Dvojmaticové hry

Štefan Peško

Katedra matematických metód, FRI ŽU

18. april 2012

Častejšie než s antagonistickými konfliktami sa stretávame s konfliktami, v ktorých každý z inteligentných účastníkov sleduje svoje záujmy, ktoré sú čiastočne protichodné. Vniká možnosť koordinácie volieb rozhodnutí s cieľom dosiahnuť obojstranných výhod.

Hovoríme o neantagonistickej hre

- **nekooperatívnej** - ak nie je možná dohoda medzi hráčmi,
- **kooperatívnej s prenosnou výhrou** - ak je možná dohoda medzi hráčmi o stratégii aj prerozdelení výhry,
- **kooperatívnej s neprenosnou výhrou** - ak je možná len dohoda medzi hráčmi o stratégii.

Najskôr sa obmedzíme len na neantagonistické hry s konečnými priestormi stratégií.

Nentagonistický konflikt dvoch hráčov s konečnými priestormi stratégií modeluje dvojmaticová hra.

Definícia 5.1

Nech $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ sú reálne matice $m \times n$. Potom hru

$$\mathcal{H}_{\mathbb{AB}} = \left(Q = \{1, 2\}, \mathcal{X} = \{1, \ldots, m\}, \mathcal{Y} = \{1, \ldots, n\}, a_{ij}, b_{ij}\right), \tag{1}$$

ktorú možno prehľadne popísať jednou dvojmaticou

$$\mathbb{AB} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11}, b_{11}; & a_{12}, b_{12}; & \ldots & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21}; & a_{22}, b_{22}; & \ldots & a_{2n}, b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1}, b_{m1}; & a_{m2}, b_{m2}; & \ldots & a_{mn}, b_{mn} \end{array} \right)$$

nazývame *dvojmaticovou hrou*.

O existencii rovnovážnych stratégií v dvojmaticových hrách môžeme rozhodnúť priamo prezeraním všetkých mn možných dvojíc stratégií.

Definícia 5.2

Stratégiu $(i^*, j^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$ nazývame **rovnovážnou stratégiou** práve vtedy keď platí:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \quad \forall i \in \mathcal{X}, \qquad (2)$$

$$b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*} \quad \forall j \in \mathcal{Y}. \qquad (3)$$

Ľahko sa overí, že ak je (i^*, j^*) rovnovážna stratégia hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$, potom platí:

- $a_{i^*j^*}$ je najväčší prvok v stĺpci j^* matice $\mathbb{A}$:
  $a_{i^*j^*} = \max_{k\in\mathcal{X}} a_{kj^*}$,
- $b_{i^*j^*}$ je najväčší prvok riadku i^* matice $\mathbb{B}$:
  $b_{i^*j^*} = \max_{k\in\mathcal{X}} b_{i^*k}$.

Príklad 5.1

Je rovnovážna stratégia dvojmaticovej hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} \boxed{4,1}; & -9,-8 \\ 3,4; & \boxed{-4,5} \end{pmatrix}$$

racionálnou voľbou oboch hráčov?

Nech 1.hráč zvolí $i^* = 1$ svoju rovnovážnu stratégiu a 2.hráč zvolí $j^* = 2$ tiež svoju rovnovážnu stratégiu. Výsledok je však najhorší možný, pritom existuje možnosť výhodnejšej voľby stratégie $(i^*, j^*) = (2, 1)$.

Existencia viacerých rôznych rovnovážnych stratégii hráčov viedla k nevhodnej voľbe stratégie hry. Rovnovážna stratégia hry tu nie je racionálna voľba, je potrebná dohoda o stratégii.

Len existencia viacerých rovnovážnych stratégií nemusí byť problematická.

Príklad 5.2

Je rovnovážna stratégia dvojmaticovej hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 4,1; & -9,-8 \\ 3,4; & \boxed{5,5} \end{pmatrix}$$

racionálnou voľbou oboch hráčov?

Hráči sa bez dohody zhodnú na tej rovnovážnej stratégii hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$ $(i^*, j^*) = (2,2)$, ktorá je pre oboch výhodná.

Definícia 5.3

Nech je (i^*, j^*) rovnovážna stratégia v dvojmaticovej hre $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$ s vlastnosťou:

$$a_{i^*j^*} \geq a_{i'j'}, \tag{4}$$

$$b_{i^*j^*} \geq b_{i'j'}, \tag{5}$$

kde (i', j') je ľubovoľná rovnovážna stratégia hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$.

