne na Markovove reťazce nezávislé na okamihoch prechodu t.j. n.

Fyzikálna interpretácia

Uvažujme fyzikálnu sústavu, ktorá môže byť v niektorom zo stavov $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. V priebehu času mení sústava náhodne svoje stavy. Stavy sústavy pozorujeme v diskrétnych časových okamihoch $n \in \{0, 1, 2, \dots, \}$. Náhodnej veličine $\mathbb{X}_n$ priradíme hodnotu k ak je sústava v časovom okamihu n v stave a_k.

Predpoklad, že náhodné zmeny stavu fyzikálnej sústavy tvoria Markovov reťazec môžeme interpretovať takto: Všetky doterajšie stavy môžu mať vplyv na budúce stavy len prostredníctvom súčasného stavu.

Markovov reťazec $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in T}$ nazveme homogénny (v čase), ak platí:

$$\forall i, j \in S, \forall k \in \mathcal{N}:$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+k+1} = j | \mathbb{X}_{n+k} = i) = \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+1} = j | \mathbb{X}_n = i).$$

Pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j označíme

$$p_{ij} = \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+1} = j | \mathbb{X}_n = i)$$

a usporiadame do matice pravdepodobností prechodu

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in S}.$$

Poznámka

Aj v ďalšom texte budeme $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označovať množinu prirodzených čísel.

Príklad 1.2

V dvoch urnách je spolu 5 guličiek. Pri každom pokuse náhodne vyberieme jednu guličku a premiestnime ju do susednej urny. Budeme predpokladať. že výber každej guličky je rovnako pravdepodobný bez ohľadu v ktorej je urne.

Náhodný reťazec popisujúci počty guličiek v 1.urne má Markovovu vlastnosť, pretože budúci stav počtu guličiek v 1.urne záleží len na súčasnom počte guličiek v 1.urne a na náhodno výbere guličky. Nezáleží ani na tom v ktorom pokuse dochádza k premiestneniu guličky, jedná sa tak o homogénny Markovov reťazec $\{\mathbb{X}_n\}_{n \in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a maticou pravdepodobností prechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pravdepodobnosť, že sa homogénneho Markovov reťazec $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in T}$ v čase $n \in T$ nachádza v stave $i \in S$ označíme

$$p_i(n) = \mathcal{P}(\mathbb{X}_n = i)$$

a nazveme pravdepodobnosť stavu i v čase n. Vektor tvaru

$$\mathbf{p}(n) = \big(p_i(n)\big)_{i \in S}$$

nazývame pravdepodobnostné rozdelenie reťazca (v čase n). Počiatočným rozdelením reťazca rozumieme $\mathbf{p}(0)$.

Príklad 1.3 (Cvičenie)

Sledovala sa prevádzka stroja za dobu 1000 smien. Keď sa stroj pokazil bola vykonaná oprava. Opravy ktoré trvali dlhšie než 1 smenu sa evidovali zvlášť. Bolo zistené, že sa stroj pokazil v 150-tich prípadoch z toho v 95-tich prípadoch trvala oprava viac než jednu smenu. Modelujte chovanie stroja homogénnym Markovovým reťazcom.

Lema 1.1

Pre homogénny Markovov reťazec určený počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0)$ a maticou $\mathbb{P}$ platí

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n)\mathbf{P} \quad \forall n \in T \tag{1}$$

Dôkaz: Treba ukázať, že

$$p_j(n+1) = \sum_{k \in S} p_k(n) p_{kj}, \forall j \in S, \forall n \in T$$

Označme javy $H_k = \{\mathbf{X}_n = k\}$, $A = \{\mathbf{X}_{n+1} = j\}$. Z vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame

$$p_j(n+1) = \mathcal{P}(A) = \sum_{k \in S} \mathcal{P}(H_k)\mathcal{P}(A|H_k) = \sum_{k \in S} p_k(n) p_{kj}.$$

●

Príklad 1.4

V zadaní prikladu 1.2 predpokladajme, že na začiatku sú všetky guličky v 1. urne. Aký bude stredný počet guličiek v 1. urne po dvoch pokusoch?

Markovov reťazec popisujúci počty guličiek 1.urne je určený pp. rozdelením $\mathbf{p}(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ a vypočítanou maticou prechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom z (1) máme

$$p(2) = \mathbf{p}(1)\mathbf{P} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)\mathbf{P} = \left(0, 0, 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right).$$

Stredný počet guličiek bude v 2. urne po dvoch pokusoch rovný

$$E(\mathbb{X}_2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5}.$$

Pravdepodobnosťami prechodu vyšších rádov rozumieme

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{ak inak} \end{cases}$$

$$p_{ij}(k) = \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+k} = j | \mathbb{X}_n = i) \quad \forall k \in \mathcal{N}$$

po usporiadaní do matice

$$\mathbf{P}(k) = \left(p_{ij}(k)\right)_{i,j \in S}.$$

Poznámka

Vzhľadom k homogenite reťazca nezávisia ani pravdepodobnosti vyšších rádov na n.

