

Teória hromadnej obsluhy

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Obsah

Úvod	2
1 Teória hromadnej obsluhy	3
1.1 Kendallová klasifikácia	4
1.2 Markovove systémy hromadnej obsluhy	5
1.3 Viaclinkové systémy hromadnej obsluhy	7
1.4 Frontové modely zásob	14
1.4.1 Systém $\mathbf{M} \mathbf{M} 1 \infty$	14
1.4.2 Inverzný systém $\mathbf{M} \mathbf{M} n n$	15
Register	17
Literatúra	17

Úvod

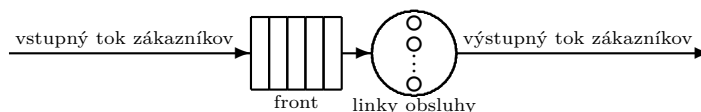
V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať niektorými základnými stochastickými metódami, s ktorými sa v praxi stretávame pri manažérskom rozhodovaní [13]. Najskôr stručne zopakujeme niektoré pojmy a postupy z teórie pravdepodobností, ktoré sú potrebné k pochopeniu problematiky. Pre hlbšie vniknutie do tejto problematiky odporúčame učebnicu [2] a [12] a pre precvičenie príručku [8]. Naviažeme najpoužívanejšími štatistickými metódami s ukázkami ich použitia. Rozsiahlejší výklad problematiky možno nájsť v učebniciach [1, 3]. V texte sa obmedzíme len na výber takých metód, ktoré majú podporu v programovom balíku *MS Excel*. Ako významné aplikácie stochastických metód sme vybrali modeli z teórie hromadnej obsluhy a teórie zásob z monografií [13, 6, 9]. Využitie základných poznatkov teórie markovových reťazcov demonštrujeme na riešení praktickej optimalizačnej úlohy údržby a obnovy zariadenia s podporou solvéru *Riešiteľ* v programe *MS Excel*.

Pravdepodobnostné predpovede, úsudky a modely sa už dnes stávajú, aj vďaka dostupným programovým produktom (*MS Excel*, *STATISTIC*, *R*), bežnou výbavou manažérov na všetkých stupňoch riadenia. Uplatňujú sa napr. pri vyhodnocovaní výsledkov marketingového prieskumu, kontrole akosti výrobkov, tvorbe nevyhnutných zásob tovarov, voľbe typov a režimoch obsluhy zákazníkov. Teoretickým základom takéhoto rozhodovane v podmienkach neistoty je teória pravdepodobností.

Kapitola 1

Teória hromadnej obsluhy

Teória hromadnej obsluhy je jednou z častých aplikácií markovových reťazcov, s ktorou sa možno stretnúť pri manažérskom rozhodovaní. Je pomerne ľahko použiteľná pri skúmaní chovania výrobných, dopravných, komunikačných, obchodných reťazcov atď. Jedná sa o **systemy hromadnej obsluhy (SHO)**, ktorých základná štruktúra je znázornená na obr. 1.1.



Obr. 1.1: Základná štruktúra elementárneho SHO

Do systému, v ktorom sa nachádzajú **linky obsluhy** (obslužné kanály), prichádza **vstupný tok zákazníkov** požadujúci obsluhu svojich požiadaviek. **Obsluha zákazníka** trvá istý čas počas ktorého blokuje linku, ktorá obsluhuje jeho požiadavky. Zákazníci po ukončení obsluhy uvoľňujú linku a vytvárajú **výstupný tok zákazníkov**. Vzhľadom na rôznorodosť modelovaných systémov je potrebné chápať pojmy zákazník, front, linka obsluhy, obsluha dosť všeobecne.

- **Vstupný tok zákazníkov** je postupnosť príchodov zákazníkov, ktoré nasledujú jedna za druhou v nejakých časových intervaloch. Zákazníci môžu prichádzať jednotlivo alebo v skupinách. Ich počet môže byť ne/obmedzený. Medzery medzi príchodmi môžu byť pravidelné alebo náhodné — vyžadujúce charakteristiky vstupného toku.
- **Front** je miesto, kde čakajú zákazníci, ktoré nemohli byť ihneď obsluhovaní. Najznámejšie disciplíny čakania vo fronte sú:

FIFO — prvý vstupuje prvý obslužený.

LIFO — posledný vstupuje prvý obslužený.

SIRO — výber v náhodnom poradí.

PRI — výber podľa priority.

Ak je počet miest frontu obmedzený, potom sú neumiestnitelní zákazníci odmietnutí.

- **Linka obsluhy** poskytuje obsluhu realizáciou požiadaviek zákazníkov. Môže byť poskytovaná jednou alebo viacerými linkami obsluhy, pričom niektoré linky môžu byť špecializované. Doba obsluhy (čas trvania obsluhy) môže byť rovnaká pre všetkých zákazníkov alebo závislá od typu zákazníka alebo náhodná.
- **Výstupný tok zákazníkov** je postupnosť okamihov odchodov zákazníkov zo systému. Vo všeobecnosti sú vlastnosti výstupného toku závislé od vstupného toku a režimu frontu a doby obsluhy. Výstupným tokom sa musíme zaoberať najmä v prípade, že je vstupným tokom ďalšieho systému hromadnej obsluhy.