Potom dvojicu (i^*, j^*) nazveme **dominujúcou rovnovážnou stratégiou** hry.

Príklad 5.2 ukázal, že ak je medzi rovnovážnymi stratégiami hry jediná dominujúca, je racionálnym návodom jednania hráčov. Ak však v hre existuje viacero dominujúcich rovnovážnych stratégií, môže vzniknúť opäť problém.

Príklad 5.3 – Dve dominujúce rovnovážne stratégie

Je dominujúca rovnovážna stratégia dvojmaticovej hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 3,2; & 1,2; & \boxed{8,9} \\ 1,1; & 4,4; & -4,3 \\ \boxed{8,9}; & 1,-2; & -3,-3 \end{pmatrix}$$

racionálnou voľbou oboch hráčov?

V tejto hre máme dve dvojice dominujúcich rovnovážnych stratégii $(1,3)$ a $(3,1)$. Pri nedostatku komunikácie medzi hráčmi sa môže stať že zvolia stratégie $(1,1)$ alebo $(3,3)$ ktoré sú pre oboch hráčov nepriaznivé. Pre racionáľnu voľbu je tu potrebná opäť dohoda o stratégii.

Aj túto situáciu možno vylúčiť nasledujúcou požiadvkou na rovnovážne stratégie.

Definícia 5.4

Nech $(i_k^*, j_k^*) \in Z$ sú dvojice rovnovážnych stratégií hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$, kde $Z = I \times J, I \subseteq \mathcal{X}, J \subseteq \mathcal{Y}$. Potom množinu Z dvojíc rovnovážnych stratégií nazveme **zámennou sústavou**, ak sa hodnoty výplatných funkcií hráčov nezmenia pri zámene stratégií t.j.

$$Z = \{(i_k^*, j_k^*) : k \in K, a_{i_k^* j_k^*} = m_1^*, b_{i_k^* j_k^*} = m_2^*\} \qquad (6)$$

Príklad 5.4 – Zámenná sústava rovnovážnych stratégií

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} \boxed{8,9}; & 1,2; & \boxed{8,9} \\ 1,1; & 4,4; & -4,3 \\ \boxed{8,9}; & 1,-2; & \boxed{8,9} \end{pmatrix}$$

V hre $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$ máme $Z = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$.

Poznámka

Rovnovážne stratégie dávaju v dvojmaticových hrách (ale tiež v nekonečných neantagonistických nekooperatívnych hrách) racionálny návod jednania hráčov ak

- v hre existuje jediná rovnovážna stratégia,
- v hre existuje jediná dominujúca rovnovážna stratégia,
- v hre všetky dominujúce stratégie trvoria zámennú sústavu.

Príklad 5.5 – Hra bez rovnovážnych stratégií

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 0,4; & 2,3 \\ 1,2; & 0,4 \end{pmatrix}$$

Ľahko sa presvedčíme,že žiadna z dvojíc $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$ nie je rovnovážnou stratégiou hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$.

Tento záporný výsledok však neprekvapuje ak si uvedomíme, že pre $\mathbb{A} = -\mathbb{B}$ dostávame z dvojmaticových hier $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$ maticové hry $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$, v ktorých sme sa stretávali s hrami, bez čistých rovnovážnych stratégií.

Ak zistíme, že dvojmaticová hra nemá rovnovážnu stratégiu môžeme skúmať zmiešané rozšírenie hry.

Definícia 5.5

Dvojmaticovú hru

$$(\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}) = (Q = \{1, 2\}, (\mathcal{X}), (\mathcal{Y}), M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \tag{7}$$

s priestormi stratégií

$$(\mathcal{X}) = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \tag{8}$$

$$(\mathcal{Y}) = \{\mathbf{y} : y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \tag{9}$$

s výplatnými funkciami

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbb{A} \mathbf{y} \tag{10}$$

$$M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbb{B} \mathbf{y} \tag{11}$$

nazývame **zmiešaným rozšírením dvojmaticovej hry** určenej dvojmaticou $\mathbb{AB}$ a $M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ **očakávané hodnoty výhry.**