Lema 1.2

Pre homogénny Markovov reťazec s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0)$ platí

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(n) \quad \forall n \in T. \tag{2}$$

Maticu pravdepodobností vyšších rádov však môžeme vyjadriť v tvare mocniny pp. prechodu.

Lema 1.3

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n \quad \forall n \in T. \tag{3}$$

Dôkaz: Zrejme platí $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}^0$ a $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}$. Z (2) a opakovaním (1) dostaneme rovnice zo zhodnými pravými stranami

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(n) &= \mathbf{p}(0)\mathbf{P} \\ \mathbf{p}(n) &= \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P} = \mathbf{p}(n-2)\mathbf{P}\mathbf{P} = \cdots = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n \end{aligned}$$

•

Veta 1.1

$$\mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}(n)\mathbf{P}(m) \quad \forall n, m \in T. \tag{4}$$

Dôkaz: Z vlastnosti násobenia matíc a lemy 1.3 dostávame

$$\mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^n\mathbf{P}^m = \mathbf{P}(n)\mathbf{P}(m)$$

•

Stacionárne rozdelenie reťazca

Nech $\mathbf{P}$ je matica prechodu. Potom vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$ pre ktorý platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi}\mathbf{P} \\ \sum_{j \in S} \pi_j &= 1 \\ \pi_j &\geq 0 \quad \forall j \in S \end{aligned}$$

nazývame stacionárne rozdelenie reťazca určeného maticou prechodu $\mathbf{P}$.

Veta 1.2

Nech $\mathbf{P}$ je matica prechodu. Potom ak existujú

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j \quad \forall i, j \in S \tag{5}$$

potom existujú aj

$$\lim_{n \to \infty} p_j(n) = \pi_j \quad \forall j \in S \tag{6}$$

Príklad 1.5

Vráťme sa k prikladu 1.4 s guličkami. Zaujíma nás stredný počet guličiek v 1.urne po stabilizácii systému.

Najskôr nájdeme stacinárne rozdelenie reťazca $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_5)$. Po dosadení do rovnice

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a vyjadrení jednotlivých pravdepodobností pomocou π_0 dostávame $\boldsymbol{\pi} = (1, 5, 10, 10, 5, 1)\pi_0$. Z normaliačnej podmienky $\sum_{j=0}^{5} \pi_j = 1$ vypočítame $\pi_0 = \frac{1}{32}$. Po dostatočnom počte pokusov bude stredný počet guličiek v 1.urne rovnaký ako 2.urne rovný

$$E(\mathbb{X}_\infty) = \sum_{j=0}^{5} j\pi_j = 2\frac{1}{2}.$$

Regulárny reťazec

Ak v Markovovom reťazci konvergujú rozdelenia stavov k limitnému rozdeleniu t.j. existuje

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \mathbf{p}$$

a ak limitné rozdelenie $\mathbf{p}$ nezávisí na počiatočnom rozdelení $\mathbf{p}(0)$ potom nazývame tento reťazec regulárny.

Lema 1.4

Ak je Markovov reťazec regulárny potom je jeho limitné rozdelenie stacionárne.

Dôkaz: Nech je $\mathbf{p}$ limitné rozdelenie regulárneho reťazca. Potom podľa lemy 1.1 platí

$$\mathbf{p} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n+1) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n)\mathbf{P} = \mathbf{p}\mathbf{P}$$

a tak je jeho limitné rozdelenie jediné stacionárne. •

Veta 1.3

Nech existuje také prirodzené číslo n, že všetky prvky matice $\mathbf{P}^n$ sú kladné. Potom je homogénny Markovov reťazec s maticou pravdepodobností $\mathbf{P}$ regulárny.

Poznámka

Markovova veta je jedna z najznámejších postačujúcich podmienok pre existenciu regulárneho reťazca

Príklad 1.6 (Cvičenie)

Vráťme sa k prikladu 1.4 s guličkami. Predpokladajme, že po troch pokusoch majú počty guličiek v 1.urne pp. rozdelenie $(0, 0.875, 0, 0.125, 0, 0)$, pričom na počiatku bola 1.urna prázdna. Najdite s pomocou Excelu maticu prechodu a stacionárne rozdelenie modelujúceho Markovovho reťazca. Čo môžeme usúdiť o chovaní guličiek? Bude tento reťazec regulárny?