Efektívnosť činnosti systémov hromadnej obsluhy býva charakterizovaná napríklad priemerným počtom (priemernou dobou) čakajúcich zákazníkov vo fronte, pomerom odmietnutých a prichádzajúcich zákazníkov ale i ďalšími nákladovými hladiskami. To, ktoré veličiny zvolíme, býva určené formuláciou problému. Pre prax má okrem ekonomického hľadiska význam aj hľadanie závislosti medzi charakteristikami modelovaných systémov.

1.1 Kendallová klasifikácia

Podľa možnosti vzniku frontu rozlišujeme systémy:

- S odmietaním** — bez čakania zákazníka v rade.
- S konečným frontom** — s obmedzeným počtom miest v rade.
- S obmedzeným čakaním** — s ohraničenou dobou čakania zákazníka v rade.
- S nespoľahlivými linkami** — s prerušovanou dobou obsluhy zákazníka.
- S nekonečným frontom** — neobmedzenou dobou čakania zákazníka v rade.

Podľa typu modelov rozoznávame systémy:

- Markovove** — nezávislé exponenciálne medzery medzi príchodmi resp. odchodmi zákazníkov.
- Semimarkovove** — medzerami modelovanými súčtami nezávislých exponenciálnych (erlangovských) medzier.
- Nemarkovove** — so všeobecným vstupným tokom zákazníkov a ich dobou obsluhy.

Podľa zdroja vstupného toku zákazníkov rozlišujeme:

- Otvorené systémy** — s neobmedzeným počtom zákazníkov.
- Uzavreté systémy** — s konečným počtom cirkulujúcich zákazníkov.
- Zmiešané systémy** — kombinácia otvorených a uzavretých systémov.

Siete — zložené z viacerých prepojených systémov elementárnych hromadnej obsluhy. pričom výstupný tok z jedného systému môže byť vstupným tokom druhého systému.

Uvedené delenie systémov nie je úplné. Ďalšími špecifickými kritériami sú napr. usporiadanie liniek v obsluhu — **sériové systémy** alebo rôzne druhy priorit liniek alebo zákazníkov — **prioritné systémy**.

V roku 1954 Kendall navrhol pomerne jednoduchú klasifikáciu SHO, ktorá sa používa dodnes (tab. 1.1).

Tabuľka 1.1: Základné parametre Kendallovej klasifikácie

Písmeno	X	Y
M	Poissonov vstupný tok	exponenciálne rozdelenie
E_r	Erlangov vstupný tok	Erlangovo rozdelenie
D	konštantné medzery toku	konštantná doba
G	všeobecné rozdelenie medzier	všeobecné rozdelenie

Elementárne systémy sú charakterizované kombináciou písmen a číslíc

$$\boxed{\mathbf{X}|\mathbf{Y}|n},$$

kde **X** popisuje vstupný tok zákazníkov, **Y** popisuje dobu obsluhy a **n** udáva počet liniek obsluhy. V anglosaskej literatúre je zaužívaná rozšírená Kendalova klasifikácia

$$\boxed{\mathbf{X}|\mathbf{Y}|n|m},$$

kde navyše **m** udáva maximálny prípustný počet zákazníkov v systéme.

V ďalšom texte budeme používať rozšírenú klasifikáciu. Ako príklad uvedme systém **M|M|2|5**: Dvojlinkový markovov SHO s Poissonovým vstupným tokom zákazníkov, exponenciálnou dobou obsluhy a tromi čakacími miestami vo fronte.

Ak nie je uvedená doplňujúca špecifikácia režimu frontu, predpokladá sa **FIFO**.

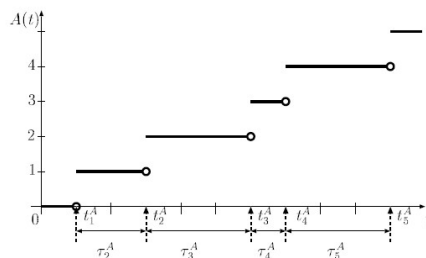
1.2 Markovove systémy hromadnej obsluhy

Markovovými systémami hromadnej obsluhy rozumieme také systémy, ktoré možno modelovať markovovými reťazcami so spojitým časom. Nech je S množina stavov markovovho reťazca $\mathbf{N}(t)_{t \in T}$, ktoré zvyčajne interpretuje ako počty zákazníkov v systéme. Potom

$$p_j(t) = \mathcal{P}(\mathbf{N}(t) = j)$$

udáva pravdepodobnosť, že v systéme je v čase t práve j čakajúcich alebo obsluhovaných zákazníkov.

Nech $\{\mathbf{A}_t, t \in T\}$ a $\{\mathbf{B}_t, t \in T\}$ sú náhodné procesy, pričom náhodná veličina \mathbf{A}_t udáva počet príchodov zákazníkov do systému za čas t a náhodná veličina \mathbf{B}_t udáva počet odchodov zákazníkov zo systému za čas t .