Veta 5.1. Nashova

V zmiešaných stratégiách má každa dvojmaticová hra $\mathcal{H}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ aspoń jednu rovnovážnu stratégiu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in (\mathcal{X}) \times (\mathcal{Y})$ t.j. patia nerovnosti:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \mathbb{A} \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*\mathbf{T}} \mathbb{A} \mathbf{y}^* \quad \forall \mathbf{x} \in (\mathcal{X}) \tag{12}$$

$$\mathbf{x}^{*\mathbf{T}} \mathbb{B} \mathbf{y} \leq \mathbf{x}^{*\mathbf{T}} \mathbb{B} \mathbf{y}^* \quad \forall \mathbf{y} \in (\mathcal{Y}). \tag{13}$$

Poznámka

Zmiešaná stratégia 1. hráča $\mathbf{x}^*$ je najlepšia odpoveď na zmiešanú stratégia 2. hráča $\mathbf{y}^*$ práve keď každá z čistých stratégii i, ktorým priraďuje nenulovú pravdepodobnosť $x_i^* > 0$, je najlepšia odpoveď na $\mathbf{y}^*$.

Veta 5.2.

Nech $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ sú matice typu $m \times n$ s kladnými prvkami a nech

$$\mathbf{e}^T = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{m} \quad \mathbf{f}^T = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n}.$$

Potom vektory $\mathbf{p}^* \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{q}^* \neq \mathbf{0}$ sú riešením úlohy

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^T(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbf{q} - \mathbf{e}^T\mathbf{p} - \mathbf{f}^T\mathbf{q} &\to \max \\ \text{z.p. } \mathbb{A}\mathbf{q} \leq \mathbf{e}, \ \mathbb{B}^T\mathbf{p} &\leq \mathbf{f} \\ \mathbf{p}, \mathbf{q} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

práve vtedy keď dvojica $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = (a\mathbf{p}^*, b\mathbf{q}^*)$ je rovnovážnou stratégiou hry $(\mathcal{H}_{\mathbb{AB}})$ pričom

$$a = \frac{1}{\mathbf{f}^T\mathbf{p}^*} \quad b = \frac{1}{\mathbf{e}^T\mathbf{q}^*}.$$

Poznámka

Veta 5.2 požaduje kladnosť prvkov matíc $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, čo nie je na ujmu všeobecnosti. Podobne ako v maticových hrách môžeme pripočítaním kladnej konštanty k prvkom matíc získať matice s kladnými prvkami so zachovaním rovnovážnych stratégií.

Funkcia $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nie je vždy konkávna a tak nemôžeme použiť vždy metódy kvadratického programovania. Možno dokázať, že platí $F(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = 0$.

Má zmysel hľadať rovnovážnu stratégiu, ak vieme, že nie vždy existencia rovnovážnych stratégií zaručuje racionálnu voľbu hráčov?

Nie je známa teória, ktorá by umožnila nájsť medzi všetkými rovnovážnymi stratégiami jednu dominujúcu prípadne rozhodla, že všetky dominujúce sú zámenné.

Príklad 5.6

Treba určiť zmiešané rovnovážne stratégie hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 1,4; & 3,1 \\ 2,2; & 1,4 \end{pmatrix}.$$

Budeme ich hľadať riešením úlohy QP:

$$F(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 5p_1q_1 + 4p_1q_2 + 4p_2q_1 + 5p_2q_2 - p_1 - p_2 - q_1 - q_2 \to \max$$

$$\text{z.p. } q_1 + 3q_2 \le 1, \quad 2q_1 + q_2 \le 1, \quad q_1, q_2 \ge 0$$

$$4p_1 + 2p_2 \le 1, \quad p_1 + 4p_2 \le 1, \quad p_1, p_2 \ge 0$$

a dostaneme $\mathbf{p}^* = (\frac{2}{14}, \frac{3}{14})$, $\mathbf{q}^* = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ a $a = \frac{14}{5}$, $b = \frac{5}{3}$.
Platí $F(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = 0$.

Jedno z hľadaných rovnovážnych stratégii je $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ kde
$\mathbf{x}^* = a\mathbf{p}^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ a $\mathbf{y}^* = b\mathbf{q}^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Nevieme, či je jediné!

Veta 5.3.

Ak má dvojmaticová hra so štvorcovými maticami všetky zložky zmiešanej rovnovážnej stratégie kladné, potom má len jednu rovnovážnu stratégiu.

Príklad 5.6 – pokračovanie

Nájdená zmiešaná rovnovážna stratégia hry $\mathcal{H}_{\mathbb{AB}}$ so švorcovými maticami $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ má všetky zložky kladné

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \Big((\frac{2}{5}, \frac{3}{5}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \Big),$$

a preto je podľa vety 5.3. jediné.

Vezňovo dilema

BUDE ;-)