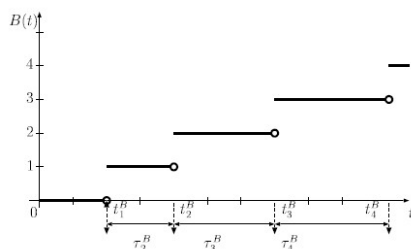


Obr. 1.2: Realizácia vstupného toku zákazníkov

Príklad realizácie takýchto procesov, ktoré popisujú vývoj nejaký obslužný systém v čase, sú na obrázkoch 1.2 a 1.3. Jedná sa o stupňovité funkcie. Realizácia náhodnej veličiny \mathbf{A}_t zväčší svoju hodnotu o 1 v čase príchodu $t_1^A, t_2^A, t_3^A, \dots$ zákazníka do systému. Podobne realizácia náhodnej veličiny \mathbf{B}_t zväčší svoju hodnotu o 1 v čase odchodu $t_1^B, t_2^B, t_3^B, \dots$ zákazníka zo systému. Pretože i -ty zákazník musí najskôr prísť do systému a až potom môže odísť, platí nerovnosť

$$t_j^A \leq t_j^B, j = 1, 2, \dots,$$

kde t_j^A resp. t_j^B sú okamihy príchodu resp. odchodu zákazníka. Prípád $t_j^A = t_j^B$ znamená, že zákazník bol odmietnutý.

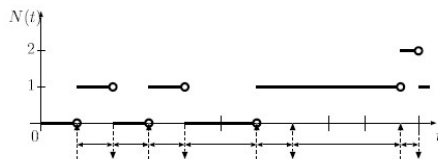


Obr. 1.3: Realizácia výstupného toku zákazníkov

Na obr. 1.4 máme jednu z možných realizácií vývoja systému s príslušnými vstupnými a výstupnými tokmi zákazníkov.

Vidíme, že počet zákazníkov v systéme dostaneme zo vzťahu $\mathbf{N}(t) = \mathbf{A}_t - \mathbf{B}_t$. Tento vzťah sa výhodne využíva pri **simulácii systémov**, keď sa základné charakteristiky systému (napr. využitie systému, stredný počet zákazníkov v systéme, stredná doba čakania zákazníkov vo fronte, atď.) nevypočítavajú analyticky ale numericky. Ďalej sa obmedzíme len na analytické metódy pre markovove SHO, pre ktoré je charakteristické, že medzery medzi udalosťami (príchodmi a odchodmi zákazníkov) majú bezpamäťové exponenciálne rozdelenie.

Všeobecne SHO považujeme za stabilizovaný, ak od istého okamihu je ďalší



Obr. 1.4: Vývoj stavu systému hromadnej obsluhy

vývoj systému nezávislý na čase. Nasledujúce tvrdenie, známe ako Littlova formula, ktoré má všeobecnú platnosť, dáva do súvislosti tri základné charakteristiky stabilizovaného SHO.

Veta 1.1 (Littlova formula). *Majme stabilizovaný systém hromadnej obsluhy. Nech λ je stredný počet prijatých zákazníkov do systému, $E(\mathbf{N})$ je stredný počet zákazníkov v systéme a $E(\mathbf{T})$ stredná doba pobytu zákazníka v systéme. Potom platí*

$$\lambda = \frac{E(\mathbf{N})}{E(\mathbf{T})}. \quad (1.1)$$

Parameter λ v Littlovej formule sa nazýva **intenzita vstupného toku zákazníkov**.

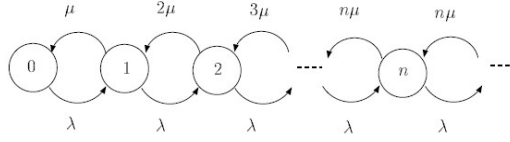
1.3 Viaclinkové systémy hromadnej obsluhy

Do viaclinkového systému hromadnej obsluhy $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|\infty$ prichádzajú zákazníci modelovaný Poissonovým vstupným tokom s parametrom $\lambda > 0$ a požadujú obsluhu. To znamená, že priemerná dĺžka medzery medzi ich príchodmi sú $\frac{1}{\lambda}$. Doba obsluhy každej z n línií má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\mu > 0$ a tak stredná doba obsluhy je rovná $\frac{1}{\mu}$. Zákazníci, ktorí nájdu linku obsadenú sa postavia do radu. Na takto vzniknutý front sa nekladú žiadne obmedzenia. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov t. j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Tento systém je príkladom systému s neohrančeným frontom. Znamená to tiež, že aj doba čakania zákazníka v systéme je neobmedzená.

Systém možno modelovať ako tzv. proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}_t, t \in T\}$ s nekonečnou množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stavy systému interpretujeme takto:

- 0 — v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny.
- $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ — v systéme je obsluhovaných i zákazníkov.
- $i \in \{n + 1, n + 2, \dots, \infty\}$ — v systéme je obsluhovaných n zákazníkov a $i - n$ zákazníkov čaká v rade na obsluhu.

Za týchto predpokladov možno vytvoriť prechodový graf na obr. 1.5, z ktorého dostávame


 Obr. 1.5: Prechodový graf systému $M|M|n|\infty$

Dostávame špeciálnu maticu intenzít $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ procesu vzniku a zániku, pričom platí

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{ak } j = i + 1, i \geq 0, \\ i\mu, & \text{ak } j = i - 1, 0 < i \leq n, \\ n\mu, & \text{ak } j = i - 1, i > n, \\ -\lambda, & \text{ak } j = i = 0, \\ -(\lambda + i\mu), & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n, \\ -(\lambda + n\mu), & \text{ak } j = i, i > n, \\ 0, & \text{ak } |i - j| > 1. \end{cases}$$

Z praktického hľadiska je významný prípad, keď sa systém stabilizuje t. j. $\frac{\lambda}{n\mu} > 0$. Stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi}$ stavov systému vypočítame riešením systému lineárnych rovníc

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \sum_{j \in S} \pi_j = 1, \quad \pi_j \geq 0, \quad j \in S.$$

Možno ho odvodiť v tvare

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{(n\rho)^j}{j!} \pi_0, & \text{ak } 0 < j \leq n, \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi_0, & \text{ak } j \geq n, \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \right)^{-1}, & \text{ak } j = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pre praktické využitie systému potrebujeme odvodiť jeho základné charakteristiky:

- P_Q – pp. že prichádzajúci zákazník bude čakať v rade

$$P_Q = \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi_0 = \pi_0 \frac{n^n}{n!} \frac{\rho^n}{1-\rho} = \frac{\pi_n}{1-\rho}. \quad (1.3)$$

- $E(N_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov v rade

$$\begin{aligned} E(N_Q) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{n^n}{n!} \rho^{n+k} \pi_0 = \frac{n^n}{n!} \rho^n \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k = \\ &= \frac{n^n}{n!} \pi_0 \rho^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1} = \frac{n^n \rho^{n+1} \pi_0}{n!(1-\rho)^2} = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

- α – zaťaženie systému

$$\alpha = n\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1.5)$$

- $E(\mathbf{N}_S)$ – stredný počet obsadených liniek

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}_S) &= \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_k = 1\frac{\alpha}{1!}\pi_0 + 2\frac{\alpha^2}{2!}\pi_0 + \cdots + n\frac{\alpha^n}{n!}\pi_0 + \\ &\quad + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho\pi_0 + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho^2\pi_0 + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho^3\pi_0 + \cdots = \\ &= \alpha(\pi_0 + \pi_2 + \cdots + \pi_n + \pi_{n+1} + \pi_{n+2} + \pi_{n+3} + \cdots) = \alpha. \end{aligned} \quad (1.6)$$

- κ – využitie systému

$$\kappa = \frac{E(\mathbf{N}_S)}{n} = \frac{\alpha}{n} = \rho. \quad (1.7)$$

Pomocou Littlovej formule možno odvodiť časové charakteristiky systému:

- $E(\mathbf{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda} = \frac{P_Q\rho}{\lambda(1-\rho)}. \quad (1.8)$$

- $E(\mathbf{W}_S)$ – stredná doba obsluhy v systéme

$$E(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu}. \quad (1.9)$$

- $E(\mathbf{T})$ – stredná doba pobytu v systéme

$$E(\mathbf{T}) = E(\mathbf{W}_Q) + E(\mathbf{W}_S) = \frac{P_Q\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}. \quad (1.10)$$

- $E(\mathbf{N})$ – stredná počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbf{N}) = \lambda E(\mathbf{T}) = E(\mathbf{N}_Q) + E(\mathbf{N}_S). \quad (1.11)$$

Vyššie uvedené vzorce sú výhodné najmä pre počítačové spracovanie. Praktickou optimalizačnou úlohou vo viaclinkových systémoch je **optimalizácia počtu liniek**. Základný model vychádza zo známych nákladov za čakanie zákazníkov v systéme a za prestoj liniek. Nech sú známe za isté jednotkové obdobie tieto náklady na prevádzku stabilizovaného systému:

- c_1 – náklady na čakajúceho zákazníka,
- c_2 – náklady za nevyužitú linku.

Cielom je nájsť taký počet liniek n pri ktorom sú celkové priemerné náklady minimálne. Kriteriálna funkcia $C(n)$ je zložená z dvoch častí

$$C(n) = c_1 E(\mathbf{N}_Q) + c_2(n - E(\mathbf{N}_S)). \quad (1.12)$$

Priemerné náklady za čakajúcich zákazníkov $c_1 E(\mathbf{N}_Q)$ sú priamo úmerné priemernému počtu čakajúcich zákazníkov. Priemerné náklady za nevyužité linky $c_2(n - E(\mathbf{N}_S))$ sú zas úmerné priemernému počtu nevyužitých liniek. Po dosadení príslušných charakteristík tak dostávame

$$C(n) = c_1 \frac{\pi_n \rho}{1 - \rho^2} + c_2 n(1 - \rho).$$

Ďalší postup závisí na tom, ktorý z nasledujúcich dvoch prípadov nastane.

- Sú dané intenzity λ, μ , potom sa hľadá také n^* , že

$$C(n^*) = \min\{C(n) : n > \frac{\lambda}{\mu}, n \geq 1\}.$$

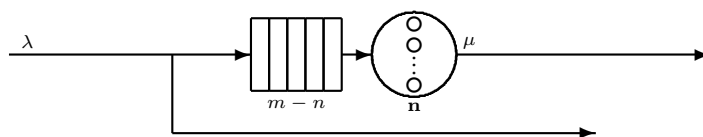
- Sú dané intenzity λ, μ_{\max} , potom sa hľadá také n^* , že

$$C(n^*, \mu^*) = \min\{C(n) : n > \frac{\lambda}{\mu}, \mu > \mu_{\max}, n \geq 1\},$$

kde $C(n, \mu)$ je kriteriálna funkcia dvoch premenných, ktorú dostaneme z (1.12) po dosadení príslušných charakteristík.

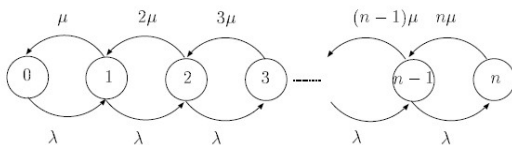
Poznamenajme, že praktické riešenie takýchto optimalizačných úloh si už vyžaduje počítačové spracovanie.

V prípade viaclinkového systému $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$ zostávajú v platnosti skoro všetky predpoklady systému $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|\infty$. Zmenou je len, že sa pripúšťa čakanie len v obmedzenom rade frontu dĺžky $m - n$ čakacích miest, ako vidieť zo štruktúry systému na obr. 1.6.



Obr. 1.6: Štruktúra otvoreného systému $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$

Systém sa modeluje opäť ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}_t, t \in T\}$ s konečnou množinou stavov $S = \{0, 1, \dots, n, \dots, m\}$. Prechodový graf tohoto systému je zobrazený na obr. 1.7, z ktorého ľahko odvodíme maticu intenzít $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$.

Obr. 1.7: Prechodový graf otvoreného systému $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{ak } j = i + 1, 0 \leq i < m, \\ i\mu, & \text{ak } j = i - 1, 0 < i \leq n, \\ n\mu, & \text{ak } j = i - 1, n < i < m, \\ -\lambda, & \text{ak } j = i = 0, \\ -(\lambda + i\mu), & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n, \\ -(\lambda + n\mu), & \text{ak } j = i, n < i < m, \\ -n\mu, & \text{ak } j = i = m, \\ 0, & \text{ak } |i - j| > 1. \end{cases}$$

V tomto prípade má systém vždy jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{\alpha^j}{j!} \pi_0, & \text{ak } 0 < j \leq n, \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi_0, & \text{ak } n < j \leq m, \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^m \rho^j \right)^{-1}, & \text{ak } j = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\alpha}{n}$.

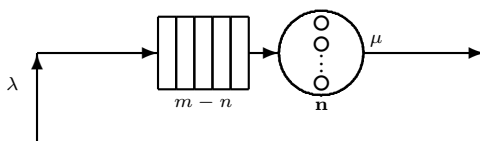
Opäť možno odvodiť príslušné charakteristiky systému, obmedzíme sa len na niektoré priamo odvoditeľné:

- $E(N_S) = \alpha(1 - \pi_m)$ – stredný počet obsadených liniek,
- $\kappa = \rho(1 - \pi_m)$ – využitie systému,
- $\lambda_P = \lambda(1 - \pi_m)$ – stredný počet prijatých zákazníkov za časovú jednotku,
- $\lambda_Z = \lambda\pi_m$ – stredný počet odmietnutých zákazníkov za časovú jednotku.

Poznamenajme, že π_m tu udáva pravdepodobnosť zamietnutia zákazníka. V prípade systému s odmietaním $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|n$, sa v systéme nečaká – zákazníci ktorí nájdu obsadené všetky linky sú odmietnutí, dostávame pochopiteľne zhodné charakteristiky.

V systéme $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$ môžeme prirodzeným spôsobom formulovať optimalizačné úlohy nielen o počte liniek obsluhy ale i o počte čakacích miest vo fronte, počte priemerne odmietnutých zákazníkov atď, čo však presahuje cieľ tejto publikácie.

Ako posledný z n -linkových systémov si uvedme uzavretý systém $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$, v ktorom cirkuluje m zákazníkov, pričom môžu čakať v nanajvyš $m - n \geq 0$ miestnom fronte na uvoľnenie niektorej z liniek obsluhy.



Obr. 1.8: Štruktúra uzavretého systému $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$

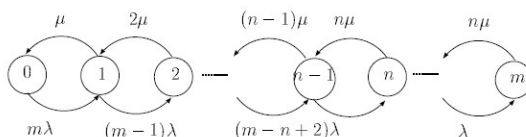
Zákazníci po ukončení obsluhy opúšťajú systém ale neskôr, za dobu modelovanú exponenciálnym rozdelením s parametrom $\lambda > 0$, sa do neho vracajú s požiadavkou na obsluhu. Doba obsluhy každej s paralelne pracujúcich liniek má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu linku voľnú, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Zákazníci, ktorí nájdu všetky linky obsadené musia čakať vo fronte na uvoľnenie linky. Opäť sa predpokladá, že zákazníci sú obsluhovaní v poradí príchodov t. j. v režime frontu **FIFO**.

Prípád $m = n$ je triviálny, pretože každému zákazníkovi priradíme jednu linku a stačí riešiť triviálny model $\mathbf{M}|\mathbf{M}|1|1$. Ďalej budeme predpokladať $m > n$.

Systém možno modelovať opäť ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}_t, t \in T\}$ s konečnou množinou stavov $S = \{0, 1, \dots, n, \dots, m\}$. $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stav systému interpretujeme takto

- 0 – v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny, všetci zákazníci sú mimo systému,
- $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ – v systéme je obsluhovaných i zákazníkov,
- $i \in \{n + 1, n + 2, \dots, m\}$ – v systéme je obsluhovaných n zákazníkov a $i - n$ zákazníkov čaká v rade na obsluhu.

Prechodový graf tohoto systému je zobrazený na obr. 1.7, z ktorého získame maticu intenzít $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$.



Obr. 1.9: Prechodový graf uzavretého systému $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$

Aj v tomto prípade má systém vždy jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{m-j+1}{j} \alpha \pi_{j-1}, & \text{ak } 0 < j \leq n, \\ (m-j+1) \rho \pi_{j-1}, & \text{ak } n < j \leq m, \\ 1 - \sum_{k=1}^m \pi_k & \text{ak } j = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\alpha}{n}$.

Uvedené vzorce sú v rekurentnom tvare, ktorý je výhodný pre pohodlné počítačové spracovanie (MS Excel), ich explicitný tvar je zložitý a preto ho neuvádzame. Umožňujú tak výpočet základných charakteristík stabilizovaného systému.

- $E(\mathbf{N}) = \sum_{j=1}^m j \pi_j$ – stredný počet zákazníkov v systéme.
- $E(\mathbf{N}_S) = \sum_{j=1}^{n-1} j \pi_j + n \sum_{j=n}^m \pi_j$ – stredný počet obsadených liniek v systéme.
- $E(\mathbf{N}_Q) = E(\mathbf{N}) - E(\mathbf{N}_S)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov v systéme.
- $E(\mathbf{N}_R) = m - E(\mathbf{N}_S) - E(\mathbf{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov mimo systému.
- λ_R – intenzita vstupného toku zákazníkov (stredný počet prichádzajúcich zákazníkov za jednotku času). V uzavretom stabilizovanom systéme je stredný počet prichádzajúcich zákazníkov rovný strednému počtu odchádzajúcich zákazníkov. Littlovu formulu možno aplikovať aj na výstupný tok zákazníkov a tak dostávame nečakaný vzťah

$$\lambda_R = \frac{E(\mathbf{N}_S)}{\frac{1}{\mu}} = \mu \alpha \sum_{j=1}^m (m-j+1) \pi_{j-1} = \lambda E(\mathbf{N}_R).$$

- $\kappa = \frac{E(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho E(\mathbf{N}_R)$ – využitie systému.
- $E(\mathbf{W}_Q)$ – stredná doba čakania zákazníka vo fronte sa opäť odvodí z Littlovej formuly

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda_R} = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda E(\mathbf{N}_R)}.$$

- $E(\mathbf{W}_O) = E(\mathbf{W}_Q) + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ – stredná doba obehu zákazníka je zložená zo strednej doby čakania, strednej doby obsluhy a strednej doby pobytu mimo systému.

Príklad 1.1 (Obeh vozidiel v kameňolome). *Pre kameňolom Ladce bola v rokoch 1991-2 riešená vo VÚD Žilina nasledujúca optimalizačná úloha:*

„V kameňolome cirkulujú vodiči nákladných vozidiel TATRA medzi drvičkou a bagrami. Stredná doba nakládky kameňa má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Stredná doba strávená jazdou vozidla z bagroviska k drvičke, vykládkou kameňa a jazdou prázdneho vozidla na bagrovisko má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Priemerný mesačný výkon vodiča je m_v obehov. Drvička vyžaduje na svoju neefektívnu mesačnú prevádzku m_d vykládok vozidiel. Nech mesačná mzda bagristu je c_b [€] a vodiča je c_v [€]. Treba určiť optimálny počet bagristov a vodičov tak, aby sa minimalizovali priemerné straty z prestojov vodičov a bagristov.“

Pohyb vozidiel možno modelovať zákazníkmi v uzavretým systéme $\mathbf{M}|\mathbf{M}|n|m$, kde n je počet bagristov a m je počet vodičov. Dolný odhad počtu vodičov je daný minimálnou potrebou priemerného počtu vykládok t. j. počet vodičov musí byť $m \geq \frac{m_d}{m_v}$. Priemerný počet nevyužitých bagristov je $n - E(\mathbf{N}_S)$. Vodiči stoja keď čakajú na nakládku bagrom.

Priemerné straty prestojov bagristov možno odhadnúť $c_b(n - E(\mathbf{N}_S))$. Priemerné straty z prestojov vodičov možno odhadnúť $c_v E(\mathbf{N}_Q)$. Potom celkové priemerné straty kameňolomu na mzdách n bagristov a m vodičov pri zaťažení $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ sú rovné

$$C(n, m) = c_b(n - E(\mathbf{N}_S)) + c_v E(\mathbf{N}_Q).$$

Cielom je nájsť také počty n^* a m^* pri ktorých sa minimalizuje

$$C(n^*, m^*) = \min\{C(n, m) : m \geq \frac{m_d}{m_v}, n \geq 1, m \geq 1\}.$$

Experimenty s rôznymi inštanciami úlohy už možno ponechať na cvičenie. \square

1.4 Frontové modely zásob

Systémy hromadnej obsluhy sa vyskytujú aj pri modelovaní zásob t. j. substrátov určených na neskoršiu spotrebu, nakoľko Poissonovým procesom možno modelovať [9]:

- **Tok dodávok** – tok zákazníkov reprezentuje tok jednotiek dodávok a obsluha zákazníka reprezentuje uspokojenie jednotky spotreby.
- **Tok spotreby** – tok zákazníkov je tok jednotiek spotreby substrátu a obsluha predstavuje dopĺňanie zásob od času podania objednávky po príchod dodávky na sklad.

1.4.1 Systém $\mathbf{M}|\mathbf{M}|1|\infty$

V tomto modeli sú zákazníci dodávkami na sklad. Tok dodávok je Poissonov s parametrom λ . Priemerná medzera medzi dodávkami je tak rovná $\frac{1}{\lambda}$. Doba obsluhy zodpovedá dobe od jej objednávky po jej dodanie a má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ . Jednotka zásob opúšťa systém po priemernej dobe

$\frac{1}{\mu}$, keď je vyskladnená. Predpokladaný neobmedzený front zabezpečuje, že každá dodávka bude raz vyskladnená.

Množina stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ udáva počet jednotiek zásob v sklade. Stav 0 reprezentuje deficit zásob, keď nemožno uspokojiť žiadnu jednotku spotreby. Stav i reprezentuje situáciu keď je jedna jednotka zásob vyskladňovaná a v sklade zostáva ešte $i - 1$ jednotiek zásob. Systém je zaujímavý po stabilizácii $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Vtedy možno zo vzťahu (1.2) odvodiť pravdepodobnostné rozdelenie stavov v explicitnom tvare $\pi_j = \rho^j(1 - \rho)$.

Primeraná výška zásob v sklade je rovná priemernému počtu zákazníkov v systéme

$$E(\mathbf{N}) = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Optimalizácia sa v modeloch tohoto typu realizuje minimalizáciou nákladovej funkcie zloženej z priemerných nákladov skladovania a z priemerných nákladov deficitu pri jednotkových sadzbách c_s za skladovanie a c_u za deficit t. j.

$$H(\rho) = c_s E(\mathbf{N}) + c_u \pi_0 = \frac{c_s \rho}{1 - \rho} + c_u (1 - \rho).$$

Absolútne minimum nadobúda nákladová funkcia pre $c_s < c_u$ pri využití skladu ρ^*

$$\rho^* = 1 - \sqrt{\frac{c_s}{c_u}}. \quad (1.15)$$

Nevýhodou minimalizácie nákladovej funkcie $H(\rho)$ je, že nezohľadňuje **priemerný stav zásob**, ktorý tak môže nadobudnúť neprijateľné hodnoty. Vieme však vypočítať pravdepodobnosť

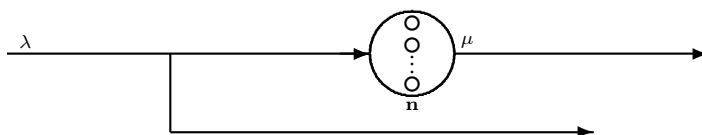
$$\mathcal{P}(\mathbf{N} > q) = \sum_{j=q+1}^{\infty} \pi_j = \rho^{q+1},$$

že stav zásob neprekročí istú kritickú hodnotu q .

1.4.2 Inverzný systém M|M|n|n

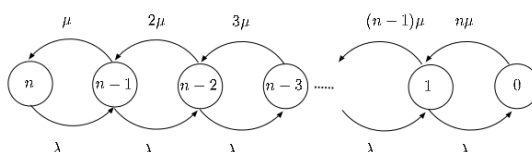
V tomto modeli sú zákazníkmi jednotkové požiadavky spotreby na sklad. Tok spotrieb je modelovaný Poissonovým tokom s parametrom λ . Priemerná dĺžka medzery medzi príchodmi požiadaviek na sklad má tak dĺžku $\frac{1}{\lambda}$. Doba obsluhy spotreby je dobou dodacej lehoty jednej jednotky skladovaného substrátu a má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ . Jednotka spotreby opúšťa vždy systém v okamihu svojho príchodu. Ak nájde nejakú linku voľnú, potom je na sklade aspoň jedna jednotka zásob, ktorá bude vyskladnená a zároveň je vystavená nová objednávka na dodávku jednotky substrátu na doplnenie zásob skladu. Po priemernej dobe $\frac{1}{\mu}$ je takto k dispozícii nová jednotka zásob. Ak požiadavka spotreby nájde všetky linky obsadené, znamená to že je sklad prázdny a preto bude táto požiadavka z dôvodu deficitu zásob odmietnutá.

Takto formulovaný model zásob možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}_t, t \in T\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Stav systému interpretujeme takto:


 Obr. 1.10: Inverzný systém $M|M|n|n$

- n – deficit zásob – sklad je prázdny, všetky objednané zásoby sú na ceste a tak nemôže byť žiadna jednotka spotreby uspokojená.
- $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ – v sklade sa dopĺňajú zásoby dodávkou i jednotiek zásob.

Na rozdiel od klasického systému $M|M|n|n$ v inverznom systéme príchod zákazníka nespôsobuje zväčšenie stavu systému o jednotku ale zmenšenie o jednotku, čomu zodpovedá prechodový graf na obr. 1.11.


 Obr. 1.11: Prechodový graf inverzného systému $M|M|n|n$

Aj v tomto prípade má systém vždy jediné stacionárne rozdelenie $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{\alpha^{n-j}}{(n-j)!} \pi_n, & \text{ak } 0 \leq j < n, \\ \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} \right)^{-1}, & \text{ak } j = n, \end{cases} \quad (1.16)$$

kde parameter $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ sa nazýva predstih zásob.

Priemerný stav zásob v stabilizovanom systéme je určený vzťahom

$$E(\mathbf{Q}) = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \pi_j = \pi_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha^{n-j}}{(n-j-1)!}. \quad (1.17)$$

Priemerný počet objednaných jednotiek substátu je $n - E(\mathbf{Q})$. Optimálnu hodnotu n^* **hladiny zásob** môžeme získať maximalizáciou priemerného čistého zisku

$$Z(n) = c_z(n - E(\mathbf{Q})) + c_s E(\mathbf{Q}), \quad (1.18)$$

kde c_z je priemerný zisk z predaje jednotky zásob a c_s sú priemerné náklady za skladovania jednotky zásob.

Literatúra

- [1] ANDĚL, J.: *Statistické metody*, Vydavatelství MATFYZPRESS, Praha, (1998), ISBN 80-85863-27-8.
- [2] ANDĚL, J.: *Matematika náhody*, Vydavatelství MATFYZPRESS, Praha, (2004), ISBN 80-85863-52-9.
- [3] CHAJDIAK, J.: *Štatistika jednoducho*, Vydavateľstvo STATIS, Bratislava, (2010), ISBN 978-85659-60-3.
- [4] JUREČKOVÁ, M., MOLNÁROVÁ, I.: *Štatistika s Excelom*, Vydavateľstvo AOS, Liptovský Mikuláš, (2015), ISBN 80-8040-257-4.
- [5] LIKEŠ, J., MACHEK, J.: *Počet pravdepodobnosti*, Sešit X, Matematika pro vysoké školy technické, SNTL – Naladatelství technické literatury, Praha, (1981).
- [6] LINDA, B.: *Stochastické modely operačného výskumu*, Vydavateľství STATIS, Bratislava, (2004), ISBN 80-8569-33-6.
- [7] LITSCHMANNOVÁ, M.: *Vybrané kapitoly z pravdepodobnosti*, skripta, VŠB–TU, FEI, Ostrava, (2011), <http://mi21.vsb.cz/modul/vybrane-kapitoly-z-pravdepodobnosti>.
- [8] HABÁK, P., KAHOUNOVÁ, J.: *Počet pravdepodobnosti v príkladech*, Vydavateľství INFORMATORIUM, Praha, (2005), ISBN 80-733-040-7.
- [9] PALÚCH, S., PEŠKO, Š.: *Kvantitatívne metódy v logistike*, EDIS vydavateľstvo, Žilina, (2006), ISBN 80-8070-636-0.
- [10] PEŠKOVÁ, A.: *Návrh a overenie mechanizmu optimalizácie riadenia procesu údržby a obnovy v diskretných výrobách* Dizertačná práca. Košice: TU SjF, (2015), 110s.
- [11] PIDANY, J.: *Metódy porovnávania a sledovania dynamiky vývoja v ekonomike*, ELFA s.r.o. vydavateľstvo, Košice, (1996), ISBN 80-88786-37-1.
- [12] RIEČAN, B., LAMOŠ, F., LENÁRT, C.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, ALFA vydavateľstvo, Bratislava, (1984).

- [13] SAKÁL, P., JERZ, V.: *Operačná analýza v praxi manažéra*, TRIPSOFT, Edícia teória a prax manažerstva 2, Trnava, (2003), ISBN 80-968734-3-1.